Journal of the Korean Society of Civil Engineers
Vol. 34, No. 4: 1043-1052/ August, 2014
DOI: http://dx.doi.org/10.12652/Ksce.2014.34.4.1043

ISSN 1015-6348 (Print)
ISSN 2287-934X (Online)
www.kscejournal.or.kr

Structural Engineering **구조공학**

마제형 원호 아치의 면내 자유진동

이병구* · 오상진** · 이태은***
Lee, Byoung Koo*, Oh, Sang Jin**, Lee, Tae Eun***

In-plane Free Vibrations of Horseshoe Circular Arch

ABSTRACT

This paper deals with in-plane free vibrations of the horseshoe circular arch. Simultaneous ordinary differential equations governing free vibration of the arch are derived with respect to the radial and tangential deformations. Particularly, differential equations are obtained under the arc length coordinate rather than the angular one in order to extend the horseshoe arch whose subtended angle is greater than π radians. The differential equations are numerically solved for calculating the natural frequencies accompanying with the corresponding mode shapes. In parametric studies, effects of the rotatory inertia, slenderness ratio and circumferential arc length ratio on frequency parameters are extensively discussed.

Key words : Horseshoe arch, Circular arch, In-plane free vibration, Arc length coordinate, Natural frequency, Mode shape

초 록

이 연구는 마제형 원호 아치의 면내 저유진동에 관한 연구이다. 마제형 아치의 면내 자유진동을 지배하는 연립 상미분방정식을 곡률중심 및 접선방향의 변위에 대하여 유도하였다. 특히 지배미분방정식은 반원보다 큰 중심각을 갖는 마제형 아치에 적용하기 위하여 각좌표보다는 곡선거리좌표에 관한 미분방정식으로 유도하였다. 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 변수연구를 통하여 회전관성, 세장비, 곡선길이비가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다.

검색어 : 마제형 아치, 원호 아치, 면내 자유진동, 곡선거리좌표, 고유진동수, 진동형

1. 서 론

아치는 구조적으로 이상적일뿐만 아니라 미관이 아름답기 때문에 보, 기둥, 케이블, 평판 등과 더불어 구조물의 하중을 지지하는 뼈대구조로 이용되고 있다. 아치는 기원전 고대의 석조 아치로부터 현대의 장대지간 교량에 이르기까지 토목, 건축공학은 물론이고 기계, 선박, 항공 공학 분야에서 다양한 시공사례들을 볼 수 있다.

아치를 포함하는 구조물의 고유한 성질 중에 하나인 자유진동은 풍하중, 차량 하중 등과 같은 동적 하중이 작용하는 구조물의 안정성에 영향을 미치는 요소 중에 하나이다.

아치의 자유진동에 관한 연구는 지난 수십 년간 많은 연구들이 수행되어왔다. 아치의 자유진동해석은 먼저 지배미분방정식을 유도하고 이를 풀어서 고유진동수와 진동형을 산정하고 이를 아치구조 설계 또는 안정성 해석에 동적 기초자료로 사용한다. 아치의 자유진동과 관련된 연구주제를 몇 개로 분류하여 대표적인 연구결과들을 살펴보면 다음과 같다.

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 명예교수 (Wonkwang University · bkleest@wku.ac.kr)
** 전남도립대학교 토목환경과 교수 (Jeonnam Provincial College · sjoh@dorip.ac.kr)
*** 정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 (**Corresponding Author** · Wonkwang University · telee@wku.ac.kr)

Received December 30, 2013/ **revised** March 19, 2014/ **accepted** April 26, 2014

Copyright ⓒ 2014 by the Korean Society of Civil Engineers
This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

먼저, 구조물의 자유진동해는 정확형태해와 개략해로 나눌 수 있다. 정확형태해는 변위의 진동형을 적당한 대수함수로 가정하여 지배미분방정식을 해석적 방법으로 풀어 고유진동수를 산정한다. 아치의 자유진동에 관한 정확형태해의 논문은 Huang et al. (1998), Tufekci and Ozdemir (2006), Lü and Lü (2009) 등이 연구하였다. 개략해는 지배미분방정식을 직접 수치적분하여 변위의 진동형을 산정하고 고유진동수는 비선형 방정식을 이용하여 산정하는 수치해석적 방법으로, 여기에 해당하는 연구로는 Joo et al. (1985), Malekzadeh et al. (2008), Shin et al. (2008)의 논문들이 있다.

적절한 아치 선형의 선택은 자유진동 해석에서 무엇보다 중요하며, 원호(Tufekci and Ozdemir, 2006), 포물선(Joo et al., 1985), 타원(Nieh et al., 2003), 정현(Lee and Wilson, 1990), 현수(Wilson and Lee, 1994) 등의 다양한 선형에 대한 자유진동이 연구되고 있다.

변단면 형상은 아치의 고유진동수 및 진동형에 크게 영향을 미치는 요소이며 적절한 변단면을 채택하므로서 동하중에 강인한 아치의 동적 최적 형상을 찾을 수 있다. 아치의 변단면형상이 자유진동에 미치는 영향을 연구한 논문으로는 Huang et al. (1998), Tufekci and Ozdemir (2006), Shin et al. (2008)의 연구들이 있다.

이밖에도 회전관성 및 전단변형(Wu and Chiang, 2004), 지점조건(Cortinez et al., 1987), 재료적 성질(Malekzadeh et al., 2008), 다경간 아치(Riedel and Kang, 2009) 등을 주제로 하는 논문에서 보는 바와 같이 매우 다양한 요소들이 아치의 자유진동에 영향을 미친다. 이와 같이 아치구조의 자유진동에 관한 연구는 아치 선형으로부터 재료적 특성에 이르기까지 구조공학에서 다루는 모든 분야에서 지금까지 활발하게 연구되어지고 있다.

위에서 언급한 모든 아치는 아치 지점에서 할선 길이가 가장 넓은 아치들이다. 이와는 다르게 마제형(馬蹄形) 아치는 말굽의 형상과 같이 할선 길이가 아치 정점으로부터 점차 증가하여 최대치를 보인 후에 지점의 개구부에 이르기까지 감소하는 아치형식이다. 마제형 아치는 토목, 건축 분야에서 하중을 지지하는 뼈대구조로 널리 이용되고 있으며, 현대적 건축물에 잘 어울리는 문구(entrance portal)로 시공된 예를 Fig. 1에 나타내었다.

이 연구는 마제형 아치의 자유진동 특성을 규명하는 데 연구목적이 있다. 이 연구에서 마제형 원호 아치의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산정하였다.

직교좌표계에서 마제형 아치의 선형은 동일한 수평좌표에서 2개의 수직좌표를 갖게 된다(Fig. 2 참조). 이러한 관점에서 자유진동의 지배미분방정식을 직교좌표계에서 유도하는 것은 비합리적이다. 따라서 이 연구에서는 기존의 연구(Lee and Wilson, 1990; Lü and Lü, 2009)들과는 다르게 지배미분방정식을 각좌표계가 아닌 아치 지점으로부터 축 방향을 따라 측정한 곡선거리좌표계에 의한 상미분방정식으로 유도하였다.

Fig. 1. Erected Example of Horseshoe Arch as an Entrance Portal at the Wonkwang University Hospital

수치해석의 결과로 마제형 아치의 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였고, 자유진동의 진동형 예를 그림에 나타내었다. 저자들의 문헌조사 결과로는 이 연구가 마제형 아치의 자유진동에 관한 최초의 논문으로 생각된다.

2. 수학적 모형

2.1 자유진동 변수

Fig. 2는 원호로 곡선 축을 이루고 있는 마제형 아치의 기하형상을 직교좌표계(x, y)에 나타낸 그림이다. 마제형 아치는 이 그림에서와 같이 할선 길이가 정점으로부터 점차 넓어지다 최대치를 보인 후 다시 좁아지는 아치이다. 따라서 마제형 원호 아치인 경우에 원호는 반원보다 더 크다. 아치의 양단은 회전 또는 고정 지점으로 지지되고, 단면은 등단면이다. 아치 반경은 r이고 곡선길이는 l이다. l은 원주길이보다 작기 때문에 $l \leq 2\pi r$이다. r과 l이 주어지면 아치 선형은 직교좌표계(x, y)에서 산정할 수 있다. 좌측 지점에서 곡선 축을 따라서 임의점 a까지 측정한 곡선거리는 s이다. 좌측 지점에서 $s = 0$이고 우측 지점에서 $s = l (\leq 2\pi r)$이다. 좌측 지점으로부터 임의점 a까지 각도는 $\theta = s/r$이다. 따라서 아치의 중심각은 $\beta = l/r (\leq 2\pi)$이다.

Fig. 2에 나타낸 바와 같이 아치가 자유진동하면 임의점 a에서 곡률방향변위 w, 접선방향변위 v 및 단면회전각 ψ가 발생하며 화살표 방향이(+) 부호규약이다. 여기서, 자유진동 상태에서

발생하는 변위는 시간에 따라 변화하는 동적 변위이다.

부재단면에는 동적 변위 w, v, ψ 에 의하여 동적 축방향력 N, 전단력 Q, 휨 모멘트 M의 합응력이 발생한다. 이 연구에서 자유진동의 동적 변위 w, v, ψ 및 동적 합응력 N, Q, M은 모두 $\sin(\omega_i t)$에 비례하는 조화진동을 한다. 여기서, t는 시간, ω_i는 고유각진동수(rad/s), i는 모드번호이다.

Fig. 3은 자유진동하는 아치의 미소요소에 작용하는 힘들의 평형상태를 나타낸다. 이 미소요소의 단면에는 합응력 N, Q, M이 작용한다. 아치는 조화진동을 하기 때문에 질량을 갖는 미소요소에는 동적 변위에 의하여 관성력들이 발생한다. 변위 w, v 에 의해서는 곡률중심방향 관성력 P_w, 접선방향관성력 P_v가 발생한다. 여기서, P_w, P_v는 직선운동에 의한 관성력이고 자유진동을 야기하는

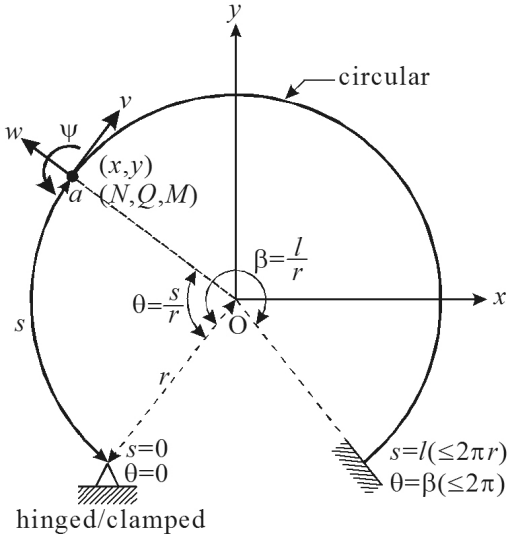

Fig. 2. Geometry of Horseshoe Circular Arch and its Parameters in Free Vibration Problem

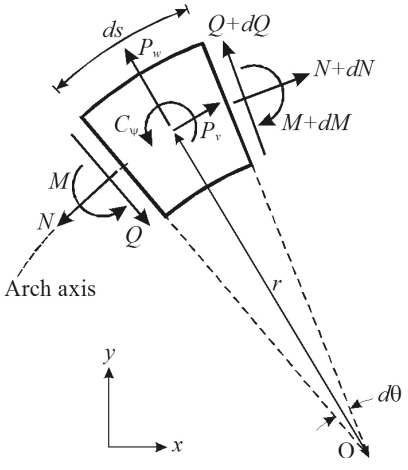

Fig. 3. Stress Resultants and Inertia Forces Acting on Arch Element

가장 기본적인 요소이다. 이 연구에서 P_w, P_v의 기본 관성력 이외에 단면회전각 ψ에 의하여 발생하는 회전관성우력 C_ψ를 고려한다. Fig. 2에서 화살표의 방향이 합응력 및 관성력의 (+) 부호규약이다.

2.2 동적 평형방정식

Fig. 3에서 합응력 N, Q, M과 관성력 P_w, P_v, C_ψ는 시간 t 에서 동적 평형상태를 이룬다. 미소요소의 접선방향, 곡률중심방향에 대한 힘의 평형방정식 및 모멘트의 평형방정식을 세우면 각각 다음과 같다.

$$\sum F_t = \frac{dN}{d\theta} + Q + rP_v = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_r = \frac{dQ}{d\theta} - N + rP_w = 0 \tag{2}$$

$$\sum M = \frac{dM}{d\theta} - rQ - rC_\psi = 0 \tag{3}$$

Eqs. (1)~(3)의 동적 평형방정식을 자유진동해석에 적용하기 위하여 합응력 N, Q, M 및 관성력 P_w, P_v, C_ψ를 정의한다. 합응력 N, M은 응력-변위 관계식에서 다음과 같이 구할 수 있다 (Borg and Gennaro, 1959).

$$N = \frac{EA}{r}\left(\frac{dv}{d\theta} + w\right) + \frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\right) \tag{4}$$

$$M = -\frac{EI}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\right) \tag{5}$$

여기서, E는 아치 재료의 탄성계수이고, A, I는 단면적 및 단면2차모멘트이다.

관성력 P_w, P_v, C_ψ를 d'Alembert 원리를 이용하여 다음과 같이 구한다(Timoshenko et al., 1974).

$$P_w = \rho A \omega_i^2 w \tag{6}$$

$$P_v = \rho A \omega_i^2 v \tag{7}$$

$$C_\psi = \rho I \omega_i^2 \psi = R\rho I \omega_i^2 \frac{1}{r}\left(\frac{dw}{d\theta} - v\right) \tag{8}$$

여기서, ρ는 질량밀도이다. Eq. (8)에서 단면회전각은 $\psi=(dw/d\theta-v)/r$ 이고(Borg and Gennaro, 1959), R은 자유진동해석에서 회전관성 우력 C_ψ의 고려여부를 나타내는 회전관성지표이며 다음과 같이 정의한다.

$$R=0:\ \text{회전관성 무시} \tag{9a}$$

$$R=1:\ \text{회전관성 고려} \tag{9b}$$

Eqs. (4) and (5)를 이용하여 합응력 $N,\ M$의 1계미분을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dN}{d\theta}=\frac{EA}{r}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{dw}{d\theta}\right)+\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^3w}{d\theta^3}+\frac{dw}{d\theta}\right) \tag{10}$$

$$\frac{dM}{d\theta}=-\frac{EI}{r^2}\left(\frac{d^3w}{d\theta^3}+\frac{dw}{d\theta}\right) \tag{11}$$

평형방정식 Eq. (3)과 Eqs. (8) and (11)을 이용하여 전단력 Q를 구하면 Eq. (12)와 같고, 이 식을 θ에 관하여 미분하여 $dQ/d\theta$를 구하면 Eq. (13)과 같다.

$$Q=\frac{1}{r}\frac{dM}{d\theta}-RC_\psi=-\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^3w}{d\theta^3}+\frac{dw}{d\theta}\right)-R\rho I\omega_i^2\frac{1}{r}\left(\frac{dw}{d\theta}-v\right) \tag{12}$$

$$\frac{dQ}{d\theta}=-\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^4w}{d\theta^4}+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)-R\rho I\omega_i^2\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}-\frac{dv}{d\theta}\right) \tag{13}$$

평형방정식 Eq. (2)에 Eqs. (4), (6) and (13)을 대입하면 Eq. (14)와 같이 정리되고, 평형방정식 Eq. (1)에 Eqs. (7), (10) and (12)를 대입하면 Eq. (15)와 같이 정리된다.

$$\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^4w}{d\theta^4}+\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)+R\rho I\omega_i^2\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}-\frac{dv}{d\theta}\right)+\frac{EA}{r}\left(\frac{dv}{d\theta}+w\right)+\frac{EI}{r^3}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}+w\right)-\rho A\omega_i^2rw=0 \tag{14}$$

$$\frac{EA}{r}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{dw}{d\theta}\right)-R\rho I\omega_i^2\frac{1}{r}\left(\frac{dw}{d\theta}-v\right)+\rho A\omega_i^2rv=0 \tag{15}$$

2.3 미분방정식의 유도

서론에서 언급한 바와 같이 마제형 아치는 할선 길이가 정점으로부터 점차 넓어지다 최대치를 보인 후 다시 좁아지는 아치이기 때문에 동일한 x 좌표에서 상이한 2개의 각좌표 θ를 갖는다(Fig. 2 참조). 따라서 마제형 아치에서는 θ에 관한 미분방정식 보다는 곡선거리좌표 s에 관한 미분방정식으로 유도하는 것이 합리적이다. 이를 위하여 Fig. 3에서 미소요소 길이 ds를 $d\theta$에 관한 식으로 나타낸다.

$$ds=rd\theta \tag{16}$$

Eq. (16)을 이용하면 θ에 의한 미분방정식을 s에 의한 미분방정식으로 변환할 수 있는 1계미분연산자를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{d\theta}=r\frac{d}{ds} \tag{17}$$

Eq. (17)을 이용하여 다음과 같은 2~4계미분연산자들을 구한다.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\right)=r\frac{d}{ds}\left(r\frac{d}{ds}\right)=r^2\frac{d^2}{ds^2} \tag{18}$$

$$\frac{d^3}{d\theta^3}=r^3\frac{d^3}{ds^3} \tag{19}$$

$$\frac{d^4}{d\theta^4}=r^4\frac{d^4}{ds^4} \tag{20}$$

Eqs. (17)~(20)의 미분연산자를 Eqs. (14) and (15)의 θ에 관한 미분식에 적용하여 다음과 같이 s에 관한 미분식으로 변환시킨다.

$$EI\left(r\frac{d^4w}{ds^4}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{ds^2}\right)+R\rho I\omega_i^2\left(r\frac{d^2w}{ds^2}-\frac{dv}{ds}\right)+EA\left(\frac{dv}{ds}+\frac{w}{r}\right)+\frac{EI}{r^2}\left(r\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{w}{r}\right)-\rho A\omega_i^2rw=0 \tag{21}$$

$$EA\left(r\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{dw}{ds}\right)-R\rho I\omega_i^2\left(\frac{dw}{ds}-\frac{v}{r}\right)+\rho A\omega_i^2rv=0 \tag{22}$$

위의 Eqs. (21) and (22)를 무차원 지배미분방정식으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\lambda = \frac{s}{r} \tag{23}$$

$$\delta = \frac{w}{r} \tag{24}$$

$$\eta = \frac{v}{r} \tag{25}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \le 2\pi \tag{26}$$

$$s_r = \frac{l}{\sqrt{I/A}} \tag{27}$$

$$C_i = \omega_i r \sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{28}$$

여기서, $(\lambda, \delta, \eta, \alpha)$는 길이차원의 유차원 변수$(s, w, v, l)$를 반경 r로 정규화한 무차원 곡선거리좌표, 무차원 곡률중심방향변위, 무차원 접선방향변위, 무차원 곡선길이비이다. s_r은 세장비이고, C_i는 무차원 고유진동수이다.

Eqs. (23)~(25)를 이용하면 길이차원의 1계, 2계미분 dw/ds, d^2w/ds^2 식들을 무차원 1계, 2계미분식들인 $d\delta/d\lambda$, $d^2\delta/d\lambda^2$으로 변환시킬 수 있는 미분식들이 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{dw}{ds} = \frac{d(r\delta)}{d(r\lambda)} = \frac{d\delta}{d\lambda} \tag{29a}$$

$$\frac{d^2w}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}\right) = \frac{d}{d(r\lambda)}\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2\delta}{d\lambda^2} \tag{29b}$$

마찬가지 방법으로 길이차원의 미분을 무차원 미분으로 변환할 수 있는 다음 식들을 유도할 수 있다.

$$\frac{d^3w}{ds^3} = \frac{1}{r^2}\frac{d^3\delta}{d\lambda^3} \tag{29c}$$

$$\frac{d^4w}{ds^4} = \frac{1}{r^3}\frac{d^4\delta}{d\lambda^4} \tag{29d}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{d\eta}{d\lambda} \tag{29e}$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2\eta}{d\lambda^2} \tag{29f}$$

이제 Eqs. (29a)~(29f), Eqs. (26)~(28)을 Eqs. (21) and (22)에 대입하고 최고차 미분항에 대하여 정리하면 마제형 원호 아치의 면내 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4\delta}{d\lambda^4} = -\left(RC_i^2 + 2\right)\frac{d^2\delta}{d\lambda^2} + \left(\frac{s_r^2}{\alpha^2}C_i^2 - \frac{s_r^2}{\alpha^2} - 1\right)\delta + \left(RC_i^2 - \frac{s_r^2}{\alpha^2}\right)\frac{d\eta}{d\lambda} \tag{30}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\lambda^2} = \left(R\frac{\alpha^2}{s_r^2}C_i^2 - 1\right)\frac{d\delta}{d\lambda} - \left(R\frac{\alpha^2}{s_r^2} + 1\right)C_i^2\eta,\ 0 \le \lambda \le \alpha \tag{31}$$

$\lambda = 0$ 및 $\lambda = \alpha$인 회전 지점에서 $w = 0$, $M = 0$, $v = 0$이므로 다음과 같은 무차원 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0 \tag{32}$$

$$\frac{d^2\delta}{d\lambda^2} = 0 \tag{33}$$

$$\eta = 0 \tag{34}$$

$\lambda = 0$ 및 $\lambda = \alpha$인 고정 지점에서 $w = 0$, $\psi = (dw/d\theta - v)/r = 0$, $v = 0$이므로 다음의 무차원 경계조건식을 얻는다.

$$\delta = 0 \tag{35}$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0 \tag{36}$$

$$\eta = 0 \tag{37}$$

3. 수치해석 방법 및 검증

3.1 수치해석 방법

아치의 곡선길이비 α, 세장비 s_r와 지점조건을 입력하면 위에 Eqs. (30) and (31)의 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수 C_i와 진동형(δ, η)를 산정할 수 있다. 지점조건은 회전-회전(h-h), 회전-고정(h-c) 및 고정-고정(c-c)의 3가지 지점조건을 고려하였다.

상미분방정식의 수치적분은 초기치 문제이므로 회전 및 고정

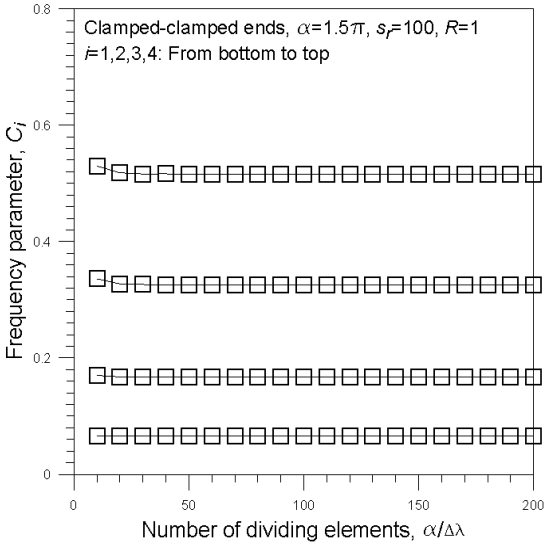

Fig. 4. Convergence Analysis

지점 조건에 따라서 Eqs. (32)~(34) 또는 (35)~(37)을 초기치로 하여 Eqs. (30) and (31)의 미분방정식을 수치적분한다. 수치적분은 Runge-Kutta 법(Carnahan et al., 1969)을 이용하였고, 미분방정식의 고유치인 고유진동수 C_i는 비선형 방정식의 수치해법인 Regula-Falsi 법(Carnahan et al., 1969)을 이용하여 산정하였다. 이러한 수치해석 방법은 다양한 구조물의 정·동적 해석에서 그 유용성이 입증된 바 있다(Lee and Wilson, 1990).

이상의 수치해석 방법을 FORTRAN 어로 컴퓨터 프로그램하여 수치해석에 이용하였다. 이후의 수치해석 예제에서는 주어진 입력변수에 대하여 최저차 4개의 C_i 및 진동형을 산정하였다.

3.2 수치해의 수렴해석

상미분방정식의 수치적분에서 수치해의 정도는 Runge-Kutta 법의 단계길이 $\Delta\lambda$의 크기에 영향을 받는다(Carnahan et al., 1969). Fig. 4는 $\Delta\lambda$의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i $(i=1\sim4)$의 수렴과정을 나타낸다.

이 그림의 수평축에서 $\alpha/\Delta\lambda$는 곡선길이비 α에 대한 분할개수이다. 이 그림에서와 같이 수치해 C_i는 분할개수 40에서 분할개수 200에 대한 C_i 값에 충분히 수렴한다. 이 후의 수치해석 예에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 분할개수를 100으로 C_i를 산정하였다.

3.3 검증

이 연구에서 유도한 상미분방정식과 수치해석 방법을 검증하기 위하여 다음과 같은 제원을 갖는 마제형 아치의 고유진동수를 계산하고 SAP 2000의 고유진동수와 비교하였다.

- 원호 반경: $r=2.5$ m
- 곡선길이: $l=11.78$ m
- 단면: $H\times B=100\times100$ H 형강(形鋼)
  ($A=2.19\times10^{-3}\text{m}^2$, $I=1.34\times10^{-6}\text{m}^4$)
- 재료: $E=200$ GPa, $\rho=7{,}850$ kg/m^3
- 지점: 회전-회전(h-h), 회전-고정(h-c), 고정-고정(c-c)

위의 제원으로부터 Eqs. (26) and (27)의 입력변수들을 무차원량으로 계산하면 다음과 같다.

- $\alpha=\dfrac{l}{r}=1.5\pi,\quad s_r=\dfrac{l}{\sqrt{I/A}}=476.2$

이상의 무차원 변수들을 이 연구에서 작성한 컴퓨터 프로그램에 입력하고 무차원 고유진동수 C_i를 계산하였다. 이렇게 계산한 C_i 값으로부터 Eq. (28)과 아치의 제원 r, E, ρ 값을 이용하여 고유각진동수 ω_i(rad/s)를 구하면 다음과 같다.

$$\omega_i=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,C_i=2{,}019\,C_i\ \text{rad/s}$$

Table 1. Comparisons of Natural Angular Frequency ω_i between this Study and SAP 2000*

End constraint	Data source	Natural angular frequency ω_i rad/s					
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
h - h	This study	9.49	47.25	106.9	185.0	282.3	396.7
	SAP 2000	9.49	47.31	107.1	185.2	282.6	397.2
h - c	This study	18.34	59.19	123.2	205.3	308.8	424.9
	SAP 2000	18.34	59.19	123.3	205.4	307.2	425.7
c - c	This study	27.77	71.63	140.6	226.3	332.6	448.6
	SAP 2000	27.83	71.69	140.7	226.4	332.8	448.9

* Three dimensional beam element was used in SAP 2000, whose number of elements was 100.

이 연구와 SAP 2000에서 산정한 고유각진동수 $\omega_i (i=1\sim 6)$를 Table 1에 나타내었다. 이 표에서 고유진동수의 결과는 1% 미만으로 일치하여 이 연구에서 유도한 마제형 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 수치해석 방법의 타당성을 검증할 수 있다. SAP 2000의 해는 아치 축을 직선보로 모형화한 유한요소 해이고 이 연구의 해는 미분방정식에서 보인 바와 같이 곡선보 요소에 의한 해이기 때문에 약간의 오차가 발생한 것으로 생각된다.

4. 수치해석 예 및 토의

모든 구조물의 설계 및 안정성 평가에서 자유진동 특성을 파악하는 것은 매우 중요하다. 특히 외부로부터 전달되는 동하중과의 공진을 피하기 위해서는 고유진동수의 산정이 무엇보다 필요하다. 이러한 관점에서 아치의 입력변수들(α, s_r, 지점조건)이 고유진동수 특성에 미치는 영향을 분석하는 것은 설계에서 매우 중요하다. 이 연구에서 입력변수들이 무차원 고유진동수 $C_i (i=1\sim 4)$에 미치는 영향을 변수연구를 통하여 분석한 결과는 다음과 같다.

- Reduction ratio (%) $= \left(\dfrac{C_i \, with \, R=0}{C_i \, with \, R=1} - 1 \right) \times 100$

이후의 수치해석 예에서는 지면관계상 회전-고정 아치의 수치해석 예제는 제외한다.

Table 2는 회전관성(R)이 무차원 고유진동수 C_i에 미치는 영향을 나타낸다. 입력변수는 $\alpha = 1.5\pi$이다. 이 표에서와 같이 회전관성을 고려하는$(R=1)$ 경우에는 고려하지 않는 경우$(R=0)$에 비하여 C_i는 감소한다. 이는 회전관성을 고려하면 변위가 증가하여 동일한 에너지로 진동하는 구조의 고유진동수가 감소하는 동적 특성의 일반적인 원리를 따르기 때문이다. 이 표에서 Ratio는 회전관성을 고려하는 경우에 대한 고려하지 않는 경우의 C_i 값의 감소율(%)을 나타낸다. 회전관성의 영향은 저차모드에서 보다 고차모드에서 더 크다. 예로서 회전-회전 아치에서 굵은 글씨체로 나타낸 바와 같이 C_1은 0.225 %의 감소율을 보이지만, C_4는 이 보다 훨씬 큰 2.029 %의 감소율을 보이고 있다. 회전관성의 영향력은 큰 세장비에서 보다 작은 세장비에서 더 크다. 예로서 고정-고정 아치에서 굵은 글씨체로 나타낸 $s_r = 50$의 C_4은 2.221 %의 감소율을 보이고 있어, $s_r = 150$의 0.492%의 감소율에 비하여 훨씬 더 큰 감소율을 보이고 있다. 작은 세장비를 갖는 아치에 높은 고유진동수의 동적 주기하중이 작용하는 경우에는 회전관성의 영향을 반드시 고려하여야 정확한 동적 거동을 해석할 수 있다.

Fig. 5는 곡선길이비 α의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i의 곡선을 나타낸다. 입력변수는 $s_r = 100$이다. 이 그림에서 $\alpha \geq \pi$

Table 2. Effects of Rotatory Inertia (R) on Frequency Parameter C_i

End constraint	s_r	R	Frequency parameter C_i			
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
h - h	50	0	0.0446	0.2208	0.4939	0.8093
		1	0.0445	0.2195	0.4860	0.7932
		Ratio*	0.225	0.592	1.626	2.029
	100	0	0.0223	0.1112	0.2509	0.4328
		1	0.0223	0.1110	0.2498	0.4293
		Ratio	0.000	0.180	0.440	0.815
	150	0	0.0149	0.0742	0.1677	0.2901
		1	0.0149	0.0742	0.1674	0.2891
		Ratio	0.000	0.000	0.179	0.346
c - c	50	0	0.1301	0.3252	0.6227	0.8424
		1	0.1298	0.3231	0.6126	0.8241
		Ratio	0.231	0.650	1.649	2.221
	100	0	0.0656	0.1674	0.3277	0.5195
		1	0.0655	0.1671	0.3261	0.5162
		Ratio	0.153	0.180	0.491	0.639
	150	0	0.0438	0.1122	0.2201	0.3469
		1	0.0438	0.1121	0.2196	0.3452
		Ratio	0.000	0.089	0.228	0.492

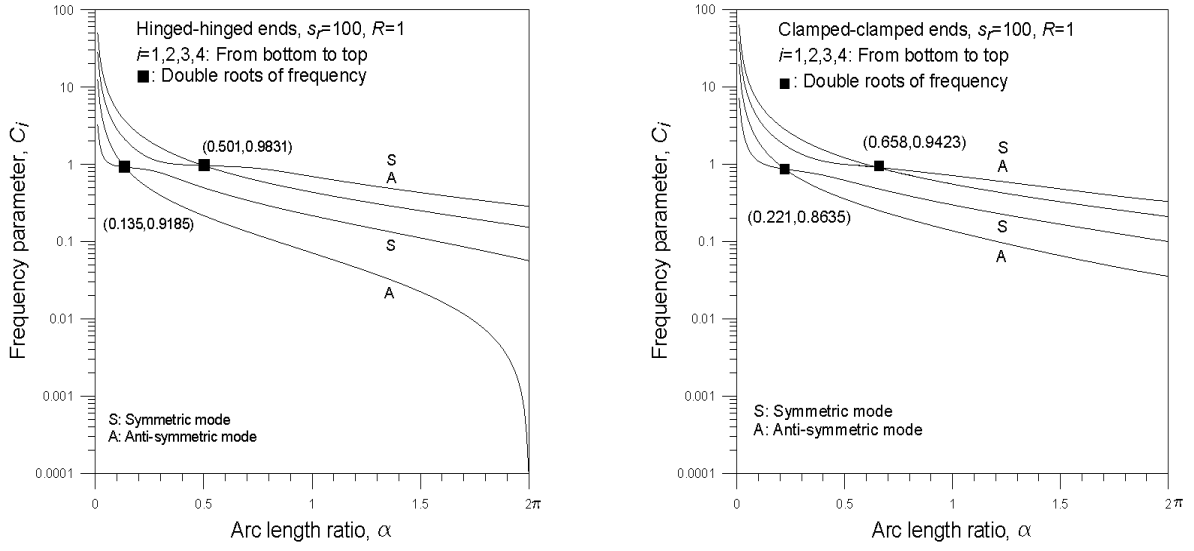

Fig. 5. C_i Versus α Curves

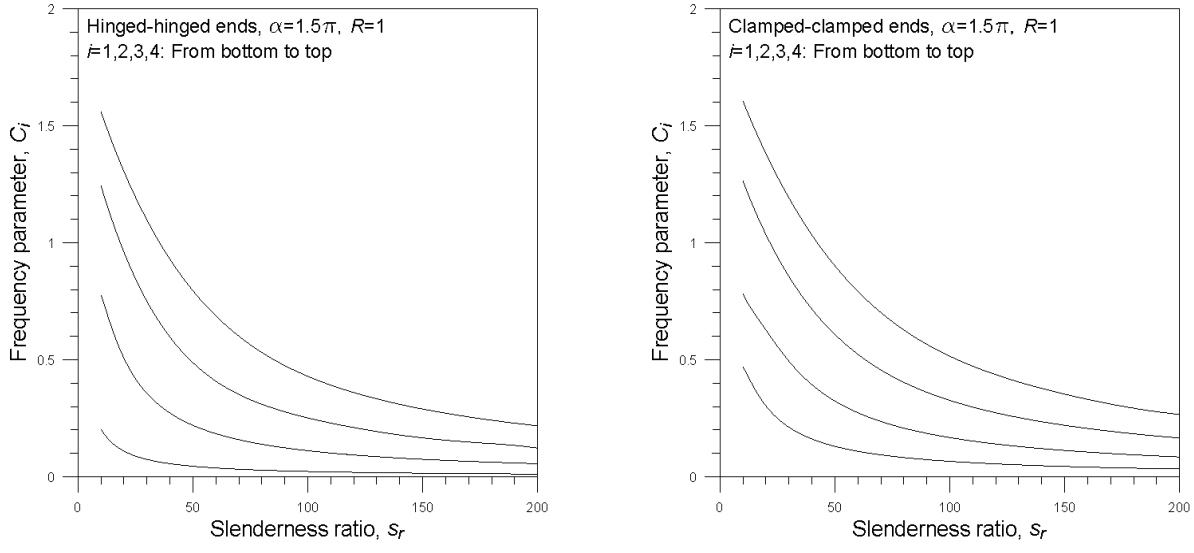

Fig. 6. C_i Versus s_r Curves

의 범위가 마제형 아치의 영역이다. α가 증가하면 C_i는 감소한다. α 가 증가하면 아치의 높이가 증가되고 구조적 강성이 감소하게 되어 C_i는 감소하게 된다. 회전-회전 아치에서 완전원환인 $\alpha = 2\pi$ 가 되면 $C_1 = 0$이 되고 아치는 당연히 불안정 상태에 이르게 된다. 이는 $\alpha = 2\pi$의 회전-회전 아치는 구조 전체가 회전에 저항할 수 없기 때문에 '구조 불성립'이 되는 것을 의미한다. 고정-고정 아치는 $\alpha = 2\pi$에서도 회전에 저항할 수 있기 때문에 안정상태를 유지할 수 있다. Fig. 5에 적용한 아치는 기하적 형상이 좌우 대칭이기 때문에 자유진동의 진동형은 대칭진동 또는 역대칭진동이 된다 (Timoshenko et al., 1974). 따라서 이 그림에서 고유진동수 곡선이 교차하는 ■로 표시한 α 값에서 자유진동의 모드변환이 발생할 수 있다. 예로서 회전-회전 아치에서 $i = 1, 2$ 모드는 $\alpha = 0.135$를 전후하여 C_1은 대칭진동에서 역대칭진동으로 모드변환하고, C_2는 역대칭진동에서 대칭진동으로 모드변환이 발생한다. 즉, $\alpha = 0.135$에서 $C_1 = C_2 = 0.9185$의 중복근의 고유진동수를 갖는다. 대칭진동 또는 역대칭진동의 판별은 자유진동의 진동형을 그려서 판별할 수 있다(Fig. 7 참조).

Fig. 6은 세장비 s_r의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i의 곡선을 나타낸다. 입력변수는 $\alpha = 1.5\pi$이다. s_r이 증가함에 따라서 C_i는 감소하는 것을 알 수 있다. s_r이 증가하면 구조적으로

단면강성이 감소하게 되므로 C_i는 감소하게 된다. 작은 s_r의 영역에서는 Fig. 6에 나타낸 고유진동수 곡선간의 간격이 넓으나 s_r이 증가할수록 그 간격은 점차 좁아진다. 따라서 s_r이 C_i에 미치는 영향은 작은 세장비에서 더 큰 영향력을 보이고 있다. 한편, 큰 s_r의 영역에서는 $i=1,2,3,4$의 C_i 값들이 좁은 고유진동수 대역에 밀집되어 있는 것을 알 수 있다. 이러한 좁은 대역의 범위에서 동적 하중을 받는 아치는 공진현상이 발생하기 용이하다. 이러한 관점에서 설계단계에서부터 Fig. 6과 같은 $C_i - s_r$ 곡선을 이용하여 공진을 피할 수 있는 안전대역의 고유진동수를 갖도록 최적의 s_r 값을 결정하는 것이 중요하다. 한편, s_r 값 변화에 따라서는 Fig. 5에서 고찰한 바와 같은 모드변환은 발생하지 않았다.

Fig. 7은 회전-회전 및 고정-고정 아치의 진동형을 나타낸다. 입력변수는 $\alpha=1.5\pi,\ s_r=100$이다. 상미분방정식의 수치해에서 곡률중심방향 변위 δ, 접선방향 변위 η로 각각 계산되지만 이 2개의 변위는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 직각 방향의 벡터이므로 Fig. 7에서는 두 변위를 합성하여 합성된 진동형으로 나타내었다. 이 그림에 보는 바와 같이 지점조건은 C_i 결정에 큰 영향을 미친다.

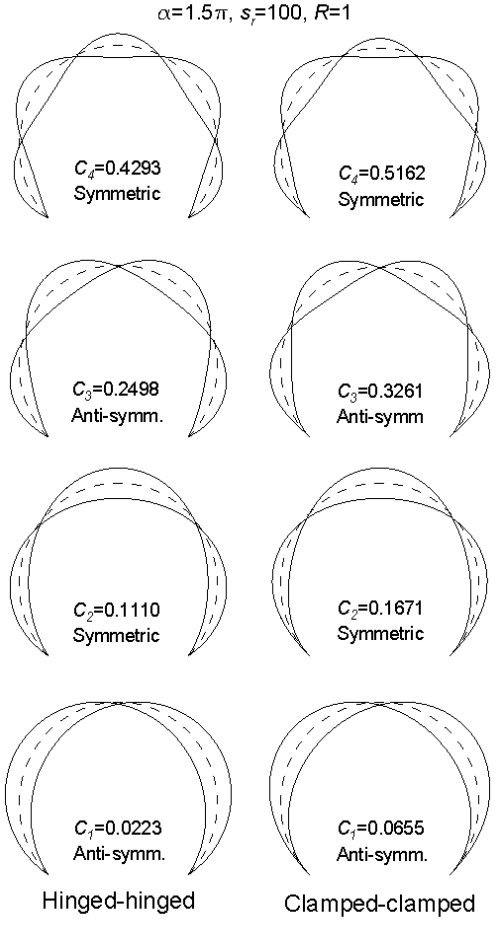

Fig. 7. Mode Shapes of Vibration

Fig. 5에서 고찰한 바와 같이 대칭구조인 경우에는 대칭진동과 역대칭진동으로 진동형을 구분할 수 있다(Timoshenko et al., 1974). 이 그림의 진동형에서 아치의 $i=1,3$ 모드는 역대칭진동이고, $i=2,4$ 모드는 대칭진동이다. 진동형은 입력변수에 따라 모드변환이 발생하므로 반드시 $i=1,3$ 모드는 역대칭진동이고, $i=2,4$ 모드는 대칭진동이지는 않다. 회전-회전 및 고정-고정 아치에서 두 진동형 사이에는 지점에서 회전각의 발생유무를 제외하고는 큰 차이가 없다(경계조건식 Eqs. (33) and (36) 참조). 예로서 두 아치의 무변위 위치와 최대진폭의 위치에는 큰 차이가 없다. Fig. 7에서 보인 최대진폭의 위치는 구조안전상 매우 중요하며 장기간에 걸쳐 동적 하중에 노출되는 경우에 공진으로 인한 피로파괴가 발생할 가능성이 높은 곳이므로 공용중인 아치의 최대진폭의 위치에서는 주기적인 안전점검이 필요하다.

5. 결 론

이 연구는 마제형 원호 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 아치의 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력을 동적 평형방정식에 적용하여 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형를 산출하였다. 이 연구에서 아치의 변수연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수는 서로 잘 일치하였다.
(2) 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이다.
(3) 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향은 저차모드와 큰 세장비에서 영향력이 더 크다.
(4) 곡선길이비가 증가하면 고유진동수는 감소한다.
(5) 세장비가 증가하면 고유진동수는 감소한다.
(6) 큰 세장비에서 고유진동수들은 좁은 대역에 밀집되어있어 공진 가능성이 매우 높다.
(7) 지점조건은 고유진동수 산정에 큰 영향을 미치나 진동형 산정에는 영향이 비교적 작다.

이 연구에서 얻어진 결과들이 마제형 원호 아치의 동적 해석 및 설계에 활용될 수 있기를 기대한다. 향후의 연구과제로는 변화곡률로 이루어진 마제형 아치의 자유진동에 관한 연구가 계속되어야 한다.

References

Borg, S. F. and Gennaro, J. J. (1959). *Advanced structural analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, N.Y., USA.

Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O. (1969). *Applied*

numerical method, John Wiley & Sons, N.Y., USA.

Cortinez, V. H., Laura, P. A. A., Filipich, C. P. and Carnice, R. (1987). "In-plane vibrations of a clamped column arch system carrying concentrated mass at the free end." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 112, No. 2, pp. 379-383.

Huang, C. S., Tseng, Y. P., Leissa, A. W. and Nieh, K. Y. (1990). "An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross section." *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 11, pp. 1159-1173.

Joo, S. M., Park, K. K., Lee, B. K. and Hwang, H. J. (1985). "Free vibration analysis of fixed ended parabolic arches." *Journal of Korean Society of Civil Engineers*, Vol. 5, No. 3, pp. 31-38 (in Korean).

Lee, B. K. and Wilson, J. F. (1990). "Free vibrations of arches with variable curvature." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 75-89.

Lü, Q. and Lü, C. F. (2009). "Exact two-dimensional solutions for in-plane natural frequencies of laminated circular arches." *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 318, No. 4-5, pp. 982-920.

Malekzadeh, P., Setoodeh, A. R. and Barmshouri, E. (2008). "A hybrid layerwise and differential quadrature method for in-plane free vibration of laminated thick circular arches." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 315, No. 1-2, pp. 212-225.

Nieh, K. Y., Huang, C. S. and Tseng, Y. P. (2003). "An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches." *Computers & Structures*, Vol. 81, No. 13, pp. 1311-1327.

Riedel, C. H. and Kang, B. S. (2006). "Free vibration of elastically coupled dual-span curved beams." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 3-5, pp. 820-838.

Shin, Y. J., Kwon, K. M. and Yun, J. H. (2008). "Vibration analysis of a circular arch with variable cross-section using differential transformation and generalized differential quadrature." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, No. 1-2, pp. 9-19.

Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W. (1974). *Vibration problems in engineering*, John Wiley & Sons, N.Y., USA.

Tufekci, E. and Ozdemir, O. (2006). "Exact solution of free in-plane vibration of a stepped circular arch." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 3-5, pp. 725-738.

Wilson, J. F. and Lee, B. K. (1995). "In-plane free vibrations of catenary arches with unsymmetric axes." *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 3, No. 3, pp. 511-525.

Wu, J. S. and Chiang, L. K. (2004). "A new approach for free vibration analysis of arch with effects of shear deformation and rotary inertia considered." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 277, No. 1-2, pp. 49-71.