

## 공간의존 파론도 게임의 협력 효과<sup>†</sup>

이지연<sup>1</sup>

<sup>1</sup>영남대학교 통계학과

접수 2014년 6월 4일, 수정 2014년 6월 27일, 게재확정 2014년 7월 3일

### 요약

파론도 역설은 개별로는 지는 게임들이 결합하여 이기게 되거나 개별로는 이기는 게임들이 결합하여 지게 되는 역설적인 현상을 말한다. 여러 명의 게임자들이 둘러앉아 게임을 진행할 때, 임의로 선택된 게임자 본인의 과거 실적에 의해 승패 확률이 정해지는 경우와 게임자의 양옆에 있는 다른 게임자들의 실적에 의해 승패 확률이 정해지는 경우를 비교한다. 게임자들의 수와 승패 확률에 의해 계산되는 기대상금을 비교하여 협력에 의한 파론도 효과가 존재함을 확인한다.

주요용어: 공간의존 파론도 게임, 과거의존 파론도 게임, 기대상금, 마코프 체인, 정상확률, 파론도 효과.

### 1. 서론

파론도 역설 (Parrondo paradox)은 스페인의 물리학자 파론도 (Juan M. R. Parrondo)가 소개한 동전 던지기 게임에서 유래하였다 (Parrondo, 1996). 게임 A는 앞면이 나올 확률이  $\frac{1}{2} - \epsilon$ 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 게임자는 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 B는 게임자가 현재 가지고 있는 누적 상금이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이  $\frac{1}{10} - \epsilon$ 인 나쁜 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이  $\frac{3}{4} - \epsilon$ 인 좋은 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 그러면 게임 A는  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ 에 대해 지는 게임이 되고, 게임 B는  $0 < \epsilon < \frac{1}{10}$ 에 대해 지는 게임이 된다. 즉, 게임 A와 게임 B는 한 시행에서 얻어지는 점근적 기대상금이 음수가 되어 시행을 계속할 수록 누적되는 기대상금이 점점  $-\infty$ 에 가까워지는 지는 게임이 된다. 반면에 매 시행에서 두 게임 A와 B 중 하나를 임의로 선택하여 진행하거나 또는 일정한 규칙에 의해 주기적으로 두 게임을 반복해서 진행하면 시행당 점근적 기대상금이 양수가 되는  $\epsilon > 0$ 이 존재하여 결국 이기게 되는 역설적인 결과를 얻게 된다. 이런 역설적인 현상을 파론도 효과 (Parrondo effect)라고 한다. 이와 반대로, 음수인  $\epsilon < 0$ 을 고려하면 각각 이기는 두 게임을 결합하여 지는 게임이 되는 역 파론도 효과 (reverse Parrondo effect)를 얻을 수 있다. 이 게임에서 유래하여 두 시스템이 결합하여 원래의 특성과 다른 특성을 갖는 새로운 시스템이 되는 역설적인 현상을 파론도 역설이라고 한다 (Harmer과 Abbott, 2002).

파론도가 처음 제안한 게임은 게임자의 현재 누적 상금에 따라 게임 B의 동전이 결정되기 때문에 원금의존 파론도 게임 (capital-dependent Parrondo game)이라고 부른다. Parrondo 등 (2000)은 원금의존 파론도 게임을 변형하여 게임자의 과거 시행 결과에 따라 게임 B의 동전이 결정되는 과거의존 파론도 게임 (history-dependent Parrondo game)을 소개하였는데, 직전의 두 번의 시행 결과에 따라 현

<sup>†</sup> 이 논문은 2013년도 정부 (미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업 (No. 2013R1A1A3A04007670).

<sup>1</sup> (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leejy@yu.ac.kr

재 시행에서 사용될 동전이 결정되어 그 승패 확률이 정해지는 게임이다. 과거의존 파론도 게임에서도 확률 모수의 범위에 따라 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재함이 여러 연구자들에 의해 확인되었다 (Ethier와 Lee, 2009; Lee, 2011). 원금의존 파론도 게임과 과거의존 파론도 게임은 기본적으로 한 명의 게임자에 의해 진행되는 게임이다. 반면에 Toral (2001)의 공간의존 파론도 게임 (space-dependent Parrondo game)은 여러 명의 게임자들이 모여 함께 진행하는 게임이다. 여러 명의 게임자들 중 한 명의 게임자를 임의로 선택하고, 선택된 게임자의 양옆에 있는 다른 게임자들의 최근 시행 결과에 의해 게임  $B$ 의 동전이 결정된다. 즉, 주변 게임자들의 시행 결과에 의해 본인의 승패 확률이 정해지는 경우로서 전체 게임자들의 수와 확률 모수의 값에 따라 파론도 현상이 존재함을 부분적으로 관찰하였다 (Lee, 2009; Ethier와 Lee, 2012).

본 논문에서는 여러 명의 게임자들이 둘러앉아 함께 게임을 진행할 때, 임의로 선택된 게임자 본인의 직전 과거 2번의 시행 결과에 의해 승패 확률이 결정되는 과거의존 파론도 게임과 임의로 선택된 게임자의 양 옆에 있는 다른 게임자들의 최근 시행 결과에 의해 승패 확률이 결정되는 공간의존 파론도 게임을 비교한다. 각 경우에서 계산되는 기대상금을 통해, 여러 게임자들의 협력으로 진행되는 공간의존 파론도 게임의 기대상금은 양수로서 이기는 게임이 되는 반면에 홀로 진행되는 과거의존 파론도 게임의 기대상금은 음수가 되어 지는 게임이 되는 승패 확률의 범위가 존재함을 확인한다. 이로서 기존의 파론도 효과는 두 게임을 임의적으로 결합하거나 주기적으로 반복할 때 생겨났지만 이처럼 여러 게임자들의 협력에 의해 기존의 성향이 반대로 바뀌는 파론도 현상이 나타날 수 있음을 보임으로써 파론도 현상의 발생 범위를 확대하는 의미를 가진다.

$N$ 명의 게임자들 중에서 한 명의 게임자를 임의로 선택해서 그를 게임자  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )라고 하자. 과거의존 파론도 게임  $B_1$ 는 앞면이 나올 확률이 각각  $p_0, p_1, p_2, p_3$ 인 4개의 동전을 사용한다. 게임자  $i$ 의 직전의 두 번의 시행 결과가 패-패 (각각 패-승, 승-패, 승-승)이면 앞면이 나올 확률이  $p_0$  (각각  $p_1, p_2, p_3$ )인 동전을 던진다. 다만, 첫 시행을 위한 직전 결과는 패-패, 패-승, 승-패, 승-승 중에서 동일한 확률  $1/4$ 로 하나를 정하는 것으로 가정한다. 공간의존 파론도게임  $B_2$ 에서는 임의로 선택된 게임자  $i$ 의 양옆 게임자  $i-1$ 과  $i+1$ 의 상태가 패-패이면  $p_0$  동전을, 게임자  $i-1$ 는 패, 게임자  $i+1$ 는 승이면  $p_1$  동전을, 게임자  $i-1$ 는 승, 게임자  $i+1$ 는 패이면  $p_2$  동전을, 양옆 게임자  $i-1$ 과  $i+1$  모두 승이면  $p_3$  동전을 사용한다. 즉, 양옆 게임자들의 상태에 따라 본인이 현재 시행에서 사용할 동전이 달라진다. 여기서도 첫 시행을 위한 상태는 패-패, 패-승, 승-패, 승-승 중에서 동일한 확률  $1/4$ 로 하나를 정하는 것으로 가정한다. 두 게임 모두, 게임자  $i$ 가 게임을 한 후 앞면이 나오면 1원을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면 1원을 잃어 패의 상태가 되며, 이 상태는 게임자  $i$ 가 다시 게임을 하게 될 때까지 유지된다. 만약 모든 확률모수에 대해  $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$ 이면 두 게임  $B_1$ 과  $B_2$ 는 동일한 게임이 되고 공정한 게임으로서 그 기대상금은 항상 0이다.

파론도 효과의 존재를 확인하기 위해서 Ethier와 Lee (2009)는 마코프 체인에 의해 진행되는 게임의 궁극적인 기대상금의 강대수의 법칙 (strong law of large numbers)을 아래와 같이 유도하였다.

**정리 1.1 (Ethier와 Lee, 2009)** 유한 상태공간  $\Sigma$ 에서 정의되는 분할불가 (irreducible)이고 비주기적 (aperiodic) 마코프 체인  $\{X_n, n \geq 0\}$ 의 전이확률행렬 (transition probability matrix)과 정상확률 분포 (stationary distribution)를 각각  $\mathbf{P}$ 와  $\boldsymbol{\pi}$ 라고 하자. 함수  $w : \Sigma \times \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ 로 상금행렬 (payoff matrix)  $\mathbf{W} = (w(i, j))_{i, j \in \Sigma}$ 을 나타내고, 모든  $n$ 에 대해  $\xi_n := w(X_{n-1}, X_n)$ 이고  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ 로 정의하면  $S_n$ 은  $n$ 번의 시행 후의 누적 상금이 된다.  $(i, j)$ 의 요소가  $P(i, j)w(i, j)$ 인 행렬을  $\dot{\mathbf{P}}$ 라고 하고, 열벡터  $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ 라고 두면,

$$\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1}$$

은 임의의 초기상태  $X_0$ 에 대해

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ a.s.}$$

을 만족한다.

## 2. 과거의존 파론도 게임

$N = 1$ 일 때의 과거의존 파론도 게임  $B_1$ 에서 연이은 두 시행에서의 결과인 패-패, 패-승, 승-패, 승-승을 각각 상태 0, 1, 2, 3으로 나타내면, 게임은 상태 공간  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ 에서 정의되고 전이확률행렬

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1-p_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

인 마코프 체인으로 모형화 할 수 있다 (Cho와 Lee, 2012a). 더불어  $0 < p_i < 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ 이므로 이 마코프 체인은 분할불가이고 비주기적이다. 또한 상금행렬  $\mathbf{W}$ 은

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

로 나타낼 수 있다. 게임  $B_1$ 의 정상확률분포  $\boldsymbol{\pi}$ 는  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ 와  $\boldsymbol{\pi}\mathbf{1} = 1$ 을 만족하기 때문에  $i = 0, 1, 2, 3$ 에 대해  $q_i := 1 - p_i$ 를 이용하면,

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{p_0p_1 + 2p_0q_3 + q_2q_3} (q_2q_3, p_0q_3, p_0q_3, p_0p_1)$$

로 나타낼 수 있다. 그러므로 게임  $B_1$ 의 시행당 기대상금은

$$\begin{aligned} \mu &= \boldsymbol{\pi}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{1} \\ &= \frac{p_0p_1 - q_2q_3}{p_0p_1 + 2p_0q_3 + q_2q_3} \end{aligned} \quad (2.1)$$

이다.

일반적인  $N > 1$ 에 대해서는  $N$ 명 전체의 게임자들에 대한  $n$ 번의 시행 후의 게임자당 상금  $\xi_n$ 는 각 게임자  $i$ 의 상금  $\xi_{n,i}$ 에 대해

$$\xi_n = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_{n,i}}{N}$$

가 된다. 그러므로  $N$ 명 전체의 게임자들에 대해 얻어지는 게임자당 기대상금은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\xi_m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^N \frac{\xi_{m,i}}{nN} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\xi_{m,i}}{n} \right) = \mu \text{ a.s.}$$

로 (2.1)와 일치한다. 비록 여러 명의 게임자들이 있지만 게임자당 기대상금은 개별적으로 진행되는 게임과 결국 동일하다.

### 3. 공간의존 파론도 게임

$N$ 명의 게임자들이 둘러앉아 공간의존 파론도 게임을 진행하는 경우를 살펴보자. Ethier와 Lee (2012)는  $3 \leq N \leq 19$ 에 대해 몇개의 특별한 확률값  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$ 에 대해 시행당 기대상금을 계산하여 파론도 효과가 존재함을 확인하였다. 더불어 역 파론도 효과가 대칭적으로 존재함을 증명하였다.

공간의존 파론도 게임의 확률모형은  $N$ 명의 게임자들의 각 상태를 패 혹은 승 즉, 0 또는 1로 나타내어 상태공간  $\{0, 1\}^N := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, N\}$ 에서 정의되는 마코프 체인으로 나타낼 수 있다.  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 에 대해

$$m_i(\mathbf{x}) := 2x_{i-1} + x_{i+1}$$

라 두면,  $m_i(\mathbf{x})$ 는 게임자  $i-1$ 의 상태  $x_{i-1}$ 와 게임자  $i+1$ 의 상태  $x_{i+1}$ 에 의해  $\{0, 1, 2, 3\}$ 의 정수값 중 하나를 갖게 된다.  $N$ 명의 게임자들이 둘러앉기 때문에  $x_0 := x_N$ 이고  $x_{N+1} := x_1$ 이다. 따라서 게임  $B_2$ 의 전이확률행렬  $\mathbf{P}$ 은, 전체 게임자들의 수  $N$ 과 확률  $p_0, p_1, p_2, p_3$ 에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012). 모든  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ 와  $i = 1, \dots, N$ 에 대해

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}^i) &= \begin{cases} N^{-1}p_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ N^{-1}q_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases} \\ P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= N^{-1} \left[ \sum_{i: x_i=0} q_{m_i(\mathbf{x})} + \sum_{i: x_i=1} p_{m_i(\mathbf{x})} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

그 외의 경우에는  $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 이다. 여기서 벡터  $\mathbf{x}^i$ 는 벡터  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 와 나머지는 모두 동일하고  $i$ 번째 요소  $x_i$ 의 값만 차이가 나는 것으로서  $\mathbf{x}^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ 이다. 그리고  $q_m := 1 - p_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ 이다.

게임  $B_2$ 의 상금행렬  $\mathbf{W} = (w(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ 는 모든  $\mathbf{x} \in \Sigma$ 와  $j = 1, \dots, N$ 에 대해

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}^i) &= \begin{cases} +1 & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ -1 & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases} \\ w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \begin{cases} -1 & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ +1 & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases} \end{aligned}$$

그 외의 경우에는  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 이다. 만약 모든  $m = 0, 1, 2, 3$ 에 대해  $0 < p_m < 1$ 이면 이 마코프 체인은 분할불가이고 비주기적이므로 유일한 정상확률분포  $\boldsymbol{\pi}$ 가 존재한다. 따라서 기대상금  $\mu$ 는

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j(\mathbf{x})} - q_{m_j(\mathbf{x})}] \\ &= \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

으로 계산된다 (Ethier와 Lee, 2012). 여기서  $\mathbf{1}$ 는 크기가  $2^N$ 인 열벡터  $(1, 1, \dots, 1)^T$ 이고,  $\dot{\mathbf{P}}$ 는  $\mathbf{P}$ 의 각 요소에 있는  $q_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$  대신에  $-q_m$ 을 대입하여 얻은 행렬이다.

한편, 이 확률모형은 게임자들의 위치가 시계방향으로 회전을 하여도 그 전이확률이 변하지 않는 특성을 가진다. 그러므로 다음의 정리를 적용하면 기존의 마코프 체인의 상태 공간을 축소하여 더 간단하게 기대상금을 계산할 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012).

**정리 3.1 (Ethier와 Lee, 2012)**  $G$ 를 대칭군 (symmetric group)의 부분집합이라 하고,  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^N$ 와  $\sigma \in G$ 에 대해서  $\mathbf{x}_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \in G$ 라고 하자. 전이확률행렬  $\mathbf{P}$ 과 정상확률분포  $\boldsymbol{\pi}$ 를 갖는 마코프 체인이 모든  $\sigma \in G$ 와  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ 에 대해

$$P(\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{y}_\sigma) = P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

이면

$$\pi(\mathbf{x}_\sigma) = \pi(\mathbf{x})$$

이 성립한다.  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_\sigma$ 가 되는  $\sigma \in G$ 가 존재하면,  $\mathbf{x}$ 와  $\mathbf{y}$ 는 동치 (equivalent)가 되고  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ 로 나타내며  $\mathbf{x}$ 를 포함하는 동치류 (equivalence class)는  $[\mathbf{x}]$ 로 표현한다. 그러면 동치류들의 공간  $\{0, 1\}^N/\sim$ 에서 정의되는 마코프 체인의 전이확률행렬은

$$\bar{P}([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) := \sum_{\mathbf{y}' : \mathbf{y}' \sim \mathbf{y}} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = \sum_{\sigma \in G: \text{다른 } \mathbf{y}_\sigma} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}_\sigma)$$

이며,  $\bar{P}$ 의 정상확률분포  $\bar{\pi}$ 가 존재하여  $\pi(\mathbf{x}) = \bar{\pi}([\mathbf{x}])/|\mathbf{x}|$ 를 만족한다. 단,  $|\mathbf{x}|$ 는 동치류  $[\mathbf{x}]$ 의 크기이다.

게임  $B_2$ 의 전이확률 (3.1)은  $G$ 가  $(1, 2, \dots, N)$ 의 순환치환 (cyclic permutations)의 집합일 때 정리 3.1를 적용할 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012). 따라서 (3.2)의 기대상금  $\mu$ 는

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{[\mathbf{x}] \in \{0, 1\}^N/\sim} \bar{\pi}([\mathbf{x}]) \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j([\mathbf{x}])} - q_{m_j([\mathbf{x}])}] \\ &= \bar{\pi} \dot{\bar{P}} \bar{\mathbf{1}} \end{aligned}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서  $\dot{\bar{P}}$ 는  $\bar{P}$ 의 각 요소에 있는  $q_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$  대신에  $-q_m$ 을 대입하여 얻는 행렬로서  $\dot{\bar{P}} = \bar{P}$ 이며  $\bar{\mathbf{1}}$ 는  $\{0, 1\}^N/\sim$ 에서 정의되는 열벡터  $(1, 1, \dots, 1)^T$ 이다.

이 결과를  $N = 2$ 에 적용하면, 먼저 상태공간은  $\{0, 1\}^2 := \{00, 01, 10, 11\}$ 로 4개의 상태가 존재하고 각 상태에 대해  $p_0$ 와  $p_3$ 의 확률만 가능하여 공간의존 파론도 게임  $B_2$ 의 전이확률행렬은

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2q_0 & p_0 & p_0 & 0 \\ q_0 & p_0 + q_3 & 0 & p_3 \\ q_0 & 0 & p_0 + q_3 & p_3 \\ 0 & q_3 & q_3 & 2p_3 \end{pmatrix}$$

로 얻어진다. 따라서 정상확률  $\boldsymbol{\pi}$ 은

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{p_0 + q_3} (q_0 q_3, p_0 q_3, p_0 q_3, p_0 p_3)$$

이고 그 기대상금은

$$\mu = \frac{p_0 - q_3}{p_0 + q_3}$$

가 된다.

만약  $N = 3$ 이면, 상태공간  $\{0, 1\}^3 := \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ 의 8개의 상태가 존재하고, 공간의존 파론도 게임  $B_2$ 의 전이확률행렬은

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3q_0 & p_0 & p_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ q_0 & p_0 + q_1 + q_2 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ q_0 & 0 & p_0 + q_1 + q_2 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & q_1 & q_2 & p_1 + p_2 + q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ q_0 & 0 & 0 & 0 & p_0 + q_1 + q_2 & p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & q_1 & p_1 + p_2 + q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & p_1 + p_2 + q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & q_3 & q_3 & 3p_3 \end{pmatrix}$$

이 된다 (Cho와 Lee, 2012b). 한편, 이 마코프 체인들은 위의 정리 3.1에 의해 상태공간을 동치류들의 공간으로 축소시킬 수 있다. 즉, 기존의 8개의 상태로 구성된 상태공간을 4개의 동치류

$$\bar{0} = \{000\}, \quad \bar{1} = \{001, 010, 100\}, \quad \bar{2} = \{011, 101, 110\}, \quad \bar{3} = \{111\}$$

으로 나타낼 수 있다. 그러므로  $\{0, 1\}^3 / \sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ 에서 정의되는

$$\bar{P} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3q_0 & 3p_0 & 0 & 0 \\ q_0 & p_0 + q_1 + q_2 & p_1 + p_2 & 0 \\ 0 & q_1 + q_2 & p_1 + p_2 + q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 3q_3 & 3p_3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

로 전이확률행렬을 축소할 수 있다. 그러면 게임  $B_2$ 의 축소된 정상확률분포  $\bar{\pi}$ 는

$$\bar{\pi} = \frac{1}{p_0(p_1 + p_2) + 4p_0q_3 + q_3(q_1 + q_2)} (q_0q_3(q_1 + q_2), 3p_0q_3(q_1 + q_2), 3p_0q_3(p_1 + p_2), p_0p_3(p_1 + p_2))$$

로 계산되어 게임  $B_2$ 의 시행당 기대상금  $\mu$ 는

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{\pi} \bar{P} \bar{1} \\ &= \frac{p_0(p_1 + p_2) - q_3(q_1 + q_2)}{p_0(p_1 + p_2) + 4p_0q_3 + q_3(q_1 + q_2)} \end{aligned}$$

로 얻어진다 (Cho와 Lee, 2012b). 복잡하지만 유사한 과정을 통해  $N \geq 4$ 에서의 기대상금을 계산할 수 있다.

#### 4. 비교

이 장에서는 앞서 얻어진 두 게임  $B_1$ 과  $B_2$ 의 기대상금을 각각  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 라 두고,  $p_1 = p_2$ 일 때 비교하고자 한다. 먼저  $N = 2$ 인 경우는

$$\mu_2 - \mu_1 = \frac{2p_0q_3(p_0 - 2p_1 + p_3)}{(p_0 + q_3)(p_0p_1 + 2p_0q_3 + q_1q_3)} > 0$$

로 얻어져서  $p_0 + p_3 > 2p_1$ 의 범위에서 공간의존 파론도 게임  $B_2$ 의 기대상금  $\mu_2$ 가 과거의존 파론도 게임  $B_1$ 의 기대상금  $\mu_1$ 보다 항상 높다. 더불어  $\mu_2 > 0$ 이고  $\mu_1 < 0$ 인 영역인  $p_0 > p_3$ 이고  $p_0p_1 < q_1q_3$ 인 범위에서는 공간의존 파론도 게임  $B_2$ 의 기대상금  $\mu_2$ 는 항상 양수이고 과거의존 파론도 게임  $B_1$ 의 기대

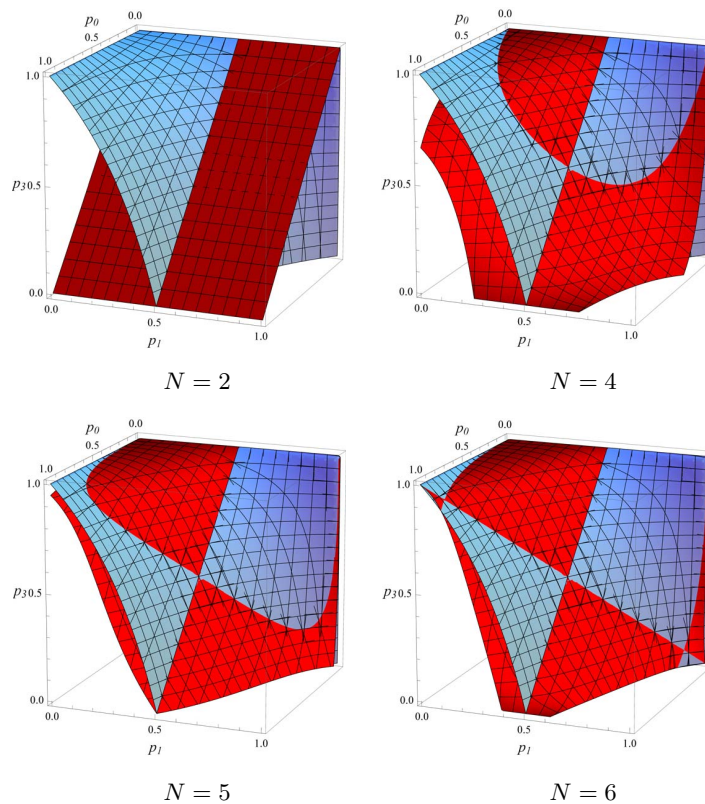
상금  $\mu_1$ 은 항상 음수가 되어 협력으로 인해 기대상금이 향상될 수 있는 영역이 된다. 이 영역을 Figure 4.1에 나타내었는데,  $N = 2$ 에서 파란색 (밝은 색) 곡면은  $\mu_1 = 0$ 인 영역이고 빨간색 (어두운 색) 곡면은  $\mu_2 = 0$ 인 영역으로 파란색 (밝은 색) 곡면의 아래쪽이고 빨간색 (어두운 색) 곡면의 위쪽에 해당되는 영역이다.

$N = 3$ 인 경우는

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{p_0 p_1 - q_1 q_3}{p_0 p_1 + 2p_0 p_3 + q_1 q_3}$$

로 두 게임이 모든 확률의 영역에서 동일한 기대상금을 가진다.

$N = 4, 5, 6$ 인 경우는 Figure 4.1에서와 같이 파란색 (밝은 색) 곡면은  $\mu_1 = 0$ 인 영역이고 빨간색 (어두운 색) 곡면은  $\mu_2 = 0$ 인 영역으로 파란색 (밝은 색) 곡면의 아래쪽이면서 빨간색 (어두운 색) 곡면의 위쪽에 해당되는 영역에서 공간의존 파론도 게임의 협력 효과를 갖게 된다.



**Figure 4.1** When  $p_1 = p_2$ , the blue (or light) surface is the surface  $\mu_1 = 0$  for the history-dependent Parrondo game, and the red (or dark) surface is the surface  $\mu_2 = 0$  for the space-dependent Parrondo game with the same parameters  $p_0, p_1, p_3$ , all in the  $(p_0, p_1, p_3)$  unit cube.

Table 4.1에는 확률  $p_0 = 9/10, p_1 = p_2 = 3/10, p_3 = 3/5$ 에 대한 두 게임  $B_1$ 과  $B_2$ 의 기대상금  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 을 나타내었다. 기대상금이 음수로 동일한  $N = 3$ 의 경우를 제외한 나머지의 경우에서  $\mu_1 < 0$ 이고  $\mu_2 > 0$ 가 되어 과거의존 파론도 게임에서는 기대상금이 음수인 반면에 공간의존 파론도 게임에서는 기대상금이 양수가 되는 확률 영역에 해당된다.

**Table 4.1** Expected profits  $\mu_1$  and  $\mu_2$  with  
 $p_0 = 9/10, p_1 = p_2 = 3/10, p_3 = 3/5$

$N$	$\mu_1$	$\mu_2$
2	-0.0078740	0.3846154
3	-0.0078740	-0.0078740
4	-0.0078740	0.0664632
5	-0.0078740	0.0386967
6	-0.0078740	0.0395292
7	-0.0078740	0.0410894
8	-0.0078740	0.0407998
9	-0.0078740	0.0407808
10	-0.0078740	0.0407995
11	-0.0078740	0.0407962
12	-0.0078740	0.0407960

## References

- Cho, D. and Lee, J. (2012a). Parrondo paradox and stock investment. *Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 543–552.
- Cho, D. and Lee, J. (2012b). Spatially dependent Parrondo games and stock investments. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 867–880.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827–1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2012). Parrondo games with spatial dependence. *Fluctuation and Noise Letters*, **11**, 1250004.
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, R71–R107.
- Lee, J. (2009). Optimal strategies for collective Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 973–982.
- Lee, J. (2011). Paradox in collective history-dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 631–641.
- Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician? In *the Workshop of the EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, ISI, Torino, Italy.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226–5229.
- Toral, R. (2001). Cooperative Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*, **1**, 7–12.



# Cooperative effect in space-dependent Parrondo games<sup>†</sup>

Jiyeon Lee<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Yeungnam University

Received 4 June 2014, revised 27 June 2014, accepted 3 July 2014

## Abstract

Parrondo paradox is the counter-intuitive situation where individually losing games can combine to win or individually winning games can combine to lose. In this paper, we compare the history-dependent Parrondo games and the space-dependent Parrondo games played cooperatively by the multiple players. We show that there is a probability region where the history-dependent Parrondo game is a losing game whereas the space-dependent Parrondo game is a winning game.

*Keywords:* Expected profits, history-dependent Parrond games, Markov chains, Parrondo effects, space-dependent Parrondo games, stationary distriburions.

---

<sup>†</sup> This work was supported by the Basic Science Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT & Future Planning (No. 2013R1A1A3A04007670).

<sup>1</sup> Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea.  
E-mail: [leejy@yu.ac.kr](mailto:leejy@yu.ac.kr)