

# 혼합 정규공정 하에서의 공정능력지수 $C_p$ 에 대한 가설검정

조중재\* · 허태영\* · 정준철\*

\* 충북대학교 정보통계학과

## Statistical Tests for Process Capability Index $C_p$ Based on Mixture Normal Process

Cho Joong Jae\* · Heo Tae-Young\* · Jeong Jun Chel\*

\* Department of Information and Statistics, Chungbuk National University

### ABSTRACT

**Purpose:** The purpose of this study is to develop the statistical test for process capability index  $C_p$  based on mixture normal process.

**Methods:** This study uses Bootstrap method to calculate the approximate P-value for various simulation conditions under mixture normal process.

**Results:** This study indicates that our proposed method is effective way to test for process capability index  $C_p$  based on mixture normal process.

**Conclusion:** This study finds out that statistical test for process capability index  $C_p$  based on mixture normal process is useful for real application.

**Key Words:** Process Capability Index, Mixture Normal Distribution, Limiting Distribution, Bootstrap

● Received 30 April 2014, revised 3 June 2014, accepted 11 June 2014

† Corresponding Author(jjcho@chungbuk.ac.kr)

© 2014, The Korean Society for Quality Management

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-Commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

\* 이 논문은 2012년도 충북대학교 학술연구지원 사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

## 1. 서 론

6 시그마는 제조업뿐 만 아니라 서비스업, 공공부문 등의 전 조직 각 부문에서 품질 수준이 백만 기회 당 3.4 DPMO이내를 목표로 하는 품질 경영 혁신전략이라 할 수 있다. 일반적으로 시그마 품질 수준이 높으면 높을수록 공정능력은 더욱 좋아지며 고객만족도는 높아지고 대부분의 경영성과는 더욱 개선될 것이다. 공정능력(process capability)이란 공정이 제품의 설계과정에서 설정한 대로 얼마나 균일한 좋은 제품을 생산할 수 있는지를 반영하는 공정의 고유능력을 의미한다. 만일 어느 제조공정에서 생산되는 제품의 품질 변동에 이상이 있음에도 불구하고 어떠한 조치나 개선 없이 그 공정을 계속해서 가동시킨다면, 그 기업은 큰 손해를 입을 것이다. 따라서 실제 품질관리 현장에서 어떤 제품을 생산하는 제조공정의 공정능력이 있는지를 평가 하는 것은 대단히 중요한 일이다.

통계적 품질관리 분야에서는 이러한 공정능력을 평가하기 위하여 다양한 통계적 기법들이 제안되었으며 1980년 초반 이후로 여러 산업들의 제조공정에 대규모로 적용되어왔다. 그러한 필요성으로 인하여, 설계규격에 어느 정도 일치하는 제품을 생산해 낼 수 있는지를 평가하기 위한 측도로 다양한 공정능력지수들이 소개되었으며, 최근까지도 많은 학자들의 관심과 함께 활발히 연구되고 있다(Shin et al. 1996, Kim and Cho 1998).

여러 가지 공정능력지수들에 대한 통계적 추정 문제 관련 연구는 공정능력분석의 중요성에 비추어 볼 때 대단히 활발한 편이다(Cho et al. 2004). 하지만, 가설검정에 관한 연구는 상대적으로 미흡하다고 할 수 있다. 우선 정규분포 가정 하에서 공정능력지수  $C_{pmk}$ 에 관한 검정방법과 응용사례를 곁들여 연구되었고(Pearn et al. 2001), 그리고 정규분포 가정 하에서 편측 규격한계를 갖는 공정능력지수  $C_{pu}$ 와  $C_{pl}$ 에 대하여 여러 가지 표본 크기  $n$ 과 유의수준  $\alpha$ 에 따른 임계치들을 결정하여 가설검정 연구결과가 제시되었다(Lin and Pearn 2002). 이들은 주로 정규분포 하에서 공정능력지수에 대한 가설검정 문제에 대하여 연구하였다.

한편, 붓스트랩 방법은 컴퓨터가 널리 사용되면서 통계량의 표본분포와 추정이나 가설검정 문제에 효과적으로 활용될 수 있는 바, 여러 통계학 분야에 전반적으로 사용하기 시작하였다(Efron 1979, Beran 1984). 붓스트랩 신뢰구간과 관련하여 근사적으로 포괄적인 연구가 수행되었고(Diciccio and Tibshirani 1987), 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간들에 대해서 이론적으로 폭넓게 연구가 이루어졌다( Hall 1988). 그리고 붓스트랩 관련 공정능력지수들의 신뢰구간에 대한 연구결과 (Franklin and Wasserman 1991, 1992)를 시작으로, 생산현장에서 많이 사용되고 있는 공정능력지수  $C_{pk}$ 에 대하여 보다 효율적인 붓스트랩 신뢰구간 추정문제를 보다 심도 있게 연구되었다(Cho et al. 1999).

하지만 최근에 혼합 정규공정 하에서 붓스트랩 방법을 사용하여 효율적인 신뢰구간 추정 문제를 연구하였고 가설검정에 대한 간략한 연구방향을 제시하였다(Jeong 2011). 이들 내용을 기초로 본 연구에서는 정규공정들이 복합적으로 혼합되어있는 혼합 정규공정(Mixture Normal Process)에 대한 가설검정 문제를 연구하였으며, 이는 실제 현상과 관련하여 보다 포괄적으로 설명할 수 있는 분포로서 기존의 단일 정규공정보다 훨씬 실제적이라 할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 혼합 정규 공정에 대하여 정의하고 설명하였으며, 3장에서는 이 지수들에 대한 추정량들에 대한 표준오차와 관련된 극한분포에 대하여 살펴보았으며, 4장에서는 혼합 정규공정 하에서 공정능력지수에 대한 가설검정 방법을 제안하였다. 그리고 5장에서는 혼합 정규공정 하에서 다양한 조건에 대하여 공정능력지수  $C_p$ 와 단기적인 시그마 품질수준인  $Z_{st} = 3C_p$ 에 대한 가설검정 문제를 붓스트랩 방법을 통한 모의실험을 통해 제안된 가설검정 방법이 복잡한 계산 없이 효과적으로 활용할 수 있는 유용한 방법임을 입증하였다.

## 2. 혼합 정규공정

혼합 정규공정이란 여러 개의 정규공정들로 이루어진 보다 실제적인 공정이라 할 수 있다. 혼합 정규분포와 관련된 모집단 분포를 그림으로 나타내면 <Figure 1>과 같다.

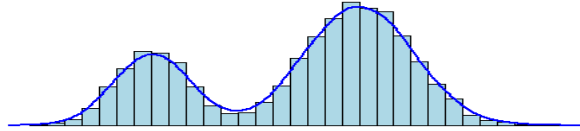


Figure 1. Mixture normal distribution

혼합 정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x|\theta) = \sum_{i=1}^M \alpha_i f_i(x|\theta_i) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \frac{1}{\sigma_i} \phi\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right)$$

단,  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  이며, 가중치  $\alpha_i$ 는  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$ 을 만족하는  $i$ 번째 성분의 확률밀도함수가 전체 혼합 확률밀도함수에서 차지하는 상대적 중요도를 나타낸다.

함수  $f_i(x|\theta_i)$ 는 위의 혼합 정규확률밀도함수  $f(x|\theta)$ 에서  $i$ 번째 정규 분포  $N(\mu_i, \sigma_i)$ 의 확률 밀도함수를 뜻한다 ( $i = 1, 2, 3, \dots, M$ ). 각 정규공정에서의 모수를  $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i^2)$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ )라 놓으면 모수  $\theta$ 는  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)$ 이다.

간단한 예로, 두 정규 확률밀도함수  $f_1(x|\theta_1)$ 과  $f_2(x|\theta_2)$ 에 대하여 가중치  $\alpha$ 와  $1-\alpha$ 인 경우, 혼합 정규 확률 밀도함수  $f(x|\theta)$ 는 다음과 같이 표현 될 수 있으며, <Figure 1>의 형태로 표현된다.

$$f(x|\theta) = \alpha f_1(x|\theta_1) + (1-\alpha) f_2(x|\theta_2)$$

## 3. 추정량 $\hat{C}_p$ 에 대한 표준오차와 관련 극한분포

공정능력지수  $C_p$ 에 대한 플러그-인 추정량인  $\hat{C}_p$ 이 좋은 추정량인지 확인하는 것은 매우 중요한 문제이므로 추정량  $\hat{C}_p$ 의 바람직한 성질들을 파악하기 위해 우선 근사적으로 표준오차와 극한분포를 알아내는 것이 필요하다. 그러나 다양한 공정분포 가정 하에서 추정량  $\hat{C}_p$ 의 정확한 확률분포와 표준오차를 유도하기가 경우에 따라 매우 어려움에도 불구하고 통계적 추론에서 중요한 역할을 하고 있다. 이들 문제를 상당한 정확성을 갖고 근사적으로나마 해결하기 위하여 붓스트랩 방법을 사용하는 것이 훌륭한 대안이 될 수 있으며, 붓스트랩 알고리즘을 소개하면 다음과 같다.

**[1단계]** 공정평균  $\mu_m$ 과 공정분산  $\sigma_m^2$ 인 혼합 정규분포  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha)$ 로부터의 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 을 추출하여 다음과 같은 공정능력지수  $C_p$ 에 대한 플러그인 추정량  $\hat{C}_p$ 을 얻는다.

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6S} = \frac{d}{3S}$$

단,  $USL$ 은 품질특성치  $X$ 에 대한 규격상한이고,  $LSL$ 은 규격하한이다. 그리고 표본평균  $\bar{X}$ 와 표본분산  $S^2$ 는 다음 식과 같으며, 표본 표준편차  $S$ 는  $S = \sqrt{S^2}$ 이다.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**[2단계]** 1단계의 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 로부터 복원 추출방법에 의해 붓스트랩 표본  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 을 추출한다( $n=10, 20, \dots, 100$ ). 그리고 붓스트랩 표본평균  $\bar{X}^*$ 와 붓스트랩 표본분산  $S^{*2}$ 을 구하여 다음과 같은 붓스트랩 추정량  $\hat{C}_p^*$ 을 얻는다.

$$\bar{X}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^*, \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^* - \bar{X}^*)^2 \rightarrow \hat{C}_p^* = \frac{d}{3S^*}$$

**[3단계]** 1단계부터 2단계의 절차를 독립적으로  $B(=1000)$ 번 반복 실행하여  $B$ 개의 붓스트랩 추정량  $\hat{C}_p^*(1), \hat{C}_p^*(2), \dots, \hat{C}_p^*(B)$ 을 얻는다.

우선 위의 알고리즘에 의해  $B$ 개의 붓스트랩 추정량들의 평균을  $\hat{C}_p^*(\cdot) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{C}_p^*(b)$ 라 놓으면

다음의 중요한 사실이 성립하게 된다(Efron and Tibshirani 1993, Cho et al. 1996).

반복횟수  $B$ 가  $B \rightarrow \infty$ 일 때,

$$SE_{boot} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{C}_p^*(b) - \hat{C}_p^*(\cdot))^2} \rightarrow se_{\hat{F}}(\hat{C}_p^* | \chi_n) = \sqrt{Var(\hat{C}_p^* | \chi_n)} = \sqrt{\frac{(\hat{\mu}_{4m} - \hat{\sigma}_m^4) d^2}{36 \hat{\sigma}_m^6}}$$

즉, 붓스트랩 추정량  $\hat{C}_p^*$ 에 대한 표준오차로서  $\sqrt{Var(\hat{C}_p^* | \chi_n)}$  뿐만 아니라 반복횟수  $B$ 가 적당히 큰 값인 경우

$SE_{boot} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{C}_p^*(b) - \hat{C}_p^*(\cdot))^2}$ 이 통계적 구간추정과 가설검정 문제를 해결하는 데 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

### 4. 혼합 정규공정 하에서의 가설검정 방법

본 논문에서는 혼합 정규분포  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha)$  하에서 공정능력지수  $C_p$  혹은 단기적인 시그마 품질수준  $Z_{st} = 3C_p$ 에 대한 가설검정 문제를 붓스트랩 기반의 모의실험을 수행하여 유의확률( $p$ -value)을 보다 효율적으로

계산하는 방법을 제안하고 그 효과성을 보이하고자 한다. 기존의 공정능력지수에 대한 가설검정에 대한 연구들은 주로 정규공정 하에서 행하여졌으나, 붓스트랩 방법은 정규성을 가정할 수 없는 혼합 정규공정인 경우에도 보다 효과적이고 편리하게 활용할 수 있는 포괄적인 방법이라 할 수 있다.

본 연구에서 제안한 주된 가설의 형태는 다음과 같다.

$$H_0 : C_p \leq c_0 \text{ vs } H_1 : C_p > c_0$$

$$\text{혹은 } H_0 : Z_{st} \leq 3c_0 \text{ vs } H_1 : Z_{st} > 3c_0$$

공정 특성을 나타내는 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 들이 혼합 정규분포  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha)$ 에 따르며 4차 중심적률  $\mu_{4m} = E(X - \mu_m)^4$ 가 존재할 때, 다음의 극한 분포 결과가 성립된다(Cho et al. 1996)..

$$[1] \sqrt{n}(\hat{C}_p - C_p) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{pm}^2) \quad \text{단, } \sigma_{pm}^2 = \frac{(\mu_{4m} - \sigma_m^4)d^2}{36\sigma_m^6}$$

$$[2] \sqrt{n}(\hat{C}_p^* - \hat{C}_p) \Big| \chi_n \xrightarrow{d} N(0, \hat{\sigma}_{pm}^2)$$

$$\text{단, } \hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6S}, \quad \sigma_{pm}^2 = \frac{(\mu_{4m} - \sigma_m^4)d^2}{36\sigma_m^6}, \quad \hat{\sigma}_{pm}^2 = \frac{(\hat{\mu}_{4m} - \hat{\sigma}_m^4)d^2}{36\hat{\sigma}_m^6}, \quad \chi_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

물론 공정평균  $\mu_m$ 과 공정분산  $\sigma_m^2$ 인 혼합 정규분포  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha)$ 인 경우에는 각각 다음의 관계  $\mu_m = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ 와  $\sigma_m^2 = \alpha(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + (1 - \alpha)(\sigma_2^2 + \mu_2^2) - \mu_m^2$ 이 성립한다.

그리고 혼합 정규분포  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha)$  하에서 공정능력지수 추정량  $\hat{C}_p$ 의 근사적인 분산은  $\frac{\sigma_{pm}^2}{n}$ 이며,  $\sigma_{pm}^2 = \frac{(\mu_{4m} - \sigma_m^4)d^2}{36\sigma_m^6}$ 로 표현된다. 그리고 4차 중심적률  $\mu_{4m}$ 에 대한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{4m} &= E(X - \mu_m)^4 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_m)^4 \times [(\alpha \times f_1(x)) + ((1 - \alpha) \times f_2(x))] dx \\ &= \left[ \alpha \times \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_m)^4 \times f_1(x) dx \right] + \left[ (1 - \alpha) \times \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_m)^4 \times f_2(x) dx \right] \end{aligned}$$

따라서 4차 중심적률  $\mu_{4m}$ 에 대한 보다 정리된 간단한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{4m} &= \alpha [3\sigma_1^4 + (1 - \alpha)^4(\mu_1 - \mu_2)^4 + 6(\mu_1 - \mu_m)^2\sigma_1^2] + (1 - \alpha) [3\sigma_2^4 + \alpha^4(\mu_1 - \mu_2)^4 + 6(\mu_2 - \mu_m)^2\sigma_2^2] \\ \mu_{4m} &= \alpha [E(X - \mu_1)^4 + (\mu_1 - \mu_m)^4 + 6(\mu_1 - \mu_m)^2\sigma_1^2] \\ &\quad + (1 - \alpha) [E(X - \mu_2)^4 + (\mu_2 - \mu_m)^4 + 6(\mu_2 - \mu_m)^2\sigma_2^2] \\ &= \alpha [3\sigma_1^4 + (\mu_1 - \alpha\mu_1 - (1 - \alpha)\mu_2)^4 + 6(\mu_1 - \mu_m)^2\sigma_1^2] \\ &\quad + (1 - \alpha) [3\sigma_2^4 + (\mu_2 - \alpha\mu_2 - (1 - \alpha)\mu_2)^4 + 6(\mu_2 - \mu_m)^2\sigma_2^2] \end{aligned}$$

따라서 공정평균  $\mu_m$  와 공정분산  $\sigma_m^2$  인 혼합 정규분포( $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha$ ) 하에서 귀무가설  $H_0 : C_p \leq c_0$  와 대립가설  $H_1 : C_p > c_0$  에 대한 가설검정에 필요한 근사적인 유의확률은 붓스트랩 모의실험을 통해 식(1)로 계산할 것을 제안한다.

$$ASL_{boot} = \frac{\sum_{b=1}^B I(t(X^{*b}) \geq t_{obs})}{B} \tag{1}$$

즉, 3장에서 논의된 표준오차에 대한 바람직한 성질들을 바탕으로, 식(1)에서 통계량  $t(X^{*b})$  는  $t(X^{*b}) = \frac{\sqrt{n}(\hat{C}_p^*(b) - \hat{C}_p)}{\hat{\sigma}_{pm}^*}$  그리고  $t_{obs} = \frac{\sqrt{n}(\hat{C}_p - c_0)}{\hat{\sigma}_{pm}}$  로 계산할 것을 제안한다.

단, 4차 중심적률  $\mu_{4m}$  에 대한 추정량  $\hat{\mu}_{4m}$  은  $\hat{\mu}_{4m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4$ , 붓스트랩 추정량  $\hat{\mu}_{4m}^*$  은  $\hat{\mu}_{4m}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^* - \bar{X}^*)^4$  이다. 그리고 추정분산  $\hat{\sigma}_{pm}^2$  와 붓스트랩 추정분산  $\hat{\sigma}_{pm}^{*2}$  은 플러그-인 방법에 의한 분산  $\sigma_{pm}^2$  에 대한 추정량들이다.

물론 공정능력지수  $C_p$  에 대한 가설과 시그마 품질수준인  $Z_{st} = 3C_p$  에 대한 가설 내용이 서로 상등(equivalent) 이므로, 시그마 품질 수준인  $Z_{st}$  에 대한 가설검정과 관련된 유의확률은 앞에서 논의된 공정능력지수  $C_p$  에 필요한 유의확률과 정확하게 같음을 알 수 있다.

## 5. 모의실험을 통한 지수 $C_p$ 에 대한 가설검정

### 5.1 모의실험

본 장에서는 다양한 혼합 정규공정 하에서 붓스트랩 방법을 사용하여 기본적인 공정능력지수  $C_p$  혹은 단기적인 시그마 품질수준인  $Z_{st} = 3C_p$  에 대한 가설검정 방법을 제안하여 다양한 모의실험을 실시하였다. 일반적으로 공정의 분포가 정규분포일 때에 적용할 수 있는 것과는 달리 붓스트랩 방법은 공정의 분포가 어떠한 분포를 따르더라도 이용할 수 있는 유용한 방법이라 할 수 있다. 공정평균  $\mu_m$  와 공정분산  $\sigma_m^2$  인 혼합 정규분포( $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \alpha$ )를 따르고 있다는 조건하에서 다양한 경우에 대해 모의실험을 수행하였으며, 귀무가설  $H_0 : C_p \leq c_0$  (즉,  $Z_{st} \leq 3c_0$ )와 대립가설  $H_1 : C_p > c_0$  (즉,  $Z_{st} > 3c_0$ )인 가설검정을 수행하였다.

즉 규격상한(USL)과 규격하한(LSL)은 각각 59, 39로 설정하였으며, 구체적으로 다음의 <Table 1>과 같은 다양한 조합의 경우에 대하여 모의실험을 수행할 예정이며 모의실험 절차는 다음과 같다.

**1단계** : 주어진 혼합 정규분포로부터 크기  $n$ 의 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 을 확률추출하여 표본평균  $\bar{X}$ 와 표본분산  $S^2$ 을 계산한 후, 플러그-인 방법으로 공정능력지수  $C_p$  에 대한 다음의 추정량을 구한다.

$$\hat{C}_p = \frac{d}{3S}$$

**2단계** : 확률표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 으로부터 복원 추출방법에 의해  $n$ 개의 붓스트랩 표본  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 을 얻은 후 붓스트랩 표본평균  $\bar{X}^*$ 와 붓스트랩 표본분산  $S^{*2}$ 을 구한다.

**3단계** : 2단계로부터 얻은 붓스트랩 표본평균  $\bar{X}^*$ 와 붓스트랩 표본분산  $S^{*2}$ 을 이용하여 다음의 붓스트랩 추정량을 얻는다.

$$\hat{C}_p^* = \frac{d}{3S^*}, \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{C}_p^* - \hat{C}_p)}{\hat{\sigma}_{pm}^*}$$

**4단계** : 1,2,3단계를  $B = 1,000$ 회 반복수행하여 4절에서 제안한 근사 유의확률  $\widehat{ASL}_{boot}$ 의 값을 구한다.

**Table 1.** Design of simulation for test

| Sigma Quality Level | True $C_p$    | Process variance        | Mixture Process Distribution  |
|---------------------|---------------|-------------------------|---|
| 2 sigma             | $\frac{2}{3}$ | $\sigma_m^2 = 25$       | $Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, 27.92222, 0.2\right)$<br>$Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, 37.88889, 0.5\right)$    |
| 3 sigma             | 1             | $\sigma_m^2 = 10.11111$ | $Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, 10.5611, 0.2\right)$<br>$Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, \frac{91}{9}, 0.5\right)$ |
| 4 sigma             | $\frac{4}{3}$ | $\sigma_m^2 = 6.25$     | $Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, 4.484722, 0.2\right)$<br>$Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, 0.3888889, 0.5\right)$   |
| 5 sigma             | $\frac{5}{3}$ | $\sigma_m^2 = 4$        | $Mixture Normal\left(48, 50, \frac{91}{9}, 1.672222, 0.2\right)$<br>$Mixture Normal\left(48, 50, \frac{15}{9}, 2.255556, 0.5\right)$    |

### 5.2 공정능력지수 $C_p$ 에 대한 모의실험 결과 분석

붓스트랩 방법을 이용한 공정능력지수  $C_p$ 에 대한 가설검정 방법의 타당성을 위해 모의실험을 실시하여 붓스트랩 기반의 근사적인 유의확률을 계산하여 제시하였다. 본 연구에서는 <Table 1>과 같이 제안한 공정의 분포가 다양한 혼합 정규분포를 따르는 경우에 대해 가설  $H_0 : C_p \leq c_0$  vs  $H_1 : C_p > c_0$ 을 검정하기 위해 표본크기를 달리하여 각각  $c_0 = 2/3, 1, 4/3, 5/3$ 인 경우에 대하여 근사적인 유의확률을 계산하였으며, <Table 2>-<Table 5>에 그 결과를 제시하였다.

**Table 2.** Simulation result for case 1 (2 sigma quality level ;  $C_p = 2/3$ )

| $\alpha$ | $n$ | $\widehat{ASL}_{boot}$ |         |         |         |
|----------|-----|------------------------|---------|---------|---------|
|          |     | 2 sigma                | 3 sigma | 4 sigma | 5 sigma |
| 0.2      | 10  | 0.852                  | 0.453   | 0.424   | 0.139   |
|          | 20  | 0.941                  | 0.466   | 0.437   | 0.153   |
|          | 30  | 0.634                  | 0.46    | 0.394   | 0.085   |
|          | 40  | 0.641                  | 0.521   | 0.354   | 0.072   |
|          | 50  | 0.582                  | 0.482   | 0.299   | 0.05    |
|          | 60  | 0.57                   | 0.5     | 0.278   | 0.063   |
|          | 70  | 0.559                  | 0.457   | 0.259   | 0.048   |
|          | 80  | 0.561                  | 0.413   | 0.221   | 0.022   |
|          | 90  | 0.555                  | 0.401   | 0.21    | 0.014   |
|          | 100 | 0.509                  | 0.404   | 0.184   | 0.005   |
| 0.5      | 10  | 0.965                  | 0.609   | 0.189   | 0.133   |
|          | 20  | 0.633                  | 0.537   | 0.154   | 0.111   |
|          | 30  | 0.515                  | 0.443   | 0.142   | 0.909   |
|          | 40  | 0.531                  | 0.428   | 0.142   | 0.087   |
|          | 50  | 0.524                  | 0.398   | 0.103   | 0.077   |
|          | 60  | 0.515                  | 0.373   | 0.100   | 0.064   |
|          | 70  | 0.505                  | 0.363   | 0.099   | 0.051   |
|          | 80  | 0.499                  | 0.335   | 0.101   | 0.042   |
|          | 90  | 0.502                  | 0.327   | 0.079   | 0.033   |
|          | 100 | 0.500                  | 0.257   | 0.077   | 0.023   |

**Table 3.** Simulation result for case 2 (3 sigma quality level ;  $C_p = 1$ )

| $\alpha$ | $n$ | $\widehat{ASL}_{boot}$ |         |         |         |
|----------|-----|------------------------|---------|---------|---------|
|          |     | 2 sigma                | 3 sigma | 4 sigma | 5 sigma |
| 0.2      | 10  | 0.987                  | 0.954   | 0.867   | 0.815   |
|          | 20  | 0.955                  | 0.888   | 0.696   | 0.302   |
|          | 30  | 0.942                  | 0.846   | 0.578   | 0.361   |
|          | 40  | 0.812                  | 0.69    | 0.49    | 0.317   |
|          | 50  | 0.808                  | 0.602   | 0.54    | 0.24    |
|          | 60  | 0.686                  | 0.559   | 0.488   | 0.134   |
|          | 70  | 0.695                  | 0.535   | 0.345   | 0.072   |
|          | 80  | 0.644                  | 0.516   | 0.341   | 0.042   |
|          | 90  | 0.622                  | 0.510   | 0.337   | 0.021   |
|          | 100 | 0.605                  | 0.502   | 0.319   | 0.008   |
| 0.5      | 10  | 0.937                  | 0.947   | 0.888   | 0.807   |
|          | 20  | 0.951                  | 0.875   | 0.656   | 0.30    |
|          | 30  | 0.933                  | 0.831   | 0.565   | 0.335   |
|          | 40  | 0.801                  | 0.645   | 0.522   | 0.318   |
|          | 50  | 0.808                  | 0.601   | 0.546   | 0.232   |
|          | 60  | 0.687                  | 0.547   | 0.465   | 0.135   |
|          | 70  | 0.671                  | 0.522   | 0.344   | 0.062   |
|          | 80  | 0.641                  | 0.516   | 0.339   | 0.052   |
|          | 90  | 0.610                  | 0.508   | 0.323   | 0.024   |
|          | 100 | 0.605                  | 0.502   | 0.316   | 0.008   |



**Table 4.** Simulation result for case 3 (4 sigma quality level ;  $C_p = 4/3$ )

| $\alpha$ | $n$ | $\widehat{ASL}_{boot}$ |         |         |         |
|----------|-----|------------------------|---------|---------|---------|
|          |     | 2 sigma                | 3 sigma | 4 sigma | 5 sigma |
| 0.2      | 10  | 0.998                  | 0.937   | 0.772   | 0.742   |
|          | 20  | 0.994                  | 0.936   | 0.82    | 0.701   |
|          | 30  | 0.991                  | 0.806   | 0.733   | 0.546   |
|          | 40  | 0.766                  | 0.704   | 0.694   | 0.404   |
|          | 50  | 0.750                  | 0.732   | 0.672   | 0.320   |
|          | 60  | 0.742                  | 0.730   | 0.617   | 0.315   |
|          | 70  | 0.733                  | 0.712   | 0.593   | 0.225   |
|          | 80  | 0.729                  | 0.704   | 0.562   | 0.214   |
|          | 90  | 0.691                  | 0.667   | 0.533   | 0.172   |
|          | 100 | 0.710                  | 0.651   | 0.519   | 0.112   |
| 0.5      | 10  | 0.999                  | 0.944   | 0.781   | 0.767   |
|          | 20  | 0.993                  | 0.936   | 0.834   | 0.771   |
|          | 30  | 0.992                  | 0.816   | 0.733   | 0.536   |
|          | 40  | 0.767                  | 0.725   | 0.694   | 0.414   |
|          | 50  | 0.753                  | 0.732   | 0.672   | 0.310   |
|          | 60  | 0.751                  | 0.733   | 0.617   | 0.308   |
|          | 70  | 0.746                  | 0.722   | 0.593   | 0.217   |
|          | 80  | 0.734                  | 0.716   | 0.562   | 0.204   |
|          | 90  | 0.666                  | 0.654   | 0.533   | 0.152   |
|          | 100 | 0.722                  | 0.650   | 0.519   | 0.110   |

**Table 5.** Simulation result for case 4 (5 sigma quality level ;  $C_p = 5/3$ )

| $\alpha$ | $n$ | $\widehat{ASL}_{boot}$ |         |         |         |
|----------|-----|------------------------|---------|---------|---------|
|          |     | 2 sigma                | 3 sigma | 4 sigma | 5 sigma |
| 0.2      | 10  | 0.991                  | 0.983   | 0.884   | 0.864   |
|          | 20  | 0.987                  | 0.981   | 0.891   | 0.845   |
|          | 30  | 0.972                  | 0.902   | 0.882   | 0.821   |
|          | 40  | 0.891                  | 0.883   | 0.817   | 0.793   |
|          | 50  | 0.887                  | 0.833   | 0.790   | 0.728   |
|          | 60  | 0.879                  | 0.811   | 0.777   | 0.743   |
|          | 70  | 0.860                  | 0.803   | 0.653   | 0.608   |
|          | 80  | 0.847                  | 0.774   | 0.611   | 0.599   |
|          | 90  | 0.848                  | 0.717   | 0.607   | 0.526   |
|          | 100 | 0.850                  | 0.711   | 0.602   | 0.509   |
| 0.5      | 10  | 0.993                  | 0.963   | 0.864   | 0.861   |
|          | 20  | 0.997                  | 0.961   | 0.811   | 0.799   |
|          | 30  | 0.973                  | 0.882   | 0.799   | 0.788   |
|          | 40  | 0.895                  | 0.843   | 0.811   | 0.699   |
|          | 50  | 0.896                  | 0.813   | 0.774   | 0.691   |
|          | 60  | 0.879                  | 0.811   | 0.701   | 0.609   |
|          | 70  | 0.860                  | 0.783   | 0.616   | 0.599   |
|          | 80  | 0.849                  | 0.724   | 0.601   | 0.536   |
|          | 90  | 0.838                  | 0.717   | 0.597   | 0.514   |
|          | 100 | 0.832                  | 0.716   | 0.601   | 0.502   |

<Table 2>는 경우 1의 두 가지 혼합 정규분포에 대한 모의실험 결과로 시그마 품질수준은 2이고 공정능력지수  $C_p = 2/3$ 에 대한 가설  $H_0 : C_p \leq 2/3$  vs  $H_1 : C_p > 2/3$  인 경우이다.

위의 혼합 정규공정에서 가중치  $\alpha = 0.2$ 인 경우, 모의실험 결과에서는 분산  $\sigma_m^2 = 25$ 인 경우에 표본크기  $n$ 의 값이 커질수록  $\widehat{ASL}_{boot}$  값이 0.5에 가깝게 됨에 따라 귀무가설  $H_0$ 가 참일 확률이 약 0.5이고  $H_1$ 이 참일 확률이 약 0.5로 매우 자연스런 결과임을 의미한다. 그리고 분산  $\sigma_m^2$ 이 작아짐에 따라  $\widehat{ASL}_{boot}$  값이 작아지고 있으며, 표본 크기  $n$ 의 값이 커짐에 따라  $\widehat{ASL}_{boot}$  값이 작아지고 있어 귀무가설  $H_0$ 를 보다 확실하게 기각할 수 있음을 보여주고 있음을 뜻한다.

그리고 혼합 정규공정에서 가중치  $\alpha = 0.5$ 인 경우의 모의실험 결과에서도 가중치  $\alpha = 0.2$ 에서의 결과와 마찬가지로 결과를 얻을 수 있어 혼합 정규분포의 가중치에 상관없이 일관성 있는 모의실험 결과를 얻을 수 있었다. 또한 <Table 3>-<Table 5>에서도 공정능력지수  $C_p$  즉 단기적인 시그마 품질수준이 다른 경우일뿐 <Table 2>에 대한 설명과 마찬가지로 다양한 조건의 혼합 정규공정에서도 일관성 있는 결과를 보여주고 있어 공정능력지수  $C_p$ 에 대한 가설검정 방법으로 유용하게 활용될 수 있음을 보여주고 있다.

## 6. 결 론

공정능력분석 분야에서도 실제 산업 현장에서 혼합 정규공정은 흔히 나타나게 되는 보다 현실적인 공정이라 할 수 있는 바, 이에 대한 연구는 미흡한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 혼합 정규공정 가정 하에서 붓스트랩 방법을 사용하여 기본적인 공정능력지수  $C_p$  혹은 단기적인 시그마 품질수준인  $Z_{st} = 3C_p$ 에 대한 가설검정 방법을 제안하여 다양한 조건의 혼합 정규공정의 모의실험을 통해 가설검정에 효과적으로 활용할 수 있는 유용한 방법임을 연구하였다.

혼합 정규공정 하에서 본 연구에서 제안한 붓스트랩 방법을 사용하여 공정능력지수  $C_p$ 에 대해  $\widehat{ASL}_{boot}$  값을 계산하였다. 그리고 다양한 조건의 혼합 정규공정 하에서 모의실험을 통해 공정능력지수  $C_p$ 에 대한 가설검정 결과, 귀무가설  $H_0 : C_p = c_0$  ( $Z_{st} = 3C_p = 3c_0$  시그마 품질수준)이 참인 경우 근사적인 유의확률이라 할 수 있는  $\widehat{ASL}_{boot}$  값이 0.5에 수렴하게 됨을 확인할 수 있었으며, 보다 더 우수한 품질수준에 대해서는  $\widehat{ASL}_{boot}$  값이 급격히 작아짐에 따라 제안된 방법이 효과적임이 입증되었다.

## REFERENCES

- Beran, Rudolf. 1984. "Bootstrap Methods in Statistics." Jahresberichtr der Deutschen Mathematiker Vereinigung 86:14-30.
- Cho, Joong Jae, Park, Byoung Sun, and Jo, See Heyon. 1996. "Bootstrapping a Unified Process Capability Index." Journal of the Korean Statistical Society 26(4):543-554.
- Cho, Joong Jae, Park, Byoung Sun, and Kim, Ju Sung. 1999. "Better Nonparametric Bootstrap Confidence Intervals for Capability Index  $C_{pk}$ ." The Korean Journal of Applied Statistics 12(1):45-65.
- Cho, Joong Jae, Park, Byoung Sun, and Park, Hyo-il. 2004. "Better Confidence Limits for Process Capability Index  $C_{pmk}$  under the assumption of Normal Process." Journal of the Korean Society for Quality Management

- 32(4):229–241.
- Diciccio, Thomas, and Tibshirani, Robert. 1987. "Bootstrap Confidence Intervals and Bootstrap Approximations." *Journal of the American Statistical Association* 82:163–170.
- Efron, Bradley. 1979. "Bootstrap Methods: Another look at the Jackknife." *Annals of Statistics* 7(1):1–26.
- Efron, Bradley, and Tibshirani, Robert. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall.
- Franklin, LeRoy, and Wasserman, Gray. 1991. "Bootstrap Confidence Interval Estimate of  $C_{pk}$ : An Introduction." *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 20(1):231–242
- Franklin, LeRoy, and Wasserman, Gray. 1992. "Bootstrap Lower Confidence Interval Limits for Capability Indices." *Journal of Quality Technology* 24:196–210.
- Hall, Peter. 1988. "Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals." *Annals of Statistics* 16:927–953.
- Jeong, Jun Chel. 2011. "Statistical Inference for Process Capability Index  $C_p$  under a Mixed Normal Distribution." A thesis for the degree of Master, Chungbuk National University.
- Kim, Pyong-Koo, and Cho, Joong Jae. 1998. "Some Process Capability Indices using Loss Function under Contaminated Normal Process." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 26(4):65–78.
- Lin, P. C., and Pearn, Wen Lea. 2002. "Testing Process Capabibility for one-sided specification limit with Application to the voltage level translator." *Microelectronics Reliability* 42:1975–1983.
- Pearn, Wen Lea, Yang, S. L., and Chen, Kuen-Suan. 2001. "Testing Process Capability  $C_{pmk}$  with an Application," *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering* 8(1):15–34.
- Shin, Kyung-Seok, Kim, Seong Jip, and Kang Wook. 1996. "An Improved Process Incapability Index for the Evaluation of Process Capability." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 24(4):90–102.