

技術論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 42(8), 661-673(2014)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2014.42.8.661>정지궤도위성의 광학 관측데이터를 이용한 KARISMA의
정밀궤도결정 결과 분석

조동현*, 김해동, 이상철

Analysis of Precise Orbit Determination of the KARISMA Using
Optical Tracking Data of a Geostationary Satellite

Dong-Hyun Cho*, Hae-Dong Kim and Sang-Cherl Lee

Korea Aerospace Research Institute

ABSTRACT

In this paper, a precise orbit determination process was carried out based on KARISMA(KARI Collision Risk Management System) developed by KARI(Korea Aerospace Research Institute), in which optical tracking data of a geostationary satellite was used. The real optical tracking data provided by ESA(European Space Agency) for the ARTEMIS geostationary satellite was used. And orbit determination error was approximately 420 m compared to that of the ESA's orbit determination result from the same optical tracking data. In addition, orbit prediction was conducted based on the orbit determination result with optical tracking data for 4 days, and the position error for the orbit prediction during 3 days was approximately 500~600 m compared to that of ESA's result. These results imply that the performance of the KARISMA's orbit determination function is suitable to apply to the collision risk assessment for the space debris.

초 록

본 논문에서는 한국항공우주연구원에서 개발한 우주파편 충돌위험 종합관리 시스템(KARISMA, KARI Collision Risk Management System)의 궤도결정 기능을 이용하여, 정지궤도위성의 광학 관측데이터에 기반한 정밀궤도결정을 수행하였다. 광학 관측데이터로는 정지궤도 위성 ARTEMIS에 대한 유럽우주기구(ESA, European Space Agency)의 실제 광학 관측데이터를 사용하였다. 동일한 관측데이터에 대해 유럽우주기구의 정밀궤도결정 시스템을 통해 얻은 궤도결정 결과와 비교했을 때 약 420 m 정도의 평균 위치오차가 있음을 확인하였다. 또한, 4일간의 광학 관측데이터를 바탕으로 얻은 궤도결정 결과를 이용하여 궤도예측을 수행하였으며, 유럽우주기구의 궤도결정 결과와 비교했을 때 3일 동안 대략 500~600 m 수준의 위치오차를 보였다. 이러한 결과들에 기반하여 KARISMA의 궤도결정 성능이 우주파편 충돌위험 분석을 위해 사용가능한 수준임을 확인할 수 있었다.

Key Words : Space Debris(우주파편), Optical Tracking Data(광학 관측데이터), Orbit Determination(궤도결정), KARISMA(우주파편 충돌위험 종합관리 시스템)

† Received: April 2, 2014 Accepted: July 22 2014

* Corresponding author, E-mail : dhcho99@kari.re.kr

<http://journal.ksas.or.kr/>

pISSN 1225-1348 / eISSN 2287-6871

1. 서론

자국의 위성을 운용함에 있어서 우주파편은 더 이상 부가적인 고려사항이 아니다. 1991년 러시아의 코스모스(COSMOS)위성이 우주파편에 의해 손상된 사건⁽¹⁾이 보고된 이후 많은 인공위성들이 우주파편에 의한 손상위험에 놓여 있음이 확인되었다. 이러한 우주파편은 2007년 중국의 자국위성 FengYun 1C에 대한 요격실험 이후 Fig. 1과 같이 40% 이상 급격히 증가하게 되었으며⁽²⁾, 2009년에는 미국의 이리듐 33(IRIDIUM-33)위성과 러시아의 코스모스(COSMOS) 2251 Strela 2M 위성간의 충돌사건⁽³⁾도 발생하였다. 이와 같이 최근 우주파편에 의한 충돌위험에 대한 관심이 전세계적으로 증가하고 있는 가운데, 국내에서도 우주파편 충돌위험 종합관리 시스템(KARISMA, KARI Collision Risk Management System)이 개발되었다⁽⁴⁻¹⁰⁾. 한국항공우주연구원(이하 항우연)에서 개발한 KARISMA는 정밀한 궤도결정 결과를 바탕으로 Fig. 2와 같이 우주물체와 자국의 운영위성에 대한 충돌위험을 계산하고, 충돌회피 기동을 설계한다.

일반적으로 우주파편에 의한 충돌위험 관리시스템은 자국의 위성에 대해서는 지상국으로부터 얻은 정밀 관측데이터를 바탕으로 궤도결정 정보를 정밀하게 계산할 수 있는 반면, 접근해오는 우주파편에 대한 궤도정보는 대부분 미국의 합동 우주전략센터(JSPOC, Joint Space Operations Center)에서 제공해주고 있는 TLE(Two Line Element) 정보 혹은 CSM(Conjunction Summary Message)에 의존하고 있다. 하지만 TLE 정보 및 CSM을 이용해서 계산한 접근물체의 궤도정보 정밀도는 자국의 위성에 비해 상대적으로 낮은 수준

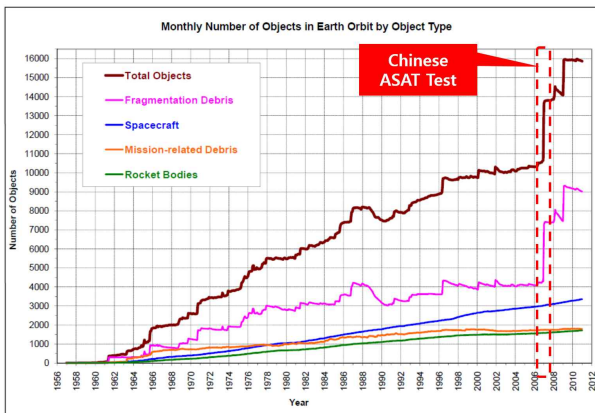


Fig. 1. Monthly number of objects in earth orbit by object type⁽³⁾

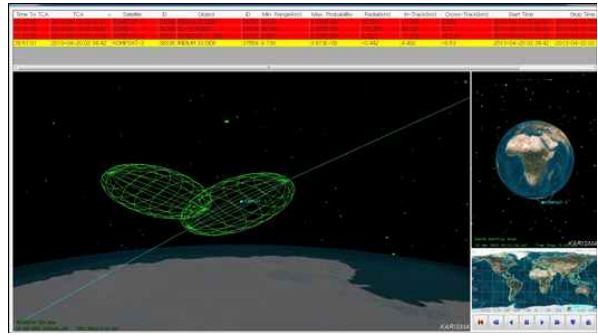


Fig. 2. Display window of collision risk situation in KARISMA

이며, 이는 상세 충돌위험 분석 및 충돌회피 기동 설계에 많은 영향을 줄 수밖에 없다. 따라서 충돌위험이 있는 우주물체의 정밀한 궤도정보 획득을 위해 외부 관측소에 해당 접근물체에 대한 추적을 의뢰하고 해당 데이터를 얻어 사용하여야 한다.

이러한 외부 추적데이터는 크게 레이더 관측 데이터와 광학 관측데이터가 있다. 레이더 관측데이터의 경우 저궤도에 분포한 우주파편의 관측에 용이한 반면, 정지궤도와 같은 고궤도에 분포한 우주파편의 관측을 위한 전력소모가 상당히 때문에 고궤도에 대한 관측에는 주로 광학 카메라가 사용된다⁽¹¹⁾. 광학 관측데이터는 환경적 영향으로 인한 관측시간의 제한으로 인해 불연속적인 관측데이터 특성을 갖는다. 다수의 관측소의 데이터를 이용한 우주물체 감시에 활용하기도 하였으며⁽¹²⁾, 광학 관측데이터를 이용한 궤도결정 정밀도 향상을 위한 예비궤도 설계 기법에 대한 연구⁽¹³⁾ 등도 이루어지고 있다. 국내에서는 우주 관측용 광학 카메라를 이용한 인공위성의 광학 관측데이터를 이용하여 궤도결정을 수행한 적이 있다⁽¹⁴⁻¹⁵⁾. 하지만 우주관측용의 한계로 인해 실제 정밀궤도결정까지 수행하지는 못하고 초기궤도결정(IOD, Initial Orbit Determination)에 적용하거나, 시뮬레이션 데이터를 이용하여 전파 관측데이터의 바이어스(Bias) 추정을 위한 연구에 사용하기도 하였다⁽¹⁶⁾.

KARISMA도 우주물체에 대한 충돌위험 분석 및 자국의 운영위성을 보호하기 위해서는 이러한 외부 추적데이터를 처리할 수 있는 능력(Capability)을 가지고 있어야 하며, 참고문헌 [10]에서와 같이 레이더 관측데이터를 이용한 궤도결정 기능 및 성능을 확인한 바 있다.

본 논문에서는 실제 광학 관측데이터를 이용해서 정지궤도 위성의 정밀궤도결정을 수행하였다. 이를 위해서 유럽우주국(ESA, European Spa

ce Agency)의 도움으로 정지궤도상의 위성인 ARTEMIS에 대한 실제 광학 관측데이터를 확보하고, 해당 데이터를 처리하여 유럽우주기구의 궤도결정 결과와 비교를 수행하였다. 우주물체에 대한 충돌위험 분석을 위해서는 이와 같이 얻은 궤도결정 데이터를 바탕으로 정밀한 궤도예측이 이루어져야 한다. 따라서 본 논문에서는 제공받은 광학 관측데이터 중 일부를 이용하여 궤도결정을 수행한 후 궤도예측을 한 결과와 유럽우주기구에서 같이 제공해준 궤도결정 결과를 비교함으로써 궤도예측 기능에 대한 성능 분석 역시 수행하였다.

이를 위해 본 논문의 2.1절에서는 KARISMA의 정밀궤도결정 모듈인 ODTK에 대한 설명하고 있으며, 2.2절에서는 본 논문에서 처리하고자 하는 광학 관측데이터에 대해 기술하고 있다. 2.3절과 2.4절에서는 궤도결정을 위한 역학모델과 초기 궤도정보에 대해서 기술하고 있으며, 2.5절에서는 궤도결정을 수행한 후 얻은 결과를 유럽우주국의 궤도결정 결과와 비교·분석하였다.

II. 정밀궤도결정

2.1 KARISMA 정밀궤도결정 모듈

KARISMA는 개발자원 및 개발기간 감축을 위해 COTS(Commercial Off-The-Shell) 기반으로 설계·개발 되었다. 이러한 개발전략을 바탕으로 KARISMA의 정밀궤도결정 모듈은 AGI사에서 개발한 궤도결정 소프트웨어인 ODTK(Orbit Determination Tool Kit)를 사용하고 있으며, 이는 자사 소프트웨어인 STK(System Tool Kit)와 같은 궤도역학 모델과 적분기(integrator)를 사용함으로써 높은 신뢰도를 가지고 여러 분야에서 사용되고 있다⁽¹⁷⁾. ODTK는 1999년 AGI사에서 궤도결정기법에 대한 자료를 모으면서 "Mach 10"이라는 프로젝트로 시작되었다. 이후 2003년 10월에 상용소프트웨어인 STK/OD로 개발되면서 본격적인 서비스를 시작하였다. 네 번째 버전이 발표되면서 이름을 ODTK로 바꾸게 되었으며 현재는 6.3버전까지 개발되었다⁽¹⁷⁻¹⁹⁾. ODTK의 기반 알고리즘은 1981년 Wright에 의해 처음 제안된 이후 General Electric Company의 위성운용에 활용된 순차적 궤도결정(Sequential Orbit Determination) 방법을 사용하고 있다. 따라서 초기궤도 정보를 바탕으로 순차적으로 들어오는 관측데이터를 순차필터(Sequential Filter)기법을 이용하여 궤도결정을 수행하기 때문에 여타의 배치필터

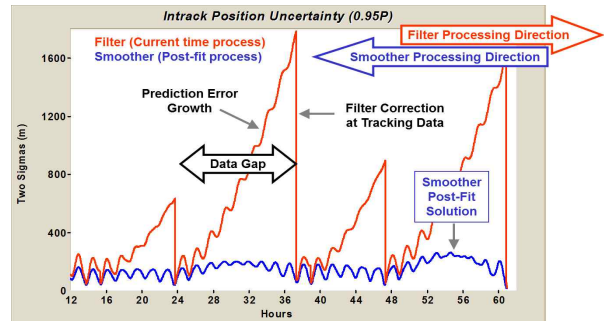


Fig. 3. Characteristic of filter and smoother⁽¹⁹⁾

의 결과와는 다소 상이한 특성을 가진다⁽⁹⁾. 일반적으로 최소자승법과 같은 일괄필터(Batch Filter)에서는 상태오차에 대한 적분과정의 프로세스 잡음(Process noise)을 백색잡음으로 가정하지만, 실제 궤도결정에서의 프로세스 잡음은 동역학 모델링 오차 및 관측 데이터 특성에 따라서 시간에 따른 연관관계(Correlation)를 가지게 된다. 따라서 ODTK에서는 순차필터를 적용함에 따라 이러한 프로세스 잡음에 의한 실질적 공분산(Realistic Covariance)을 계산해 준다. 이에 대한 수학적 기술은 부록 및 참고문헌 [20]에 자세히 기술되어 있다.

순차필터를 이용하여 실시간 궤도결정을 수행할 경우 시간이 지남에 따라 추정오차의 누적으로 인해 궤도오차가 증가하게 되며, 이러한 궤도오차를 줄이기 위해서 Fig. 3과 같이 스무더(Smoother)를 이용하여 보정을 해주는 과정을 병행하게 된다. 일반적으로 후처리 궤도결정을 위해 순차필터를 통해 전체 관측데이터를 처리한 후 고정시간 스무더(Fixed Interval Smoother)를 통해 역방향으로 궤도전파(Backward Propagation)를 하면서 오차 공분산(Error Covariance)을 줄여가는 과정을 거치게 된다. 또한, 실시간(Real time) 궤도결정을 위해 순차필터와 같이 관측데이터를 처리할 때마다 가변시간 스무더(Variable Lag Smoother)를 통해 오차 공분산을 줄여가는 기법을 제공하고 있으나, KARISMA에서는 실시간 궤도결정을 수행하지 않기 때문에 해당 기능을 사용하지 않는다. 고정시간 스무더에 대해서는 부록 및 참고문헌 [20]에 자세히 기술되어 있다.

KARISMA는 사용자의 입력을 최소화하면서 활용도를 높일 수 있도록 GUI(Graphic User Interface) 기반으로 개발되었고, 이를 통해 다양한 관측데이터를 처리하고 있다. 자국의 위성에 대해서는 GPS 항행해를 이용한 궤도결정을 수행하였으며⁽⁹⁾, 외부 관측소에 대해서는 레이더 데이터를 이용한 궤도결정을 수행함으로써⁽¹⁰⁾ KARISM

A의 궤도결정 기능 및 성능을 확인하였다.

2.2 광학 관측데이터

해외에서는 광학 관측데이터를 통한 우주물체 감시가 활발히 이루어지고 있다. 광학 관측데이터는 관측특성의 한계로 인해 주로 고고도 우주물체에 대한 관측에 활용된다. 또한 기상환경에 의한 영향으로 관측시간이 제한되며, 야간에만 관측이 가능한 단점이 있다. 이러한 한계점으로 인해 최근 국외에서는 여러 광학 관측소의 데이터를 공유함으로써 관측영역을 확대하고, 이를 통해 우주물체에 대한 감시체제를 구축하기 위한 노력이 이루어지고 있다. 대표적으로는 Fig. 4와 같이 여러 광학 관측소의 네트워크를 구성해서 데이터를 공유하는 ISON(International Scientific Optical Observation Network)⁽²¹⁾이 있다. 국내에서도 우주물체 감시를 위한 광학 관측소 개발이 진행 중이다⁽²²⁾.

KARISMA 시스템의 광학 관측데이터에 대한 궤도결정 성능확인을 위해서는 광학 관측데이터 뿐만 아니라 해당 데이터를 이용한 정밀궤도결정 데이터가 같이 제공되어야 기준 궤도결정 정보로

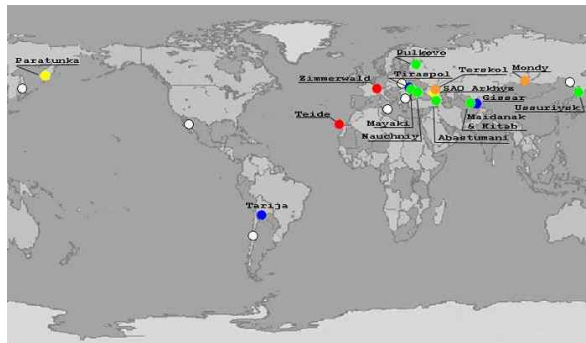


Fig. 4. International scientific optical observation network (ISON)⁽²¹⁾



Fig. 5. ESA's optical ground station (OGS) at the La Teide observatory, Tenerife⁽²³⁾

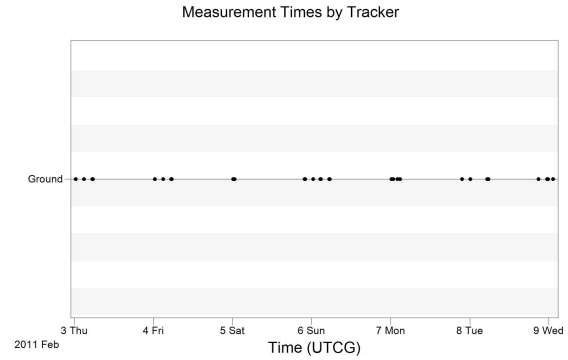


Fig. 6. Optical measurement time for ARTEMIS satellite from ESA OGS

활용하여 궤도결정 정밀도의 비교 분석이 가능하다. 이에 본 논문에서는 유럽우주기구의 협력을 통해 제공받은 실제 광학 관측데이터 및 해당 데이터를 이용한 정밀궤도결정 데이터를 바탕으로 KARISMA의 궤도결정 성능을 분석하였다.

유럽우주기구로부터 제공받은 광학 관측데이터는 Fig. 5와 같이 스페인 카나리(Canary) 제도에 위치한 작은 섬인 테네리페(Tenerife) 섬에 설치된 광학 관측소(OGS)⁽²³⁾로부터 얻은 실제 관측데이터로, 해당 경도에서 관측 가능한 정지궤도 위성인 ARTEMIS에 대한 실측 데이터이다. ARTEMIS에 대한 광학 관측 데이터의 관측시간 정보는 Fig. 6과 같이 2011년 2월 3일부터 2011년 2월 9일까지이며, 관측데이터 종류로 적경(Right Ascension)과 적위(Declination)에 대한 2개의 각도 정보만을 제공해 주고 있다. 유럽우주기구에서 제공한 광학 관측데이터에 대한 상세 관측정보는 Table 1에 정리하였다. 광학 관측의 특징인 야간 관측으로 인해 해당 데이터들은 비연속적으로 관측되었으며, 기상상황에 따라 하루에 3~5회 관측되었다. 전체 데이터는 178개의 데이터셋(data set)으로 구성되었으며, 유럽우주기구의 내부 데이터 포맷으로 작성되어 있다. 따라서, 해당 관측데이터를 KARISMA에서 처리하기 위해 표준 포맷인 GEOSC 파일 포맷으로 변환한 후 해당 데이터를 처리하였다.

2.3 정밀궤도결정을 위한 궤도역학 모델

본 논문에서 사용하고자 하는 광학 관측데이터의 관측 물체는 2001년 유럽우주기구에서 쏘아 올린 ARTEMIS 위성으로 동경 21.5°의 정지궤도에 운영중인 위성이다. 발사당시 위성의 무게는 3105kg이며, 태양전지판과 안테나를 펼쳤을 때의 위성의 크기는 4.8x25x8m로 알려져 있다^(24, 25). 이러한 정보를 바탕으로 정밀궤도결정을 위한 위

Table 1. Optical observation data of ARTEMIS

Pass #	Observation Time (UTCG)		Observation Data #
1	2011/2/3	00:19:17.71446 ~ 00:29:03.71676	8
2		02:50:00.71517 ~ 02:59:46.71306	10
3		05:23:02.71636 ~ 05:32:48.71417	10
4	2011/2/4	00:21:05.71325 ~ 00:29:49.71517	8
5		02:51:59.71579 ~ 03:02:16.71357	12
6		05:21:25.71344 ~ 05:30:40.71542	8
7	2011/2/5	00:10:33.71643 ~ 00:12:45.71749	7
8		00:34:35.81503 ~ 00:37:09.81560	8
9		21:51:49.71648 ~ 22:01:35.71403	10
10	2011/2/6	00:25:09.51263 ~ 00:27:44.51319	6
11		02:35:47.71268 ~ 02:45:02.71448	8
12		05:20:12.72013 ~ 05:29:58.71646	10
13	2011/2/7	00:12:27.42436 ~ 00:13:33.41565	4
14		00:45:54.71582 ~ 00:48:06.71636	7
15		02:01:33.71355 ~ 02:03:45.71400	7
16	2011/2/8	02:49:38.71971 ~ 02:52:12.71527	8
17		21:38:50.71274 ~ 21:39:34.71289	3
18		00:08:42.91457 ~ 00:10:32.91499	6
19	2011/2/9	05:16:05.01366 ~ 05:39:37.51292	14
20		20:49:55.81343 ~ 20:52:07.81406	7
21		23:24:32.71561 ~ 23:45:50.71625	9
22	2011/2/9	01:13:57.71637 ~ 01:16:31.71253	8

성모델을 적절히 구성하여야 한다.

정밀궤도결정 결과는 역학모델의 설정에 따라 다소 차이를 보일 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 유럽우주기구에서 사용한 역학모델을 동일하게 적용하였으며, 그 세부 정보는 Table 2에 기재하였다. 먼저 중력장 모델로는 JGM3모델⁽²⁶⁾의 30차항까지 사용하였으며, 지구 대기항력은 정지

Table 2. Force model for orbit determination of ARTEMIS

SSC Number	26863
Gravity Model	JGM3 (30x30)
Solar Radiational Pressure Coefficient	1.1
Third Body Model	Sun, Moon, Pluto and 7 planets (JPL Planetary Ephemeris 421)
Satellite Section Area	35.1435 m ²
Satellite Mass	3105 kg

궤도 위성에 대해서는 거의 영향이 없기 때문에 사용하지 않았다. 제3체에 의한 중력장 효과는 태양과 달, 명왕성 및 7개의 태양계 행성을 고려하였으며, 이들 천체에 대한 천문력(ephemeris)은 JPL의 천문력 중에서 DE421 행성 천문력⁽²⁷⁾을 사용하였다. 위성 질량은 3105kg, 태양복사압에 대한 유효단면적은 35.1435m²로 유럽우주기구의 위성모델과 동일하게 설정하였다.

역학모델을 이용한 적분은 STK에서 일반적으로 사용하고 있는 RKF(Runge-Kutta-Fehlberg)7(8) 적분기를 사용하였으며, 적분간격은 30초로 설정하였다.

2.4 정밀궤도결정을 위한 초기궤도 설정

일반적으로 궤도결정 과정은 사용자가 입력한 초기궤도 정보를 관측데이터와 비교하여 얻은 관측잔차를 바탕으로 초기궤도를 수정하면서 관측잔차를 줄여가는 과정이다. 궤도결정 방식에 따라 주어진 초기궤도 조건을 업데이트하는 방식이 다르지만, 실제 궤도와 차이가 큰 초기궤도는 궤도결정의 정확도에 영향을 주며, 경우에 따라서는 궤도결정 결과가 수렴하지 못하기도 한다. 초기궤도 정보는 기존의 궤도결정 정보를 바탕으로

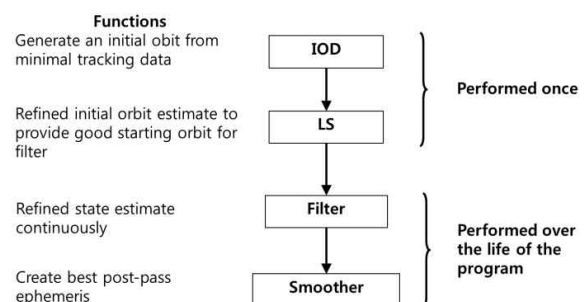


Fig. 7. Orbit determination flow⁽¹⁷⁾

입력할 수 있으나, 처음 관측되는 물체에 대해서는 초기궤도결정(IOD, Initial Orbit Determination) 및 최소자승법(LS, Least Square methode) 등의 방법을 통해 초기궤도 정보를 계산하기도 한다. Fig. 7은 이러한 초기궤도 정보 계산 및 필터와 스무더의 프로그램 흐름을 보여주고 있다.

KARISMA는 자국의 위성과 충돌위험을 갖는 우주물체에 대해서만 고려를 하고 있으며, 이러한 우주물체에 대한 대략적인 궤도 정보는 JSpOC에서 CSM의 형태로 제공해주고 있다. 따라서 KARISMA는 CSM으로부터 초기궤도 정보를 불러오는 기능이 갖추고 있다. 하지만 본 논문에서 이용하고 있는 광학 관측데이터의 경우 과거 관측데이터이며, 해당 기간의 충돌위험에 대한 CSM 데이터가 존재하지 않기 때문에 초기궤도 조건을 CSM으로부터 획득하기가 불가능하다. 초기

궤도결정과 최소자승법의 과정을 통해 유럽우주기구에서 제공받은 광학 관측데이터 처리를 위한 초기궤도 조건을 계산하는 것이 가능하지만, 이는 궤도결정의 정확도에 영향을 준다. 본 논문에서는 KARISMA의 정상적인 궤도결정 성능을 분석하고자 하기 때문에, 유럽우주기구에서 제공한 궤도결정 데이터에서 한 지점(Epoch Time)의 궤도정보를 추출하여 Table 3과 같이 초기궤도 조건을 설정하였다. 실제 광학 관측데이터는 2011년 2월 3일부터인 반면 유럽우주기구로부터 받은 궤도결정 정보는 2011년 2월 4일부터이기 때문에 초기궤도로 2011년 2월 4일 0시의 데이터를 사용하였다. 참고로 해당 초기궤도 조건에 대한 불확실성(Orbit Uncertainty) 등에 대한 조건들은 OD TK의 기본 설정(default) 값(Radial 50m, In-Track 100m, Cross-Track 20m, 1 σ)을 사용하였다.

Table 3. Initial orbit conditions of the KARISMA orbit determination for the ESA optical tracking data

Epoch Time	2011/02/04-00:00:00
Coordinate System	J2000
X Position (km)	-37805.115463
Y Position (km)	17523.693874
Z Position (km)	6526.292529
X Velocity (km/s)	-1.297699472
Y Velocity (km/s)	-2.786308438
Z Velocity (km/s)	-0.032458524

2.5 정밀궤도결정 결과 분석

앞에서 설정한 역학모델, 위성모델 및 초기궤도 조건을 바탕으로 KARISMA를 통해 유럽우주기구의 광학 관측데이터에 대한 정밀궤도결정을 수행하였으며, 다음과 같은 결과를 얻었다.

먼저 관측데이터에 대한 처리 결과로 Fig. 8과 같이 정밀궤도결정 후 해당 관측데이터의 관측잔차(Measurement Residual)에 대한 그래프를 얻을 수 있었다. 이 그래프는 관측데이터와 궤도결정을 수행해서 얻은 궤도데이터를 비교하여 얻은 관측잔차를 표준편차를 기준으로 표시한 그래프

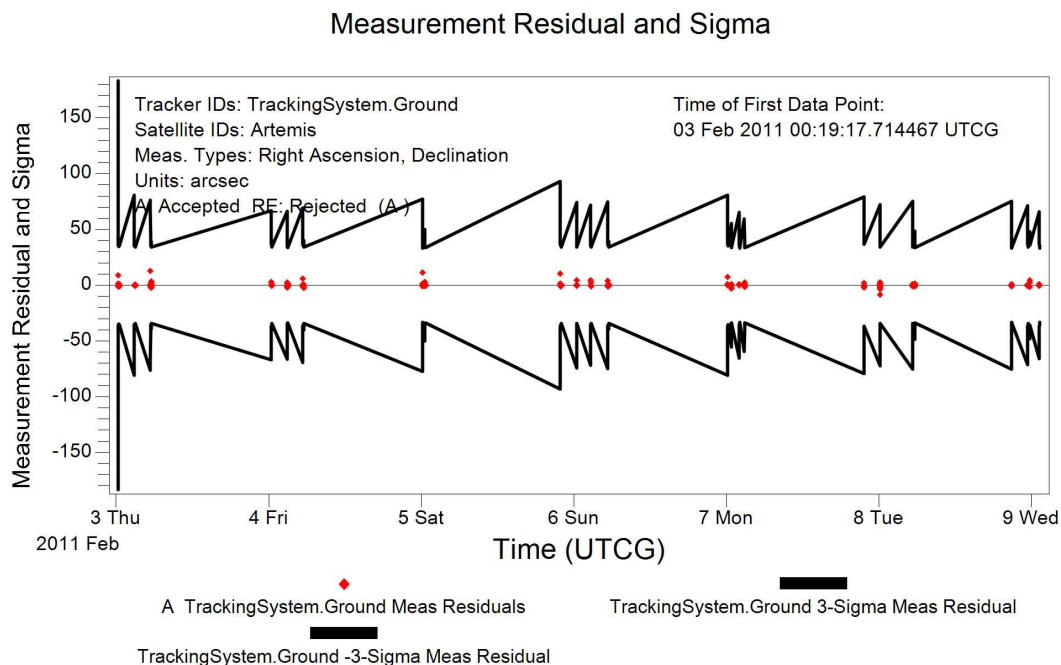


Fig. 8. Measurement Residual of orbit determination result in sigma scale from KARISMA

Table 4. Measurement residual summary report for ARTEMIS optical tracking data

	Mean $(\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j \sum)$	RMS $(RMS_0 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j^2})$	RMS about Mean $(RMS_\mu = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (R_j - \mu)^2})$
Right Ascension (arcsec)	-0.1700	0.8646	0.8477
Declination (arcsec)	0.3626	2.2112	2.1813

Position Uncertainty (0.99P)

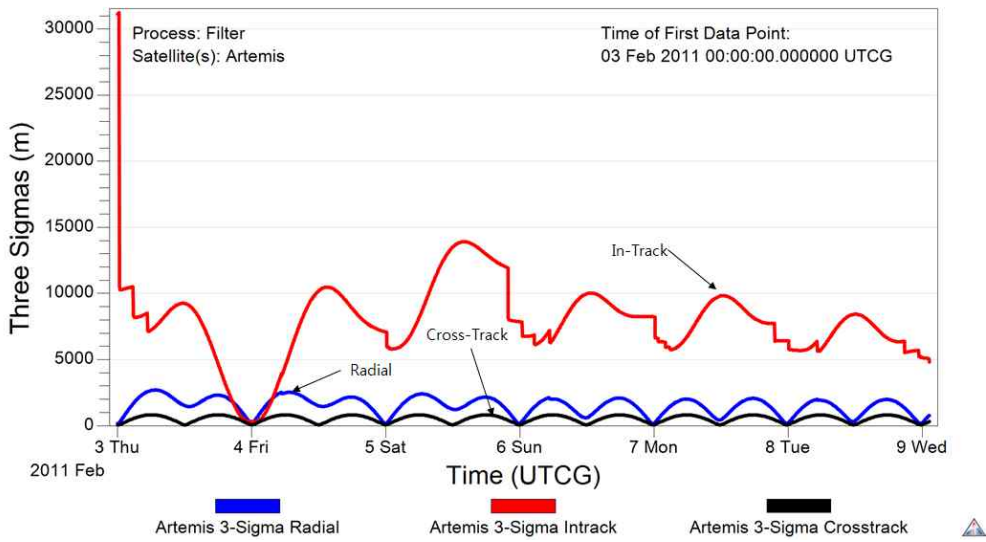


Fig. 9. Position uncertainty of the filter result from KARISMA

Position Uncertainty (0.99P)

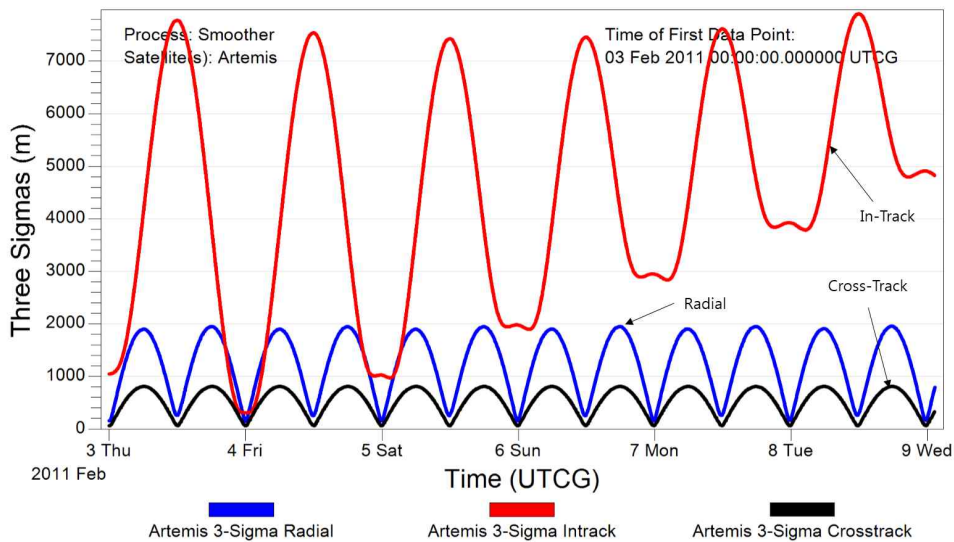


Fig. 10. Position uncertainty of smoother result from KARISMA

로 전체 관측구간에 대해 궤도결정 결과의 관측 잔차가 3σ안에 들어움을 확인할 수 있다. 이는 모든 관측데이터가 정상적으로 처리되고 그 결과가

상당히 신뢰할 수 있음을 의미한다. 이러한 관측 잔차를 정량적으로 분석하기 위해 관측잔차에 대한 평균(mean)과 RMS(Root Mean Square) 및

관측잔차 평균에 대한 RMS(표준편차)를 Table 7에 나타내었다. 이 표에서 확인할 수 있듯이 전체적인 관측잔차의 평균이 1 arcsec 이하이며, RMS 역시 3 arcsec 이하의 정밀함을 보여준다. 이는 약 36,000km 상공의 정지궤도 위성임을 감안할 때 대략 100~600m 수준의 정밀도로 환산될 수 있다.

다음으로 필터 및 스무더의 처리 결과에 대한 위치 불확실성(Position Uncertainty)을 Fig. 9~10과 같이 계산할 수 있었다. 해당 그래프의 결과는 3σ 에 대한 값으로 필터의 경우 초기의 높은 위치 불확실성이 관측데이터를 처리하면서 줄어들었다가 다음 관측데이터가 들어올 때까지 다시 증가하는 모습을 반복적으로 볼 수 있다. 또한, 관측데이터가 없는 동안에도 대략 10km 수준을 유지하는 것을 확인할 수 있으며, 이러한 불확실성이 시간이 지남에 따라 점점 줄어드는 경향을 볼 수 있다. 이와 같은 위치 불확실성은 순차필터를 통해 궤도결정을 수행하는 과정에서 같이 계산하는 공분산 정보를 의미한다. 광학 관측데이터가 Fig. 5와 같이 불연속적이기 때문에 공분산 역시 해당 관측데이터가 존재할 때 낮아졌다가 관측데이터가 없는 시간구간에 대해서는 증가하는 형태를 반복하면서 시간이 지남에 따라 수렴하면서 줄어드는 것을 살펴볼 수 있다. 이 경우 속도방향(In-track)에 비해 거리방향(Radial)과 법선방향(Cross-track)의 경향은 관측데이터가 없는 중간지점에서 크게 낮아지는 것을 확인할 수 있다. 일반적으로 궤도결정에서 작용하는 오차성분은 Fig. 11과 같이 크게 관측오차와 역학모델 오차로 구성될 수 있다. 관측오차가 상대적으로 적은 거리방향과 법선방향에 대해서는 관측데이터 사이의 시간동안 오차특성이 Fig. 11과 같이 변화하기 때문에 오차 공분산 정보는 중간지점에서 감소를 하는 형태를 취하지만, 관측오차가 큰 속도방향의 경우 전체 오차성분이 관측오차와 유사하게 되기 때문에 관측데이터가 존재할 때 오

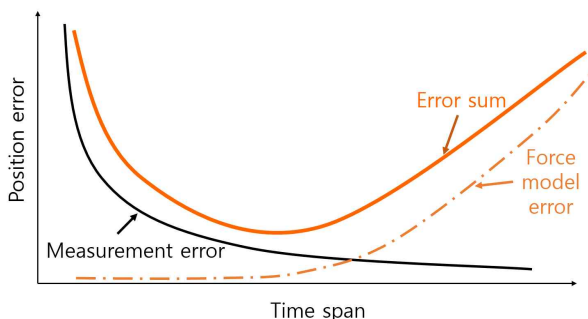


Fig. 11. Position error of orbit determination⁽¹⁷⁾

차 공분산이 최소가 되게 된다.

스무더는 모든 관측데이터에 대해 필터를 수행한 후 적용되며, Fig. 3에서와 같이 최종 관측데이터로부터 시작해서 필터와 반대 방향으로 스무딩 과정을 수행하면서 위치 불확실성을 줄여나가게 된다. 따라서 필터를 수행한 후 스무더를 이용하게 되면 Fig. 10과 같이 일주일 동안의 위치 불확실성이 8km 이내로 줄어드는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 스무더의 경우 해당 관측데이터가 늘어남에도 불구하고 시간이 지남에 따라 In-track 방향의 최소값이 점점 증가하는 경향을 보이고 있다. 이는 필터가 전체 시간영역에 대해 수행된 후 해당 시간영역의 역방향으로 스무더가 진행하면서 필터 데이터를 스무딩(Smoothing)하는 과정에서 시작과 끝의 위치가 바뀌면서 전체 시간영역에서 필터와 반대의 특성으로 최소값이 점점 증가하는 것처럼 나타나게 되는 것이다. 이러한 스무더의 경우에도 관측데이터가 존재하는 구간에서는 스무더의 공분산에 따른 위치 불확실성이 5km이내인 반면 관측데이터가 존재하지 않는 시간구간에 대해서는 공분산 정보가 지속적으로 증가하면서 대략 8km까지 증가하는 양상을 확인할 수 있다. 이와 같은 위치 불확실성은 참고문헌 [12]와 같이 광학 관측데이터를 이용한 정지궤도의 우주물체에 대한 궤도결정 결과와 비슷한 수준임을 확인할 수 있었다.

다음으로 유럽우주기구에서 광학 관측데이터와 같이 제공한 정밀궤도결정 데이터를 기준으로 KARISMA에서 수행한 정밀궤도결정 정보를 RIC (Radial, In-track, Cross-track) 방향에 따른 위치 오차로 Fig. 12와 같이 표현하였다. 이 그래프에서 "Range"는 두 궤도결정 데이터 사이의 3차원 위치오차(relative distance)를 의미한다. 확장 칼만필터 기반의 순차필터를 사용하는 KARISMA에 비해 유럽우주기구 정밀궤도결정 시스템은 Levenberg Marquardt 방식의 비선형 일괄필터를 사용한다. 따라서 이러한 궤도결정 방식 및 역학모델 등의 차이로 인해 유럽우주기구에서 제공한 정밀궤도결정 결과와 KARISMA에서 수행한 정밀궤도결정 결과 사이에 다소 차이가 존재하기는 하지만 기준 데이터와 비교하였을 때 위치 오차가 최대 1km 이내임을 확인할 수 있었다. 이러한 궤도오차는 관측데이터가 들어올 때마다 낮아져서 궤도결정 시스템의 양끝 효과(일반적으로 일괄필터의 경우 관측잔차에 대한 그래프가 U자형 커브를 그리는 특성이 있다⁽⁹⁾). 따라서 관측잔차가 궤도결정 결과의 양끝(시작부분과 끝부분)에서 큰 차이를 보이게 된다.)를 고려하면 10

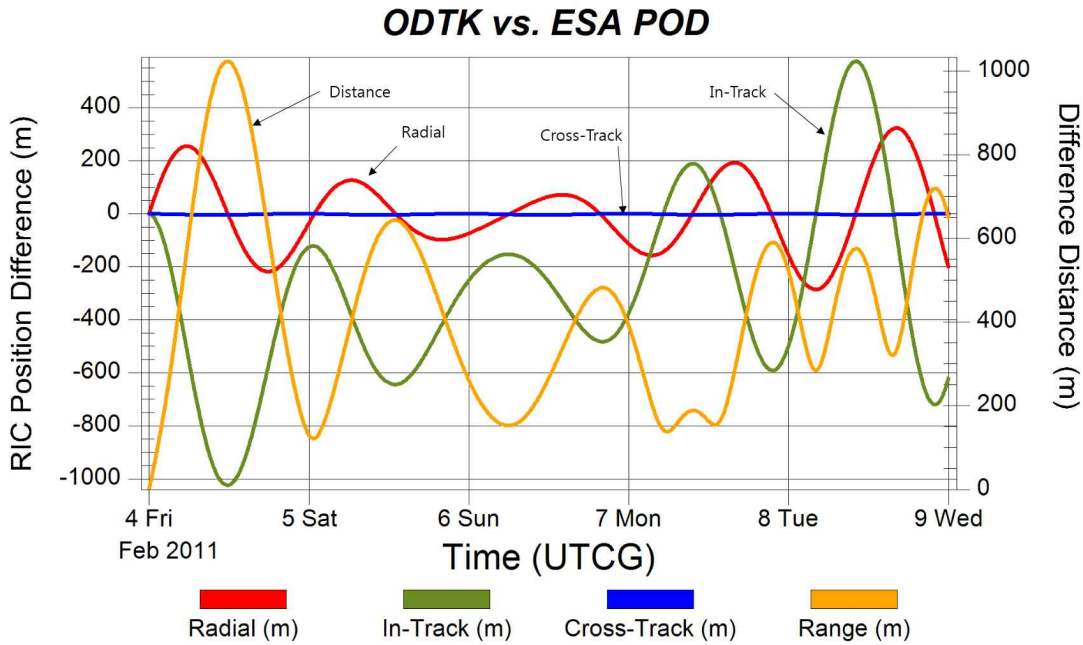


Fig. 12. Position difference between ESA POD data and KARISMA POD data

Table 5. Position difference summary report between ESA POD data and KARISMA POD data for ARTEMIS optical tracking data

	Mean $(\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j \Sigma)$	RMS $(RMS_0 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j^2})$	RMS about Mean $(RMS_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (R_j - \mu)^2})$
Radial (m)	3.4800	144.5832	144.5413
In-Track (m)	-300.7267	456.9167	344.0005
Cross-Track (m)	-1.7063	1.5990	2.3385
Range (m)	424.5216	479.2522	222.4053

0~500m 수준의 차이만을 보인다. 또한, 이 그래프에서 확인할 수 있는 것과 마찬가지로 일반적 U자형 커브를 그리는 특성이 있다⁽⁹⁾. 따라서 관측잔차가 궤도결정 결과의 양끝(시작부분과 끝부분)에서 큰 차이를 보이게 된다.)를 고려하면 100~500m 수준의 차이만을 보인다. 또한, 이 그래프에서 확인할 수 있는 것과 마찬가지로 일반적인 궤도결정 결과의 오차가 In-Track 방향으로 가장 심한 것을 확인할 수 있는데, 이는 관측시간 오차 등의 영향 때문이다⁽¹²⁾. 또한, 광학 관측데이터의 경우 거리(Radial) 방향의 관측 정보를 제공해주고 있지 못하기 때문에 거리방향의 오차가 상대적으로 크다. 이러한 궤도결정 결과에 대한 차이를 정량적으로 분석하기 위해, 해당 위치 오차에 대한 평균과 RMS 오차 및 표준편차를 계산한 결과를 Table 5에 정리하였다. 이 표에서 확인할 수 있듯이 전체적인 위치오차는 주로 접선방향(In-track)에서 발생하며, 평균 오차가 약 4

20m, RMS 오차가 대략 480m 정도이다. 이러한 오차는 앞에서 설명한 바와 같이 정밀궤도결정 방식 및 역학모델의 설정에 따라 차이를 보일 수 있으며, 정지궤도에 운용 중인 천리안위성의 전파 관측데이터를 이용한 궤도결정 정밀도가 1.5km m(3σ)⁽²⁸⁾임을 감안하면 상당히 유사한 수준으로 볼 수 있다.

마지막으로 궤도결정 결과에 대한 궤도예측 성능을 살펴보았다. 일반적으로 인공위성의 운영 및 우주파편에 대한 충돌 위험분석의 경우 궤도결정 결과를 바탕으로 한 궤도예측 결과가 활용된다. 따라서 이러한 궤도예측 성능 역시 분석이 필요하며, KARISMA는 궤도결정 과정에서 궤도예측 옵션을 통해 궤도예측 과정을 동시에 수행하는 것이 가능하다. 이는 궤도결정을 수행한 후 해당 역학 모델 정보들을 바탕으로 사용자가 지정한 시간까지 궤도전파를 수행하는 방식이다. 따라서 KARISMA의 궤도예측 성능 분석을 위해

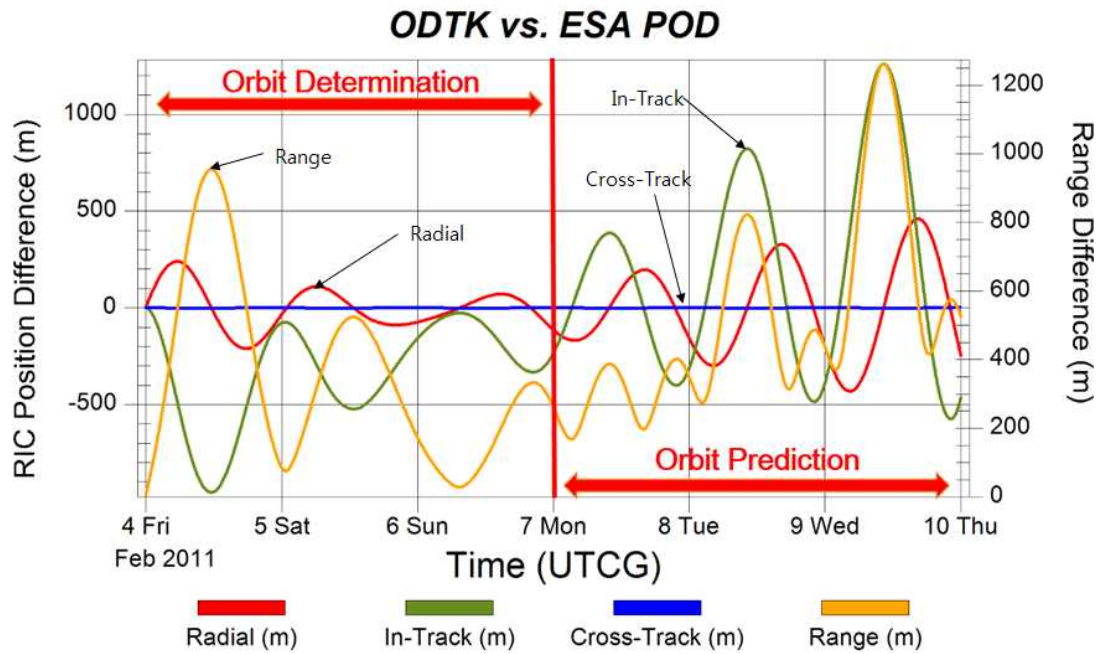


Fig. 13. Orbit prediction result by using optical tracking data and KARISMA

Table 6. Position difference summary report between ESA POD data and KARISMA OP data for ARTEMIS optical tracking data

	Mean $(\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j \sum)$	RMS $(RMS_0 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j^2})$	RMS about Mean $(RMS_\mu = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (R_j - \mu)^2})$
Radial (m)	1.0760	236.6578	236.6553
In-Track (m)	189.6613	535.3259	500.6021
Cross-Track (m)	-1.5546	2.2826	1.6713
Range (m)	514.7194	585.3084	278.6573

서 관측데이터를 나눠서 2011년 2월 3일 0시부터 2011년 2월 7일 0시까지의 관측데이터를 이용해서 궤도결정을 수행하고, 그 결과를 바탕으로 2011년 2월 10일 0시까지 궤도예측을 수행해서 해당 결과를 유럽우주기구의 궤도결정 결과와 비교하였다. 그 결과 Fig. 13과 같이 RIC 방향의 오차 그래프를 얻을 수 있었으며, 해당 결과에 대한 정량적 데이터 분석은 Table 6과 같다. 이 그래프에서 살펴보는 바와 같이 3일간의 궤도예측 기간 동안 오차가 지속적으로 증가하며, 3일째에 최대 1.3km 수준까지 증가하는 것을 볼 수 있었으며, 대략적인 위치오차는 500~600m 수준임을 확인할 수 있었다. 이러한 궤도예측 정보는 궤도예측 기간의 증가에 따라 더욱더 증가될 수 있으나, 통상적으로 우주물체에 대한 충돌위험 분석이 충돌예상 시점으로부터 3일전에 시작되는 것을 감안할 때 신뢰도 있는 수준의 정보를 제공해 준다고 볼 수 있다.

따라서 이와 같은 결과들을 통해 KARISMA의 광학 관측데이터에 대한 궤도결정 및 궤도예측 성능이 우주과편에 대한 충돌위험 분석을 위해 사용될 수 있음을 확인해 볼 수 있었다.

III. 결 론

우주과편으로부터 자국의 위성을 보호하기 위한 시스템 구축을 위해, 항우연은 KARISMA를 통해 다양한 종류의 관측데이터를 처리하고 해당 데이터에 대한 신뢰도 있는 결과를 산출하기 위해 노력하고 있다. 본 논문에서는 이러한 노력의 일환으로 유럽우주기구의 협조로 획득한 정지궤도 위성의 실제 광학 관측데이터를 KARISMA를 통해 처리하고 그 결과를 분석하였다. 광학 관측데이터의 특성으로 인해 약 6일정도의 기간 동안 획득한 총 178개의 불연속적인 광학 관측데이터를 처리한 결과 1 arcsec 이하의 평균 관측잔차

를 가지는 궤도결정을 수행하였으며, 유럽우주기구에서 제공해준 정밀궤도결정 결과와 비교했을 때 약 420m 정도의 차이를 보임으로써 유사한 수준의 궤도결정 성능을 가짐을 확인할 수 있었다. 또한, 실제 운용에 필요한 궤도예측의 성능 역시 3일 동안 500~600m 수준을 유지하는 것을 확인할 수 있었다. 이와 같은 궤도결정 및 궤도예측 성능을 통해 KARISMA가 추구했던 실제 운용중인 궤도결정 시스템과 유사한 성능을 보임을 확인할 수 있었다. 향후에는 앞으로 KARISMA를 통해 여러 우주물체에 대한 광학 관측데이터 처리 및 비교·분석을 지속적으로 수행할 예정이며, 이를 바탕으로 KARISMA의 안정성 및 신뢰성을 높이고자 한다.

후 기

본 연구는 기초기술연구회 'NAP 우주물체 전자광학 감시체계'의 협동연구과제(우주과편 충돌 위험 종합관리시스템 개발 및 우주과편 제거시스템 연구)의 일부로 수행되었으며, 이에 기초기술연구회와 한국항공우주연구원의 지원에 감사드립니다.

References

- 1) Rossi, A., Alessi, E. M. and Valsecchi, G. B., "Space debris threats," *1st SPARC Workshop*, 2013
- 2) *Orbital Debris - Quarterly News*, Vol. 15, Issue 1, 2011 (<http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/newsletter/pdfs/ODQNv15i1.pdf>)
- 3) Kelso, T. S., "Analysis of the Iridium 33 Cosmos 2251 Collision," *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, 2009.
- 4) Kim, H.-D., Jung, O.-C., Kim, E.-K., Kim, H.-J. and Bang, H.-C., "A conjunction analysis between KOMPSAT spacecraft and LEO debris," *Proc. of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences(in Korean)*, Apr. 2007, pp. 609-612.
- 5) Kim, E. H., Kim, H. D. and Kim, H. J., "A Study on the Collision Avoidance Maneuver Optimization with Multiple Space Debris," *Journal of Astronomy and Space Sciences*, Vol. 29, No. 1, 2009, pp. 11~21.
- 6) Kim, E.-H., Kim, H.-D., Kim, E.-G. and Kim, H.-J., "Analysis of collision avoidance maneuver frequency for the KOMPSAT-2 and KOMPSAT-5," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences(in Korean)*, Vol. 39, No. 11, Nov. 2011, pp. 1033-1041.
- 7) Kim, H.-D., Kim, E.-H., Eom, W.-S., Kim E.-K. and Kim, H.-J., "Conceptual design of a space debris collision risk management system," *Proc. of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences(in Korean)*, Nov. 2011, pp. 543-546.
- 8) Kim, H.-D., Lee, S.-C., Cho, D.-H. and Seong, J.-D., "Development of KARI Space Debris Collision Risk Management System," *Proc. of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences (in Korean)*, Apr. 2013, pp. 773-776.
- 9) Cho, D.-H. and Kim, H.-D., "A Comparison of Orbit Determination Performance for the KOMPSAT-2 using Batch Filter and Sequential Filter," *Aerospace Engineering and Technology*, Vol. 11, No. 2, 2012, pp. 149~157.
- 10) Cho, D.-H., Kim, H.-D. and Lee, S.-C., "Analysis of the KARISMA Orbit Determination Performance for the Radar Tracking Data," *Aerospace Engineering and Technology*, Vol. 12, No. 2, 2013, pp. 123~130.
- 11) Stansbery, G., Liou, J.-C., Mulrooney, M. and Horstman, M., "Current and Near-Term Future Measurements of the Orbital Debris Environment at NASA," *33rd Annual AAS Guidance and Control Conference*, 2009.
- 12) Vallado, D. A. and Agapov, V., "Orbit Determination Results from Optical Measurements," *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, 2010, AIAA 2010-7525.
- 13) Milani, A., Tommei, G., Farnocchia, D., Rossi, A., Schildknecht, T., and Jehn, R. "Orbit determination of space objects based on sparse optical data," arXiv preprint arXiv:1012.5232, 2010.
- 14) Lee, W.-K., Lim, H.-C., Park P.-H., Youn, J.-H., Yim, H.-S. and Moon, H.-K., "Orbit Determination of GPS and KOREASAT 2 Satellite Using Angle-only data and Requirements for Optical Tracking System," *Journal of Astronomy and Space Sciences*, Vol.21, No.3, 2004, pp.221~232.
- 15) Choi, J., Kim, B.-Y., Yim, H.-S., Chang,

H.-Y., Yoon, J.-N., Kim, M.-J. and Hwang, O.-J., "Orbit Determination Using Angle-Only Data for MEO & GEO Satellite and Obsolete," *Journal of Astronomy and Space Sciences*, Vol. 26, No. 1, 2009, pp.111~126.

16) Hwang, Y., Lee, B.-S. and Kim, J., "Single Station Azimuth Bias Estimation Using Angle-Only Data," *Proc. of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences(in Korean)*, Nov. 2010, pp.977~980.

17) ODTK Training Material, AGI.

18) ODTK-A Technical Summary, AGI, 2007

19) Vallado, D. A., Hujsak, R. S., Johnson, T. M., Seago, J. H. and Woodburn, J. W., "Orbit Determination using ODTK Version 6," European Space Astronomy Center, 2010.

20) Wright, J. R. et al, *Orbit Determination Tool Kit*, AGI, 2013

21) Agapov, V. and Molotov, I. "International scientific optical observation network (ISON) for the near-Earth space surveillance - results of the first years of work and plans for the future," COPUOS STSC, 2008.

22) Park, S.-Y., Keum, K.-H., Lee, S.-W., Jin, H., Park, Y.-S., Yim, H.-S., Jo, J. H., Moon, H.-K., Bae, Y.-H., Choi, J., Choi, Y.-J., Park, J.-H. and Lee, J.-H. "Development of a Data Reduction algorithm for Optical Wide Field Patrol." *Journal of Astronomy and Space Science*, Vol. 30, No. 3, 2013, pp. 193~206.

23) <http://sci.esa.int/sre-fi/36520-optical-ground-station/>

24) http://space.skyrocket.de/doc_sdat/artemis.htm

25) <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/a/artemis>

26) Tapley, B. D., Watkins, M. M., Ries, J. C., Davis, G. W., Eanes, R. J., Poole, S. R., Rim, H. J., Schutz, B. E., Shum, C. K., Nerem R. S., Lerch F. J., Marshall J. A., Kiosko S. M., Pavlis N. K. and Williamson R. G., "The Joint Gravity Model 3," *Journal of Geophysical Research:Solid Earth*, Vol. 101, Issue B12, 1996, pp. 28029~28049.

27) Folkner, W. M., Williams, J. G. and Boggs, D. H., "The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421" *IPN Progress Report* Vol. 42, Issue 178, 2009.

28) Hwang, Y., Lee, B., Kim, H., Kim, H., and Kim, J., "Orbit Determination Accuracy Improvement for Geostationary Satellite with Single Station Antenna Tracking Data," *ETRI Journal*, Vol. 30, No. 6, 2008, pp. 774~782.

부 록

1. 상태 추정 오차 모델 (State Estimated Error Model)

ODTK에서 사용하고 있는 순차필터는 다음과 같이 상태오차에 대한 선형미분 방정식을 사용한다.

$$\frac{d}{dt}\delta X(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta u(t) \quad (1)$$

여기서, $\delta X(t)$ 는 상태오차를 의미하며, $\delta u(t)$ 는 프로세스 오차를 의미한다. 일괄필터에서는 프로세스 오차가 가우시안 랜덤오차(Gaussian random error)로 표현되지만, 순차필터의 경우 가우시안 랜덤오차에 중력, 항력, 태양복사압 등에 대한 모델링 오차(Modeling Error)를 포함하고 있기 때문에 순차적인 연관관계(Serial correlation)을 가지고 있다.

이에 식(1)에 대한 표현은 다음과 같이 적분형으로 표현이 가능하다.

$$\delta X(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\delta X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)\delta u(\tau)d\tau \quad (2)$$

2. 상태오차 공분산 (State Error Covariance)

ODTK에서는 상태오차 및 상태오차에 대한 공분산 정보(P)를 위해 시간에 따라 적분을 수행하며 다음과 같이 전파(Propagation) 가능하다.

$$P_{k+1|k} = \Phi(t_{k+1}, t_k)P_{k|k}\Phi(t_{k+1}, t_k)^T + P_{k+1, k} \quad (3)$$

$$P_{k+1, k} = I_{k+1, k}^C + I_{k+1, k}^L + I_{k+1, k}^R$$

여기서, $I_{k+1, k}^C$, $I_{k+1, k}^L$, $I_{k+1, k}^R$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$I_{k+1, k}^C = \iint_{t_k}^{t_{k+1}} H(t_{k+1}, \tau)E\{\delta u(\tau)\delta u^T(\tau)H^T(t_{k+1}, \tau)\}d\tau dt$$

$$I_{k+1, k}^L = \Phi(t_{k+1}, t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\{\delta X(t_{k+1}|t)\delta u^T(t)\}H^T(t_{k+1}, t)dt$$

$$I_{k+1, k}^R = \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(t_{k+1}, \tau)E\{\delta u(\tau)\delta X^T(t_{k+1}|\tau)\}d\tau\Phi^T(t_{k+1}, t_k)$$

$$H(t, \tau) = \Phi(t, \tau)B(\tau)$$

식(3)의 $P_{k+1, k}$ 은 프로세스 잡음에 대한 공분산(Process noise covariance)으로 최소자승법에 서는 프로세스 잡음(Process noise)을 백색잡음으로 간주하기 때문에 0으로 가정한다. 하지만 실제 궤도결정에서의 프로세스 잡음은 궤도운동에 따른 동역학 모델과 관측장비 특성 및 시간에 따른 상호 연관관계(Correlation)를 가지고 있다. 이에 대한 자세한 동역학 모델링 오차에 대해서는 참고문헌 (21)에서 자세히 기술하고 있다.

3. 관측데이터 갱신(Measurement Update)

ODTK에서는 관측데이터(y)의 불연속에 따른 관측오차 분산행렬(R)을 다음과 같이 계산한다. 이 때, 관측데이터의 최종시간을 t_k 로 가정한다.

$$\begin{aligned} \Delta y_{k+1} &= y_{k+1} - y(\hat{X}_{k+1|k}) \\ H_{k+1} &= \left[\frac{\partial y(X)}{\partial X} \right]_{\hat{X}_{k+1|k}} \\ \tilde{R}_{k+1} &= H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1} \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 상첨자 ‘^’은 적분에 의한 상태 추정값을 의미하며, ‘~’는 관측데이터가 존재하는 시간에 대한 상태 추정값을 의미한다. 즉, $\hat{X}_{k+1|k}$ 은 관측데이터가 들어오기 직전의 추정값을 이용한 현재의 상태추정 값을 의미하고, 이를 바탕으로 관측데이터가 들어온 현재 시점의 관측오차 분산행렬 \tilde{R}_{k+1} 을 계산할 수 있다.

여기서 관측데이터에 대한 에디팅(editing)은 다음과 같은 과정으로 이루어진다.

$$\begin{aligned} \text{If } |\Delta y_{k+1}| < C\sqrt{\tilde{R}_{k+1}}, \text{ Continue} \\ K_{k+1} &= \frac{P_{k+1|k} H_{k+1}^T}{\tilde{R}_{k+1}} \\ \tilde{X}_{k+1|k+1} &= \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1} \Delta y_{k+1} \\ P_{k+1|k+1} &= (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k} \\ \text{Else discard } y_{k+1}, \text{ acquire } y_{k+2}, k+1 \rightarrow k+2 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 상수 C 는 사용자가 지정하는 에디팅 크기로 일반적으로 3으로 설정한다. 따라서 위의 식(5)와 같은 과정을 통해 현재 시점에서의 상태 추정($\tilde{X}_{k+1|k+1}$)이 가능하다.

4. 고정시간 스무더 (Fixed Interval Sequential Smoother)

ODTK에서 사용하고 있는 고정시간 스무더는 순차필터의 최종 결과를 다음과 같이 초기값으로 가지고 시간의 역방향으로 전파를 한다.

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{L|L} &= \hat{X}_{L|L} \\ \tilde{P}_{L|L} &= \hat{P}_{L|L} \end{aligned}$$

여기서 상첨자 ‘^’는 필터를 통해 획득한 추정값을 의미하고, ‘~’는 스무더를 통한 추정값을 의미한다. 하첨자 L 은 최종시간을 의미한다.

이와 같은 초기값을 이용해서 다음과 같이 스무더에 의한 상태 추정 및 공분산 행렬이 계산된다.

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k|L} &= \hat{X}_{k|k} \\ &+ \hat{P}_{k|k} \left[\hat{P}_{k|k} + \hat{\Phi}_{k+1, k}^{-1} \hat{P}_{k+1, k} \left(\hat{\Phi}_{k+1, k}^{-1} \right)^T \right]^{-1} \left[\phi_k(\tilde{X}_{k+1|L}) - \hat{X}_{k|k} \right] \\ \tilde{P}_{k|L} &= \hat{P}_{k|k} + A_{k, k+1} \left[\tilde{P}_{k+1|L} - \hat{P}_{k+1|k} \right] A_{k, k+1}^T \end{aligned}$$

$$A_{k, k+1} = \hat{P}_{k|k} \hat{\Phi}_{k+1, k}^T \hat{P}_{k+1|k}^{-1}$$