대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 2, 355 ~ 386. Jun 2014

# 매개변수개념의 의미충실한 사용에 관한 사례연구
## -중학교 3학년 한 교실을 대상으로-

지 영 명* · 유 연 주**

패턴을 대수적으로 일반화한다는 것은 몇 가지의 특정한 요소에 내재한 구조를 인식할 수 있고, 그 구조를 모든 경우로 일반화해 나갈 수 있으며, 일반적인 것을 대수적으로 표현하기 위해 인식된 그 국소적인 구조를 사용할 수 있는 것이다. 본 연구에서는 학생들이 기하-산술적 패턴과제로부터 매개변수를 어떻게 대수적으로 일반화하는지와 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인하는 것에 목표를 둔다. 더불어, 본 연구진이 개발한 패턴 일반화 과제를 통해 학생들이 매개변수개념에 대해 의미 충실한 사용으로 나아갈 수 있는지를 확인한다. 연구 결과 학생들은 변수로 작용하는 문자 $n$과 구별되는 역할로 작용하는 매개변수의 의미를 인식하여, 이로부터 문자 $n$과 다른 문자를 설정했다. 또한, 몇 가지의 일차함수로부터 독립변수를 나타내는 문자 $n$과 독립적인 수 사이의 관계를 인식하였고 이를 나머지 다른 모든 경우로 일반화하여 매개변수로 설정한 문자를 이용하여 대수적으로 표현하였다. 이 과정에서 학생들에게 매개변수와 다른 변수사이에 구별의 어려움과 산술적인 절차를 대수로 이행하는 어려움이 확인되었다. 이러한 어려움을 교수자와 함께 극복해 나가는 과정에서 전형적인 예는 매개변수 개념에 대한 학생들의 의미 충실한 사용을 견인하는 역할을 제공하였다.

## Ⅰ. 도 입

문자기호(literal symbol)의 의미 충실한 사용은 대수적 추론의 근본적인 요소 중 하나에 해당된다. Kaput, Blanton & Moreno(2008)는 대수 학습에서 중심적인 여러 측면 중에 하나로 문자기호의 의미 충실한 사용을 강조했다. NCTM(2009)은 의미 충실한 기호의 사용을 사용되는 기호의 의미를 분명하게 정의하는 것, 구별되는 구성단위(units)를 명시하는 것, 그리고 문자기호의 주된 세 가지 용법(Usiskin, 1988)[1]인 미지수, 자리지기, 매개변수를 구별하는 것으로 규정하였다(p.31).

대수에서 보통 문자기호는 '변수'라고 명명되는데, 함수개념과 함께 출현한 '변수'라는 용어는 현재 수학공동체에서 모든 문자기호를 통칭하는 용어로 사용되고 있다(Philipp, 1992). 이러한 '변수'라는 수학적 용어의 관례는 문자기호에 대한 이해의 어려움을 야기하는 결과로 이어졌다(Schoenfeld & Arcavi, 1988). 선행연구에서 변

* 서울대학교 대학원, ango7422@snu.ac.kr (제 1저자)
** 서울대학교, yyoo@snu.ac.kr (교신저자)

1) Usiskin(1988)에 따르면, 맥락에 따라 다양한 의미를 갖는 변수는 일반화된 수, 미지수, 함수에서의 독립변수와 매개변수, 임의의 표시등을 나타낸다.

수개념의 다양한 의미와 맥락에 따른 용법을 구별하는 것과 관련하여 학생들이 처하는 어려움에 대한 선행연구는 다양하다(MacGregor & Stacey, 1997; Küchemann, 1981; Philipp, 1992; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Usiskin, 1988; 김남희, 1997). 하지만, Sfard & Linchevski(1994)는 대수학습에서 이러한 문자기호의 의미의 다양성은 대수가 가진 힘의 근원이라고 주장하며, 변수 개념의 의미 충실한 학습을 강조했다.

다양한 변수개념 중 '메타-변수'로 간주되는 매개변수는 고등 대수적 추론과 함수 학습을 위해 중요한 개념으로 최근에 부각되고 있다 (NCTM, 2009; Drijvers, 2003; Sfard, 1991, 1995). Sfard(1995)는 매개변수의 도입은 수학 전반, 특히 대수에서 강렬히 추구되던 일반성을 향한 큰 도약이라고 주장하였다(P.24). 또한, 그는 함수에 대한 개념이 물화(reification)되었다는 판단의 근거로 매개변수 방정식(또는 함수식)을 유연하게 해결하는 능력을 언급하였다(Sfard, 1991, p.20). NCTM(2009)은 함수적 추론과 의미구성의 세 가지 핵심적인 요소를 '함수의 다양한 표현 사용하기', '매개변수로 표현된 함수로 모델링하기', 그리고 '매개변수의 효과를 분석하기'(p.41)로 제시하여, 매개변수개념에 대한 학습의 중요성을 부각시켰다.

수학에서 사용되고 있는 매개변수라는 용어는 그 영역마다 서로 다른 의미로 사용되고 있고, 대수영역 내에서조차 연구자들마다 서로 다른 범주를 사용하고 있다. 하지만, 선행연구자들은 매개변수를 공통적으로 크게 두 가지 용법[2])으로 구분하여 사용하고 있다. 하나는 식, 방정식, 함수등의 유사한 모임(class)을 일반화하기 위한 수단으로, 다른 하나는 곡선이나 곡면을 나타내기 위한 수단으로 사용하였다(Allen, 2006; Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Fruedenthal, 1983; 김남희, 2004). 매개변수에 대한 선행연구를 살펴보면 후자에 비해 전자에 대한 연구가 주를 이루고 있다(Bardini, Radford & Sabena, 2005; Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Furinghetti & Paola, 1994; Martinez & Castro Superfine 2012; Mason & Pimm, 1984; Sfard, 1991, 1994; Sfard & Linchevski, 1995; Shoenfeld & Arcavi, 1988; Ursini & Trigueros, 2004). 선행연구물을 비교해 보았을 때, 국내에서는 국외연구에 비해 매개변수에 관한 연구가 다소 부족하고, 특히 최근에 국외연구자들에 의해 진행되어온 매개변수개념의 의미 충실한 학습을 촉진하는 조건(conditions)에 관한 연구(Bardini, Radford & Sabena, 2005; Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Martinez & Castro Superfine 2012; Ursini & Trigueros, 2004)는 거의 부재한 실정이다.

국내 선행연구자들은 현재 우리나라 수학과 교육과정에서 매개변수개념에 관한 그 용어와 의미를 제한적으로 사용하고 있다고 지적했다 (김남희, 2004; 우정호, 1998). 실제로, 중학교 수학교과서에서 식이나 함수의 유형을 일반적으로 표현하기 위해 매개변수의 의미로 사용된 문자는 명시적으로 제시되고 있음에도 불구하고, 그 용어를 '계수'나 '상수'로 명명하여 제한된 의미로 다루어지고 있다. 특히 원어 'parameter'를 번역하여 사용하고 있는 '매개변수'라는 용어는 고등학교 상위학년의 '기하와 벡터'영역에서 처음 등장하며, 그 용법은 곡선과 곡면을 표현하기 위한 수단으로만 제한적으로 다루어지고 있다. 김

2) 예를 들어, Bloedy-Vinner(2001)에 의하면, "수학에서 매개변수라는 용어는 매우 다른 문자의 두 가지 용법으로 구분된다...먼저 한 가지 용법에서, 매개변수의 구체적인 값은 방정식족 혹은 함수족(a family of equations or functions)의 원소를 결정한다. 매개변수에 대한 다른 용법으로, 그 문자는 곡선이나 곡면의 매개변수 방정식을 나타내는 것이다. 예를 들면, $x=t+1, y=t^2$와 같다. 이런 의미에서의 매개변수의 구체적인 값은 곡선이나 곡면상의 점들을 결정 한다"(p.189).

남희(2004)는 매개변수개념이 우리나라 수학과 교육과정서에 명시적으로 언급되어 있는 용어임에도 불구하고 그 의미에 대한 논의는 비교적 암묵적이라는 문제점을 제기하면서 그 개념에 대한 교육적 후속연구의 필요성을 언급하였다. 이것은 우리나라 수학과 교육과정에서 사용되고 있는 매개변수에 대한 용어와 의미에 대한 반성의 필요성을 제기하는 것이며, 특히 수학에서의 일반화의 중요성을 인식하여 여러 가지 상황을 일반화하기 위한 수단으로 사용될 수 있는 매개변수 개념에 대한 연구의 필요성을 부각시키고자 하는 것이다.

본 연구자는 수학학습에서 매개변수개념의 중요성과 국내에서 요구되는 매개변수 개념의 연구의 필요성을 인식하여, 일반화 수단으로서의 매개변수개념의 의미 충실한 학습에 초점을 두고 연구를 진행하고자 한다. 본 연구진은 문헌연구로부터 Radford(2010)의 대수적 일반화에 대한 정의에 근거하여 학생들로부터 매개변수 개념에 대한 대수적 일반화가 어떻게 일어나는지 그리고 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인하고자한다. 또한 본 연구진이 개발한 과제를 통해 학생들이 매개변수를 의미충실하게 사용(NCTM, 2009)할 수 있는지를 살펴본다. 본 연구자는 교수실험을 위해 기하-산술적 패턴일반화과제를 설계하여 중학교 3학년 15명을 대상으로 교수실험을 진행하였다. 학생들이 그 과제를 다루어나가는 과정을 자세히 기술하여 학생들에게 일어날 수 있는 잠재력과 어려움에 대한 정보를 제공하고, 더불어 연구에서 사용된 과제의 적절성에 대한 정보를 제공하고자한다.

## Ⅱ. 문헌연구

본 절에서는 대수를 일반화된 산술측면에서 대수적 일반화의 의미를 살펴본다. 또한, 구체적인 것을 통해 일반적인 것을 보는 그 미묘한 과정과 그 과정에서 학생들이 사용하는 전략을 여러 선행연구로부터 살펴보고 본 연구의 이론적 분석틀을 마련한다. 또한, 일반화의 수단으로서 매개변수 개념에 대한 개념적인 분석을 바탕으로 본 연구에서 매개변수 개념에 대한 의미 충실한 학습 여부의 준거를 마련한다.

### 1. 대수적 일반화

일반화는 수학에서 매우 중요한 사고과정이다. Harel& Tall(1991)은 일반화는 주어진 논거를 더 넓은 맥락에 적용하는 과정을 의미하는 것으로, 수학에서 핵심적인 과정이라고 주장하였다(p.38). 특히, 일반성은 대수를 산술과 구별짓는 중요한 특징 중 하나이며, 대수는 이 일반성을 나타내고 조작하기 위한 도구이다(Sfard, 1995; Mason, 1996).

한편, Kieran(1989)은 일반화는 대수적 사고와 동일한 것이 아니고, 심지어 대수를 요구하는 것도 아니라고 주장하면서, 대수적 사고의 특징으로 구체적인 것에서 일반적인 것을 보는 것 뿐만 아니라 그 일반성을 대수적으로 표현할 수 있어야 한다고 주장했다(p.165). 이것은 일반화는 대수적 사고와 구별되며, 특히 일반화하는 과정은 반드시 대수적 표현을 수반하는 것은 아니라는 것을 강조하는 것이다. 이러한 Kieran의 통찰은 이후의 학교 대수에 관한 연구에서 일반화된 성질을 대수적으로 표현하는 과정에 주목하도록 했다. 이에 대해 Mason(1996)은 학생들이 스스로 일반화를 표현할 기회를 제공받지 못한다면 수학적 사고는 절대 일어나지 않을 것이라고 단언하고, 대수를 의미 충실하게 지도하기 위해 자연스러운 대수적 사고의 발생과 대수적 표현에 주의를 기울이도록 해야 한다고 주장하였다. 또한,

Radford(2010)는 Kieran의 주장에 동의하면서 '대수적으로 일반화한다'는 것을 다음과 같이 정의하였다.

> 패턴을 대수적으로 일반화한다는 것은 몇 가지의 특정한 요소에 내재한 구조를 인식할 수 있고, 그 구조를 모든 경우로 일반화해 나갈 수 있으며, 일반적인 것을 대수적으로 표현하기 위해 인식된 그 국소적인 구조를 사용할 수 있는 것이다(p.42).

Radford, Bardini & Sabena(2007)는 대수적 상징체계는 분명 학생들에게 일반화를 표현하여 대수의 영역으로 입문시키는 문화적으로 세련된 방식을 제공하지만, 학생들이 스스로 일반적인 것을 인식하여 표현할 수 있는 대수의 생성은 다양한 방식으로 이루어질 수 있다는 것을 언급했다. 그들은 학생들이 구체적이고 지각적인 것을 넘어 일반적인 것으로 나아가는데 있어 기호(signs, Peirce의 의미에서)[3]와 인공물(예를 들어, 수학적 상징, 그래프, 말, 제스쳐, 계산기 등)과 같은 기호학적인 수단(semiotic means)들에 의지한다고 주장하면서, 학생들마다 그 수단을 선택하여 사용하는 방식에서 차이를 보일 수 있다는 것을 언급했다. 또한, 그들은 학생들의 대수적 표현은 수학적 활동을 하는 동안 생성되는 다양한 기호학적 수단들이 서로 긴밀하게 엮이는 가운데 생성된다고 주장했다(p.526-527).

## 2. 전형적인 예로 일반성 파악하기

Radford(2010)는 우리가 구체적으로 지각할 수 있는 것에만 사로잡혀있는 것이 아니라 그 밖에 다른 무언가 즉, 일반적이고 개념적인 그 무언가에 주목하고 그것을 이해하려고 노력하는 가운데 특정한 영역을 초월할 수 있다고 주장하였다(p.55). Mason(1996)은 일반화에 대한 인식의 발달에 있어 추상화와 구체화하는 경험을 근본적인 활동으로 강조하면서, 추상화는 특수한 것을 통해 일반성을 보는 것이고, 구체화는 일반적인 것에서 특수한 것을 보는 것이라고 기술하였다(p.65). 그는 개인이 특정한 어떤 것을 조작하고자 할 때, 이미 유연하게 조작할 수 있는 물리적, 도식적, 혹은 상징적 대상들과 같은 특정한 것들을 의도한 문제에 관련시키거나 의지하는 수단으로 작용할 수 있다고 언급했다. 그러나 우리는 그 특정한 대상들을 단순히 구체적으로 다루는데 그치기 보다는 그것을 통해 추상화해 나갈 수 있어야 한다(Griffin & Mason, 1990).

Harel & Tall(1991)에 의하면, 추상화는 주체가 주어진 대상의 특수한 성질에 주의를 집중하여 그 성질을 처음에 주어진 대상으로부터 분리하여 고려할 때 일어나고, 추상화는 특정한 예가 추상적인 관념의 대표원으로 간주됨으로써 좀 더 효과적으로 이루어질 수 있다는 것을 언급하며, 이러한 특정한 예를 '전형적인 예(generic example)'라고 불렀다(p.39). 학생들이 하나 이상의 특정한 예를 통해 추상적인 개념을 구체화하여 더 넓은 범위의 예들의 전형으로 볼 수 있다면 이것은 일종의 추상화에 해당되고, 그 특정한 예로부터 더욱 확장된 예들의 범주를 인식하기 때문에 이 과정은 분명 일반화를 수반한다(ibid, p.40). Harel & Tall과 동일한 맥락에서 여러 선행연구자들은 일반성을 보는데 있어 전형적인 예로 작용하는 특정한 예의 역할에 주목하고 그 중요성을 언급하였다(e.g. Davydov, 1990; Freudenthal, 1977; Mason, 1996; Mason & Pimm, 1984; Watson & Mason, 2005). 예를 들어, Davydov(1990)는 전형적인 예로 역할 하는 하나

3) Peirce(1998)에 의하면, "기호(signs)는 어떤 관계에서 누군가에게 다른 무엇을 대신하는 그 무엇이다(CP, 2.228)"

의 예의 완전한 이해를 통해 일반적인 것을 이해할 수 있다고 주장하며, 전형적인 예로부터 일반성의 이해로 나아가는 데 있어 핵심적인 두 가지 인식활동은 특별한 성질을 두드러지게하고 다른 것들은 무시하기(ignoring)이다. 또한, Mason & Pimm(1984)은 전형적인 예는 구체적인 하나의 예에 해당하지만, 그 예는 일반화를 불러일으키는 매개수단(carrier)으로서의 역할을 수행한다고 언급하였다. 그들은 전형적인 예로부터 여러 가지 핵심적인 성질을 두드러지게 하고 나머지를 무시하면서, 그리고 그 예에 대한 우리의 지각을 구조화하려고 노력하는 가운데 일반화가 일어난다고 주장하였다.

Radford et al.(2007)는 Love(1986)와 Mason (1996)의 연구로부터 구체에서 일반으로 나아가는 그 미묘한 과정에 집중하여 어떻게 특정한 것에서 일반적인 것을 볼 수 있는지에 대해 종단 연구를 진행해 왔다. 그들은 실증적 증거를 바탕으로, 특정한 것을 초월하여 일반적인 것으로 나아가는데 있어 학생들에 의해 사용된 세 가지 전략을 정리하였다. 먼저, 첫 번째 전략은 특정한 하나의 $p$를 수많은 대상들의 집합 $\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$의 대표원으로 보는 것이다. 여기서, $p$는 그 집합의 어떤 $p_i$로도 대체될 수 있기 때문에 $p$에 대해 진술된 것들은 그 집합의 다른 원소에 대해서도 적용된다. 실제로, 이러한 특정한 $p$는 하나의 '전형적인 대상(Balacheff, 1987)'으로 간주된다(Radford et al., 2007 재인용 p.511). 두 번째 전략은 $p$를 은유적으로 보는 것이다. 이 경우에는 첫 번째 전략인 전형적인 대상과 대조하여, 그 논의 자체가 정확히 $p$에 관한 것은 아니다. $p$가 담론의 대상이긴 하지만, 매우 우회적이며, 그 특정한 $p$는 일반적인 것에 대해 이야기 할 수 있도록 한다. 학생들이 특정하지만 그 자체는 아닌 어떤 것을 나타내기 위해, "말하자면~"또는 "꼭 ~ 처럼"와 같은 언어적 표현을 사용한다. 세 번째 전략은 $p$는 특정하지만 일반적인 구조의 전달자로서, 역동적인 방식으로 보는 것이다. 여기서 $p$ 그 자체는 일반적인 구조의 하나의 예시로 작용한다(p.511).

### 3. 메타 변수로서 매개변수

Küchemann(1981)은 학교 대수를 일반화된 산술측면에서 다루고 있다. 그는 문자 상징과 관련된 문항에 대한 학생들의 반응에 근거하여 문자 상징에 대한 해석을 6가지로 범주화하였다. 아래 <표 Ⅱ-1>는 대수 학습에서 주로 다루어지는 세 가지 문자 즉, 특정한 미지수, 일반화된 수, 변수에 대한 해석을 보여준다.

일반화된 산술측면에서 '변수'라는 용어의 포괄적인 사용은 수학공동체에서 하나의 관례로 여겨지고 있다(philipp, 1992). 그러나 Küchemann (1981)에 따르면, 이러한 포괄적인 용법은 변수 그 자체의 의미와 문자에 부여될 수 있는 진정

<표 Ⅱ-1> 문자의 세 가지 범주(Küchemann, 1981, p.104)

| 문자의 범주 | 문자에 대한 해석 |
|---|---|
| 특정한 미지수 | 문자를 특정하지만 아직 모르는 수로 간주하며, 직접 그 문자를 조작할 수 있다. |
| 일반화된 수 | 문자는 단지 하나보다는 여러 개의 값들을 나타내거나 대입될 수 있는 것으로 간주된다. |
| 변수 | 문자는 수많은 불특정한 값들을 나타내는 것으로 간주되며, 두 문자 사이에 체계적인 관계가 존재하는 것으로 간주된다. |

한 의미의 차이 모두를 구분하기 어렵게 만들었다. 이에 대해 그는 변수에 대한 의미의 구분을 시도하여 조작적 정의를 제시하였다. 여기서 변수의 두 가지 본질적인 성질은 변화성과 관계성이다(김남희, 2004). 특히, 변수 개념의 관계성은 변화성을 함의하고 있는 성질로, 일차(first-order) 관계와 이차(second-order) 관계로 구분될 수 있다. 예를 들어, 식 $5a+6b=90$을 만족하는 0이상인 정수 $a,b$의 네 순서쌍 (0,15), (6,10), (12,5), (18,0)을 아래 [그림 Ⅱ-1]과 같이 세로로 나열하면, '$a$는 6만큼 증가하고 $b$는 5만큼 감소 한다'는 것을 파악할 수 있다.

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 15 \\ \downarrow & \leftrightarrow & \uparrow \\ 6 & & 10 \\ \downarrow & \leftrightarrow & \uparrow \\ 12 & & 5 \\ \downarrow & \leftrightarrow & \uparrow \\ 18 & & 0 \end{array}$$

[그림 Ⅱ-1] 변수의 관계성

Küchemann(1981, p.111)

여기서 각 문자 $a,b$가 취할 수 있는 값들의 집합은 일정한 비율로 증가(↓) 그리고 감소(↑)하는 비율관계(일차관계)를 가지고 있다. 더 나아가, 비율관계를 가지고 있는 문자 $a,b$에 대해 '$a$에서 6만큼의 증가량은 대응되는 $b$에서 5만큼의 감소량보다 1 더 많다' 또는 '$a$에서 증가량은 $b$에서의 감소량의 6/5배이다'와 같은 진술은 $a$와 $b$사이에 일정한 비율(↔) 관계(이차관계)를 이루면서 변화하는 정도를 기술할 수 있게 된다. 즉, 일차관계는 집합내에서의 관계를, 이차관계는 일차관계를 갖는 집합들 사이에 일반적인 관계를 함의하고 있다. Küchemann(1981)은 이차관계의 특징은 한 집합이 다른 집합의 변화에 따라 변하는 그 정도의 표시를 제공하고, 실제로 문자들 사이에 이차관계가 형성될 때 변수가 사용된다고 주장하였다. 이러한 논거를 바탕으로 그는 대수에서 사용되는 변수를 '이차관계를 표현하는 도구'로 정의하였다(pp.110-112).

여러 선행연구자들은 대수에서 매개변수개념을 각자의 방식으로 범주화하여 다루고 있지만, 공통적으로 매개변수를 "이차관계의 일반화"를 표현하는 상징으로 설명하고 있다(Bloedy-Vinner, 2001; Drijvers, 2003; Furinghetti & Paola 1994; Martinez & Castro Superfine 2012; Sfard, 1994; Ursini & Trigueros, 2004). 즉, 매개변수는 여러 가지 상황, 공식, 방정식, 함수등의 유사한 모임(family or class)을 일반적으로 표현하는 수단으로 사용된다. 이것은 앞에서 살펴본 변수개념과 밀접한 관련을 갖는다. 매개변수 개념은 Küchemann에 의해 조작적으로 정의된 변수의 아이디어(이차관계의 표현)를 재조직하여 유도될 수 있다는 점에서 변수 개념의 일반화로 이해할 수 있다(Harel and Tall, 1991). 이에 대해 Drijvers(2003)는 매개변수를 '특별한 변수'혹은 '메타 변수(meta-variable)'로서 변수의 일종으로 이해하여, 매개변수의 변이(variation)와 일반화는 변수의 변이와 일반화보다 더 높은 차원에서 발생한다고 주장하였다. Sfard(1995)는 매개변수의 도입은 계산적인 과정에 대한 구조적 이해가 요구되고, 여기서 사고의 전환은 필수적이라고 주장했다. 또한, 그는 함수에 대한 개념이 물화되었다는 판단의 근거로 매개변수 방정식(또는 함수식)을 유연하게 해결하는 능력을 언급하였다(Sfard, 1991, p.20).

Bloedy-Vinner(2001)는 이 이차관계의 일반화를 이차관계를 갖는 함수와 논리 한정사(quantifiers)를 이용한 역동적 방식으로 설명하였다. 먼저, 그는 매개변수를 포함하는 방정식족 혹은 함수족을 이차관계를 갖는 함수라고 진술하였다. 이차관계를 갖는 함수에서 매개변수는 독립변수이

고, 그 함수의 함수값은 구체적인 수가 아닌 방정식 또는 함수가 된다. 예를 들어, 일반적인 정비례함수식 $y=kx$ ($k$는 매개변수, $x$,$y$는 변수)는 문자 $k$를 독립변수로 고려하여 특정한 $k$값에 ($k=1,2,3,\cdots$) 따라 구체적인 함수를 ($y=x, y=2x, y=3x,\cdots$) 함수값으로 갖는다.

Drijvers(2003)는 아래 [그림 Ⅱ-2]와 같이 매개변수를 포함하는 함수식에 대해 도식화하여 이차관계를 갖는 함수를 설명하였다.

$$k \rightarrow (x \rightarrow kx)$$

[그림 Ⅱ-2] 이차적 함수 관계의 도식화

[그림 Ⅱ-2]에서 오른쪽 화살표는 일차적 함수관계를, 왼쪽 화살표는 이차적 함수관계를 나타낸다. 즉, 변수개념에서 다루어지는 대상과 이차관계는 각각 수와 비율관계였다면, 매개변수개념에서 다루어지는 대상과 이차관계는 각각 변수(혹은 미지수)로 표현되는 대수식과 함수관계이다(Sfard, 1991, 1995; Sfard & Linchevski, 1994).

두 번째, Bloedy-Vinner(2001)는 두 가지 논리 한정사인 전칭한정사와 존재한정사를 이용하여 이차관계의 일반화를 역동적인 방식으로 설명하였다. 예를 들어, 위에서 제시한 함수식 $y=kx$에 대해 "임의의(전칭한정사) $k$ 대입값에 대해 상수 $k$와 변수 $x$,$y$를 갖는 정비례함수 $y=kx$가 존재한다(존재한정사)"로 진술할 수 있다. 여기서, 전칭한정사에 의해 $k$ 대입값이 정해지면 $k$는 상수의 역할로 변하고, 그런 다음 존재한정사에 의해 구체적인 정비례함수 $y=kx$가 결정된다.

이차관계의 일반화에 관한 Bloedy-Vinner(2001)의 설명 중, 두 번째 방식은 매개변수개념에 대한 인식의 측면과 밀접하게 관련된다. 그에 따르면, 위에서 설명한 한정사 구조는 매개변수개념이 순서화되어 일어날 수 있는 대입의 잠재력을 내포하고 있다. 즉, 먼저 매개변수에 구체적인 값을 대입하여 어떤 방정식 또는 함수를 구하고, 그 다음 경우에 따라 그 방정식이 참이 되는 값을 구하기 위해 혹은 함수값을 구하기 위해 미지수 또는 변수에 값을 대입한다. 이에 대해 Sierpinska(1992)는 학생들이 변수의 순서를 구별하는 것은 중요하며 특히, 매개변수의 개념과 관련하여 변화를 관찰하면서 변하는 것이 무엇인지 그리고 그 대상을 변하게 하는 것이 무엇인지를 구체화하는 경험의 필요성을 언급하였다(p.33). 같은 맥락에서 김남희(2004)는 중등학교 학생들이 매개변수의 역할과 미지수와 변수의 역할 사이의 구분을 이해하는 것은 잠재적이면서 역동적으로 순서화되어 있는 대입의 과정을 파악하는 능력과 관련이 있다고 언급하였다(p.310).

수학적 논리의 바탕이 부족하고 명료한 한정사 구조에 관해 고려할 수 없는 학생들이 매개변수개념을 이해하게 된다는 것은 매개변수와 변수(혹은 미지수)의 역할들 사이에 구분을 이해하여 순서화된 대입의 잠재적인 역동성을 구체화할 수 있게 되는 것을 의미한다(Bloedy-Vinner, 2001). Drijvers(2003)는 '변하는 상수'로 인식되는 매개변수의 심리적인 상충, 즉 매개변수는 변하는데도 불구하고 왜 상수처럼 여겨지는지를 이차관계의 일반화 개념으로부터 설명할 수 있다고 주장했다(p.67). 한편으로, 매개변수는 이차구조를 갖는 어떤 함수의 독립변수이므로 변수의 의미를 내포하고 있다. 다른 한편으로, 특정한 매개변수 값에 대응되는 각각의 방정식 혹은 함수에 대해서 다른 문자들은 변함없이 미지수나 변수인 반면, 매개변수는 상수가 된다. 즉, 매개변수는 관점에 따라 변수 또는 상수의 의미를 가질 수 있고, 이러한 다중적인 의미의 혼재는 학생들에게 매개변수개념을 이해하는데 큰 어려움으로 작용하는 것이다. 실제로, Sfard(1995)는

학교 현장에서 수 계수만을 갖는 방정식과 매개변수를 계수로 갖는 방정식에 대한 학생들의 어려움을 관찰하고 나서야, 구체적인 문제에서 매개변수와 관련된 문제로의 이행에는 엄청난 개념적 변화가 필요하다는 것을 인지하게 되었다고 고백했다. 그에 의하면, 학생들이 구체적인 함수식의 조작을 내면화하는 것으로부터 출발하여 압축을 거쳐 매개변수로 표현되는 함수식으로 물화하여 함수 개념을 발전시켜 나갈 수 있다고 주장하고, 이 과정은 자연스럽다기 보다는 매우 어려운 과정이라고 언급했다. Bardini et al.(2005)는 매개변수 개념의 역설적인 인식과정의 본질(paradoxical epistemic nature)은 그 개념의 명백한 모순에 기초하며, 매개변수가 사고의 대상이 될 수 있는 유일한 방법은 다양한 종류의 기호(signs)의 상호작용을 통할 수 밖에 없다고 주장하였다(p.130).

본 연구에서는 대수를 일반화된 산술적 측면에서 대수적으로 일반화한다는 의미를 두 가지 의미로 사용한다. 하나는 구체적인 것에서 일반성을 파악하는 것이고, 다른 하나는 이 일반성을 대수적으로 표현하는 것이다. 이로부터 본 연구진은 매개변수를 대수적으로 일반화하는 경험을 제공할 수 있는 과제를 개발하여 교수실험을 진행하였다. 이 과정에서 학생들이 매개변수를 어떻게 대수적으로 일반화하는지와 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 살펴보고자 한다. 특히, 특정한 경우를 초월하여 일반적인 경우로 나아갈 때, 학생들이 사용하는 전략을 이론적 배경을 바탕으로 분석을 실시하였다. 또한 본 연구진이 개발한 과제를 통해 학생들이 매개변수를 의미충실하게 사용(NCTM, 2009)할 수 있는지를 살펴본다. 여기서, 매개변수 개념에 본질인 이차 관계의 일반화를 실제로 이해할 수 있는지를 살펴보기 위해 매개변수개념에 대한 인식의 측면과 밀접하게 관련된 순서화된 대입의 의미 (Bloedy-Vinner, 2001)를 파악할 수 있는지를 확인한다.

## Ⅲ. 연구방법

본 연구의 목적은 대수에서 일반화의 수단으로서 매개변수개념과 관련하여 실제로 대수적 일반화가 어떻게 일어나는지, 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인하는데 있다. 사례연구는 단일 사례의 특이성과 복잡성에 대한 연구로 맥락 속에서 사례가 전개되는 방식에 대해 이해하고자 하는 것이다(Stake, 1995). Yin(2009)은 사례연구는 연구하고자하는 현상에 밀접하게 관련되어 있다고 여겨지는 맥락적인 조건들을 심층적으로 분석하여 밝혀내고자할 때 사용할 수 있는 연구방법이다(p.13). 본 연구진은 사례연구방법(Stake, 1995; Yin, 2009)이 본 연구의 목적에 부합되는 것으로 판단하고 사용하였다. 본 연구에서는 다음과 같은 절차로 과제를 설계하고, 연구 참여자를 선정하여 사례에 대한 자료를 수집, 분석하였다.

### 1. 과제설계

본 연구자는 문헌검토를 바탕으로 대수 학습에서 패턴의 일반화 활동의 중요성과 매개변수 개념의 선행학습요소로서 일차함수의 필요성을 인식하여 과제개발에 착수하였다. 특히, 선행연구자들은 대수를 도입시키는 효과적인 방법으로 시각적 패턴에 주목하여 기하-산술적 패턴으로부터 대수적 일반화하는 활동을 강조하였다(Lee, 1996; Mason, 1996; Radford, 2010). 본 연구자는 Bardini et al.(2005)의 연구에서 사용된 과제 계열과 Radford(2000)의 연구에서 사용된 과제 유형에 근거하여 본 연구에 필요한 기하-산술적 패

턴 과제를 개발하였다(<부록 1>). 아래에는 연구진이 개발한 과제 계열에 대해 개괄한다.

본 연구의 과제 계열은 기하-산술적 패턴의 식의 구성과 관련된 일련의 7개의 문제를 포함한다. 본 연구에서 사용한 기하-산술적 패턴은 바 둑돌을 가지고 맨 처음 삼각형모양에서 출발하여 이후부터 두 개의 바둑돌이 추가되는 패턴으로 만들어졌다. 먼저, 아래 [그림 Ⅲ-1]과 같이 기하-산술적 패턴의 첫 번째 그림들(이하 '처음 그림')이 제시되었다. 이후 1번 문제에서 처음패턴의 그림n의 바둑돌의 개수를 구하는 문제를 제시하였다.

그림1 그림2 그림3

[그림 Ⅲ-1] 처음 패턴

문제2에서는 처음패턴의 2014번째 바둑돌의 개수를 구하는 문제를 제시하여 처음패턴에 대해 구한 식을 구체화하는 경험을 제공하고자 하였다. 문제3부터는 처음패턴에서 시작하는 위치를 지정하여 그 위치에서 시작하는 '새로운 패턴의 n번째 바둑돌의 개수'(이하 '새로운 패턴의 식')를 구하는 문제를 제시하였다. 하지만, 1번문제와 달리 그 새로운 패턴의 처음 그림은 제시되지 않았다. 예를 들어, 문제3은 처음패턴의 그림2에서 시작하는 새로운 패턴의 식을 구하는 문제이다. 처음패턴의 시작하는 위치를 각각 그림2(문제3), 그림10(문제4), 그림100(문제5), 어떤 그림(문제6), 그림$m$(문제7) 순으로(Radford, 2000) 제시하여 새로운 패턴의 식을 구성하도록 하였다. 특히, 문제6에서는 이전 문제들과 달리, 처음패턴에서 시작되는 그림의 위치를 구체적인 그림수가 아닌 일상적인 용어로'어떤 그림'으로 제시하여 처음패턴에서 시작하는 위치는 의미상 정해지지만 구체적으로 제시되지 않았다. Schoenfeld & Arcavi(1988)는 산술에서 대수로의 자연스러운 이행을 위해 문자기호를 도입하는 단계에는 일반화된 성질을 곧바로 표준적인 상징체계를 이용하여 형식화하기보다는 학생들이 사용하는 일상적인 어휘로 그 일반화를 표현하는 기회를 제공할 필요가 있다고 주장했다. 이 문제는 학생들에게 매개변수의 사용을 자극하도록 의도된 것으로(Bardini et al., 2005), 이전에 해결했던 절차를 일반화하여 처음패턴의 어떤 그림의 위치에 대응하는 바둑돌의 개수를 새로운 패턴의 그림1의 바둑돌의 개수로 고려한 다음, 새로운 패턴의 식을 구할 수 있는지를 살펴본다. 또한 여기서 실제로 학생들이 매개변수를 대수적으로 표현할 수 있는지, 매개변수로 사용된 문자와 다른 문자 n사이에 의미를 구별할 수 있는지를 초점을 두고 살펴볼 것이다. 아래 <표 Ⅲ-1>은 상기한 과제 계열을 요약하여 제시하였다.

<표 Ⅲ-1> 과제 계열

| 문제 | 처음그림에서 시작하는 위치 | 패턴 일반화 탐구 유형(Radford, 2000) | |
|---|---|---|---|
| 문제1과 2 | 그림1 | 산술적 탐구 | 처음패턴의 식을 구성하여 적용하기 |
| 문제3 | 그림2 | | 대상명칭의 상대성 인식하기(그림2→그림1) |
| 문제4와 5 | 그림10, 그림100 | | 작은 수(그림10)와 큰 수(그림100)에 익숙해지기 |
| 문제6 | 어떤 그림수 | 일상적인 언어에서 일반화의 표현 탐구 | |
| 문제7 | 그림m | 일반성을 표현하기 위해 표준적인 대수적 상징 사용 | |

## 2. 연구 참여자

본 연구는 경남에 소재한 중학교 3학년 한 교실을 사례로 선정하였다. 이 중학교는 현재 분교장으로 전교생 35명중 3학년은 모두 15명으로 이루어져 있다. 연구에 참여한 학생들의 담임 및 교과담임선생님과의 면담을 통해, 대부분의 학생들이 사교육 의존도와 선행학습정도가 낮고, 교과서 중심의 기본학습에 충실하다는 것을 알 수 있었다. 또한 모든 학생들이 상호간의 친밀도가 높고, 수업참여가 적극적이며, 그들 스스로 토론하는 문화가 잘 형성되어 있었다.

본 연구자는 매개변수의 도입에 있어 선수학습 요소에 대해 언급한 Sfard의 이론적 근거를 바탕으로 일차함수에 대한 학습을 마친 중학교 3학년을 연구참여자로 선정하였다. 우리나라 중학교 3학년 학생들은 이미 일차함수에 관한 학습이 이루어진 상태이고 특히, 중학교 2학년 교과서에서 일차함수의 일반형을 $y=ax+b$ $(a,b\text{는 상수}, a\neq 0)$(좋은책 신사고 중2, p.120)으로 표현하여 매개변수가 암묵적으로 사용되고 있다.

본 연구자는 이 중학교를 졸업한 교육경력 5년의 석사과정생으로 현재 대학원 파견을 임명받은 상태이다. 본 연구자는 이 학교에서 수학교과 방과후수업 교사로 4주간 수업을(1차시당 45분, 총 20차시) 진행하였고, 본 연구는 그 수업 중 17, 18차시에 해당하는 부분에 초점을 두고 분석하였다. 본 연구자는 학생들과 함께 수업에 참여하여 과제계열에 따라 수업을 진행해 나가는 동안 안내자, 질문자, 촉진자의 역할을 수행하였다. 특히, 수업을 안내하는 동안, 학생들로부터 발화되거나 작성된 담론에 대해 반성적 되묻기(reflective tosses)(Schoenfeld, 2010)를 통해 그들이 사용하는 담론을 명료화 하도록 질문하고, 개인적인 풀이를 다같이 고려해볼 수 있도록 학생들의 의미 있는 발화를 의도적으로 되묻기하여 반성을 촉진하는데 주의를 기울였다.

이 수업에 참여한 학생들의 매개변수에 관한 대수적 일반화 활동 가운데, 1모둠에 초점을 두고 분석하였다. Vygotsky(1986)는 관념적인 대상에 대한 우리의 의식과 이해는 그 대상을 이해하고 있는 타인의 의견과 대립하는 것을 통해서만 가능하다고 주장하였다. 또한, Radford et al.(2007)는 수학적으로 사고하는데 있어 학생들은 기본적으로 쓰기의 영역에 국한되기 보다는 다른 다양한 기호학적 수단(예를 들어, 말, 제스쳐, 수학적 상징, 그래프, 인공물등)을 사용한다고 주장했다. 이로부터, 본 연구자는 수업관찰을 통하여 수업에 참여한 학생들 가운데, 다른 의견이 활발하게 제기되어 대립하고, 적극적으로 논의하며, 다양한 기호학적 수단을 사용한 1모둠의 대수적 일반화 활동을 본 연구의 사례로 선정하는 것이 대수적 일반화 과정을 이해하는데 가장 적합할 것으로 판단하였다. 이 모둠은 SH, HS, SS로 이루어져 있다.

## 3. 자료의 수집 및 분석

본 연구는 매개변수에 관한 대수적 일반화 과정을 분석하기 위해 사례연구방법(Stake, 1995; Yin, 2009)을 사용하였다. 먼저 공동연구자와 매개변수를 필요로 하는 패턴 일반화과제를 설계하여 이를 바탕으로 본 연구자가 수업을 진행해 나갔다.

Radford(2013)는 학습과정에서 교사 혹은 동료들과의 상호작용의 역할을 강조하였다. 이에 대해, 본 연구자는 4개의 모둠을 조직[4]하여 학생들이 함께 활동하고, 토론하면서 다른 아이디어와 해법을 교류할 수 있도록 조장하였다. 또한,

4) 네 모둠은 각각 3(1모둠, 여자), 4(2모둠, 여자), 4(3모둠, 남자), 4(4모둠, 남자)명으로 구성되었다.

<표 Ⅲ -2> 17,18차시 수업전개

| 차시 | 흐름 | 수업전개 |
|---|---|---|
| 17차시 | 처음패턴 식 구성하기 | 문제 1과 2 : 개인별풀이→소그룹토론 |
| | 대상명칭의 상대성 인식하기 | 문제 3 : 개인별풀이→소그룹토론→ 전체토론 |
| | 작은 수 문제 | 문제 4 : 개인별풀이→소그룹토론→ 전체토론 |
| 18차시 | 큰 수 문제 | 문제 5: 개인별풀이→소그룹토론→ 전체토론 |
| | 어떤 그림수 문제 | 문제 6 : 개인별풀이→소그룹토론→ 전체토론 |
| | 표준적인 대수적 표현 문제 | 문제 7 : 개인별풀이→소그룹토론→ 전체토론 |

교실내의 토론이 활성화될 수 있도록 하기 위해, 본 연구의 수업전개(<표 Ⅲ-2>)는 개인별 문제풀이, 모둠별 토론, 교실전체 토론의 계열을 하나의 소주기(mini-cycle)(Cobb, 1995)로 하여 한 차시당 2~3회의 소주기가 반복되어 진행되었다. 본 연구자는 학생들이 각 문제를 개별적으로 해결할 수 있도록 한 다음, 그들이 사용하는 언어로 자유롭게 자신의 해결방법을 모둠동료들에게 설명하고, 다양한 방식을 비교해보고, 모둠내에서 결정한 효율적인 방식을 전체학급에 발표하여 함께 논의하면서 그들 스스로 수학을 만들어나가는 분위기를 조성했다.

교사 연구자는 과제에 대한 학생들의 해결과정에서 일어나는 오류와 그것을 수정해가는 과정을 확인하기 위해 수업에 앞서 활동지를 작성하는 요령에 대해 안내하였다. 먼저, 개인별 풀이에서 검정색 볼펜을 이용하여 자신이 풀이한 과정을 상세하게 기술할 수 있도록 하였으며 풀이에 오류를 생겨 수정해야 할 경우 두 줄만 긋도록 했다. 또한, 모둠토론과 전체토론을 마치고 나서 생각에 변화가 생겨 자신의 풀이를 수정하고 싶을 때, 각각 파랑색과 빨강색 볼펜으로 수정할 수 있도록 안내했다. 이를 위해 교사연구자는 학생들에게 삼색 볼펜을 제공했다. 학생들이 작성한 활동지는 매 수업을 종료할 때마다 수집한 후, 모두 스캔하여 이미지로 저장되었다.

Radford et al.(2007)는 학생들의 수학적 사고과정은 학생들이 작성한 것(그들이 작성한 식)만으로는 완전하게 이해할 수 없다. 그들은 수학적으로 사고하는데 있어 학생들은 기본적으로 쓰기의 영역에 국한되기 보다는 다른 다양한 기호학적 수단을 사용한다고 주장하면서, 학생들의 수학적 경험에 기반하는 다양한 기호학적 체계를 이해하기 위한 노력을 기울여야 한다고 주장하였다(p.526). 이에 대해, 본 연구자는 학생들의 다양한 기호학적 수단을 확인하기 위해 매 수업마다 네 모둠 각각에 캠코더와 녹음기를 설치하여 녹화와 녹음이 이루어졌고, 교실 전체에도 녹화가 이루어졌다. 녹화, 녹음된 모든 파일은 전사하여 엑셀파일로 저장되었고, 녹화된 자료에서 유의미한 화면은 캡쳐하여 이미지 파일로 저장되었다. 또한 본 연구자가 직접 작성한 현장일지도 분석을 위한 자료로 추가되었다. 이러한 다양한 자료에 기반한 분석은 본 연구의 내적 타당도와 신뢰도를 높이기 위한 삼각검증법으로 볼 수 있다(Merriam, 1998). 또한, 연구진의 분석과 해석과정에 대해 동료 검토을 거쳐 연구의 타당도를 높였다(ibid, 1998).

자료의 분석과정은 선행연구에 의한 매개변수의 대수적 일반화와 매개변수 개념에 관한 이론적 배경을 바탕으로 이루어졌다. 연구진은 구체적인 산술에서 대수적 일반화로 나아가는 과정에서 학생들로부터 사용되는 전략에 초점을 두고 분석을 실시하였다. 특히, Radford et al.(2007)

는 특정한 것에서 일반적인 것으로 나아가는 세 가지 전략을 제시하였다. 첫 번째 전략은 특정한 하나의 $p$를 수많은 대상들의 집합 $\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$의 대표원으로 보는 것이다. 두 번째 전략은 $p$를 은유적으로 보는 것이다. 세 번째 전략은 특정하지만 일반적인 구조의 전달자로 $p$를 역동적인 방식으로 보는 것이다(p.511).

Radford et al.(2007)는 학생들의 대수적 표현은 수학적 활동을 하는 동안 생성되는 다양한 기호학적 수단들이 서로 긴밀하게 엮이는 가운데 생성된다고 주장하였다(p.526-527). 이에 대해 본 연구진은 대수적으로 표현하는 과정에서 학생들로부터 사용되는 기호학적 수단에 초점을 두고 분석하였다.

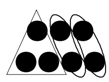
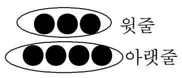
## Ⅳ. 연구 결과

본 연구의 목적은 학생들이 기하-산술적 패턴 과제로부터 매개변수를 어떻게 대수적으로 일반화하는지와 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인하는 것이다. 더불어, 본 연구진이 개발한 패턴 일반화 과제를 통해 학생들이 매개변수개념에 대해 의미 충실한 학습으로 나아갈 수 있는지를 확인하는 것이다. 본 연구에서는 기하-산술적 패턴과제로부터 매개변수를 대수적으로 일반화하는 활동 가운데, 산술에서 대수로 이행하는 어려움과, 이를 극복하는 과정에서 어떻게 일반성을 보게 되는지, 그 과정으로부터 매개변수에 대한 의미 충실한 학습이 일어나는지, 그리고 이 모든 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인할 수 있었다. 특히, 학생들은 전형적인 예로 작용하는 특정한 예로부터 일반적인 것으로 나아갈 수 있었고, 다시 일반적인 것을 특수한 경우로 옮겨 살펴보는 가운데 대수적인 표현을 반성하고 정교화해 나가는 과정을 통해 매개변수 개념에 대한 의미충실한 학습이 이루어지는 것을 확인할 수 있었다. 이에 이 장에서는 대수적 일반화가 일어나는 과정과 그 어려움을 (1) 산술에서 대수로의 이행의 어려움, (2) 이를 극복하기 위해 전형적인 예를 통한 일반성 보기, (3) 대수적으로 일반화하는 가운데 매개변수 개념에 대한 의미충실한 학습으로 나아가는 과정의 순으로 제시한다. 한편, 본 연구에서 매개변수를 대수적으로 일반화하도록 자극하는 문제6에 초점을 두고 분석을 실시했지만, 이전 과제(문제1~문제5)들은 문제6을 해결하는 데 산술적인 맥락을 제공하였다. 문제6에 대한 학생들의 풀이에 이해를 제공하는 산술적인 맥락을 간단히 소개한 후 문제6에 대해 자세하게 분석한다.

### 산술적 맥락(문제1~문제5)

처음 패턴에 대해 1모둠의 세 학생(SH, SS, HS) 모두 그림n의 바둑돌 개수에 관한 문자식을 용이하게 작성하였다. <표 Ⅳ-1>은 학생들이 처음 패턴의 식을 구성하는 방법을 보여준다.

<표 Ⅳ-1> 처음패턴의 식을 구성하는 방법

| 처음 패턴 구성 방식 | 학생 | 그림3에서 설명 예 | 그림n의 개수 |
|---|---|---|---|
| 그림1의 개수 +2×단위개수 | HS, SS |  | 3+2(n-1) |
| 윗줄+아랫줄 | SH |   | n+(n+1) |

SS와 HS는 처음 패턴의 그림1 이후부터 그림수(예를 들어, 그림1, 그림2에서 1,2에 해당하는 수)가 1씩 증가할 때 마다 바둑돌이 2개씩 늘어나는 것으로 파악하였다. 각 그림의 바둑돌 3개를 묶음(△)으로 고정시키고 2개씩 늘어나는 부

분()을 단위로 고려하여, 단위 개수는 그림수에서 1을 뺀 값과 같은 것으로 파악하였다. 그런 다음, 이 절차를 일반화하여 그림수가 n인 경우에 대해 3+2(n-1)으로 작성하였다. SH는 SS, HS와 달리, 각 그림에서 배열된 바둑돌을 윗줄과 아랫줄로 구분한 후, 윗줄의 바둑돌의 개수는 그림수와 같고 아랫줄은 윗줄의 개수보다 하나 더 많은 것으로 파악하여 그림수가 n일 때, n+(n+1)으로 작성하였다. 처음 패턴의 그림n의 바둑돌 개수를 구하는 방법은 문제6까지 일관적으로 적용되었다.

문제2에 대한 풀이에서, SS와 HS는 그들이 구한 처음 패턴의 식 3+2(n-1)에 2014를 대입하여 바둑돌의 개수를 구한 반면, SH는 자신이 구한 처음 패턴의 식에 대입하지 않고, 이전의 사용한 절차를 적용하여 즉, 윗줄은 2014개가 있고 아랫줄은 윗줄보다 하나가 더 많다는 것을 이용했다.

학생들은 문제3에 대해 처음에는 그 의도를 제대로 파악하지 못했다. 아래의 <표 Ⅳ-2>에서 SS와 SH가 문제3을 읽은 후, 문제의 의도를 파악하는데 어려움을 나타내는 전사내용이다.

<표 Ⅳ-2> 문제3의 조건 이해의 어려움

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 34 | SS | 뭔 소리야? 나 문제가 이해가 안돼! 잠깐만, 잠깐만..(문제3을 큰소리로 읽는다) what? 이게 무슨 소리? |
| | … | … | … |
| | 39 | SH | 무슨 말인지 모르겠다. 이게 무슨 뜻일까? |

문제3은 처음패턴의 그림2에서 시작하는 새로운 패턴의 식을 구하는 문제로, 여기서 새로운 패턴의 각 바둑돌 그림에 대응하는 그림수는처음패턴의 각 바둑돌 그림에 대응하는 그림수와 구별되어야 한다. 즉, 새로운 패턴의 n번째 바둑돌 그림은 처음 패턴의 그림(n+1)의 바둑돌의 그림과 같다. 이와 같이 하나의 바둑돌 그림이 주어진 조건에 따라 그 상대적인 위치가 달라 질 수 있다. Bardini et al.(2005)는 이것을'대상 명칭의 상대성'이라고 명명하고, 학생들이 이러한 대상 명칭의 상대성을 인식하는데 큰 어려움을 겪는다고 보고한 바 있다.

문제3에 대한 1모둠 토론에서 새로운 패턴에 대해 SH와 HS로부터 두 가지 다른 해석이 시도되었다. 두 가지 다른 해석에 대한 모둠토론의 전사는 다음 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 문제3에 대한 학생들의 해석 시도

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 48 | SH | 봐봐 이 말 아이가? 그냥 (처음 패턴의 그림1을 가리키며)여기부터 시작하는 거랑, (그림2를 가리키며)여기부터 시작하는 거랑. 근데 식은 똑같지 않나? 그렇게 하면..아닌가? |
| | … | … | … |
| | 69 | HS | 새로운 패턴은 이거부터(처음 패턴의 그림2를 가리키며) 그림1이란 소리 아닌가? |
| | … | … | … |
| | 86 | SS | (SH에게 질문하며)근데 왜 똑같은데? |
| | 87 | SH | 개수가 똑같고, 이거 그림숫자가 같으니까. 규칙도 두개씩, 두개씩, 두개씩 하니까. 같지! |

위 전사(<표 Ⅳ-3>)에서 SH는 처음패턴의 식과 새로운 패턴의 식이 동일하다는 추측을 제시하고 있고, HS는 새로운 패턴은 처음패턴의 그림2를 그림1로 바꾸어야 하고, 그로부터 새로운 패턴의 식이 바뀐다는 것을 암시하고 있다. 여기서, SH는 처음 패턴과 새로운 패턴의 바둑돌 그림의 상대적인 위치를 제대로 구별하지 못하고

있다는 것을 알 수 있다. 한편, HS는 SH와 다른 의견을 제기했지만, 자신의 추측에 대한 논거나 SH의 추측에 대해 어떤 반박도 제시하지 못했다. 문제3에 대한 1모둠 토론의 결과는 하나의 의견으로 수렴하지 못한 채, SH의 전체 발표로 이어졌다.

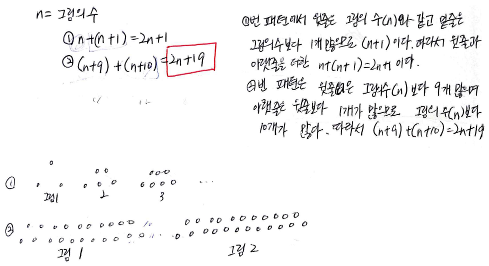
SH의 전체 발표에 대한 전체 논의 중에 2모둠에서 SH와 다른 의견을 제기하였다. 2모둠의 YS는 다음 전사(<표 Ⅳ-4>)와 같이 1모둠의 HS와 동일한 추측을 제기하였다.

<표 Ⅳ-4> 문제3에 대한 SH와 다른 YS의 의견

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 2 | 174 | YS | 그림2에서 출발하는 거니까.. n을.. 저거 그림2를 그림1로 잡아야 되니까 식이 바뀌어야 될 것 같은데.. |
| | 175 | T | YS. 뭐라고 말했죠? |
| | 176 | YS | 저 그림2에서 출발한다고 했으니까, 저 그림2는 그림2가 안되고 그림1이 되는 거죠. |
| | … | … | … |
| | 196 | YS | 어. 그럼. 저거는 2n 플러스 1이 아니라 2n 플러스 3이 되어야 해요. |

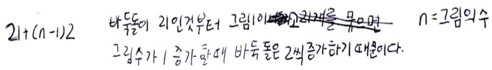
두 가지 서로 다른 추측에 대한 전체 토론의 결과 SH의 의견보다 YS의 의견이 더욱 적합하다는 합의가 이루어졌다. 처음패턴의 그림2에서 시작되는 새로운 패턴에 대해 합의된 내용은 처음패턴의 그림2를 그림1로 바꾸어야 하고, 그로부터 새로운 패턴의 식은 처음 패턴의 식과 같은 것이 아니라 달라져야 한다는 것이었다. 이러한 전체토론의 합의의 결과는 그들이 직접 만든 사회-수학적 규범(socio-mathematical norms)에 해당한다(Yackel & Cobb, 1996). 1모둠에 SH 역시 전체토론으로부터 합의된 결과를 받아들여 문제3에서 새로운 패턴에 대해 처음에 작성한 식 2n+1에서 2n+3으로 수정해 나갔다. 문제3에서 전체토론으로부터 이루어진 전체 합의의 결과는 모든 학생들이 문제 4,5에 대해 즉각적인 풀이로 나아갈 수 있도록 하였다.

문제4에 대해 SH는 먼저 처음패턴의 그림10에 해당하는 바둑돌 그림을 직접 그린 다음, 그 그림 아래에 “그림1”이라고 작성했다. 그런 다음, 그 그림의 윗줄에 있는 바둑돌의 개수를 손가락으로 하나씩 짚어가며 헤아린 후, 문제1에서 사용한 전략(윗줄+아랫줄)을 일반화하여 아래 [그림 Ⅳ-1]와 같이 새로운 패턴의 식 (n+9)+(n+10)을 완성하였다.



[그림 Ⅳ-1] 문제4에 대한 SH의 풀이

반면, HS와 SS는 SH와 달리 처음 패턴의 그림10의 바둑돌 그림을 그리지 않고 처음패턴의 식 2n+1에 10을 대입하여 처음패턴의 그림10의 바둑돌의 개수를 구한 후, 문제1에서 사용한 전략을(그림1의 개수 + 2×단위개수) 일반화하여 적절한 식을 완성하였다. 아래 [그림Ⅳ-2]은 HS의 문제4에 대한 풀이를 보여준다.



[그림 Ⅳ-2] 문제4에 대한 HS의 풀이

문제4에 대한 HS의 풀이([그림 Ⅳ-2])와 SS의 모둠발표에 대한 전사(<표 Ⅳ-5>)에서 알 수 있듯이, SS와 HS는 처음 패턴의 그림10의 바둑돌

의 개수를 아는 것은 새로운 패턴의 식의 구성에서 필수적이었고, 그 개수를 구하기 위해 처음 패턴의 식 2n+1이 사용되었다. 하지만, 문제4에 대한 SS의 발표(<표 Ⅳ-5>)에 대해, “왜 21갠데?”(전사 302), “어떻게 알아?”(전사 305)와 같은 SH의 물음으로부터, SH는 처음 패턴의 그림10의 바둑돌의 총 개수를 알고 있지 않고, 또한 처음 패턴의 식은 사용되지 않았다는 것을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-5> 문제4에 대한 SS의 발표

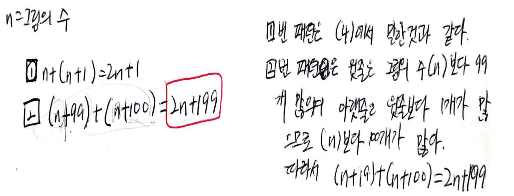
| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 301 | SS | 그러니까.. 그림10일 때 21개니까.. |
| | 302 | SH | 왜 21갠데? |
| | 303 | SS | 아니. 처음 제시된 패턴에서 그림10일 때 총 개수가 21개다이가? |
| | 304 | HS | 음. |
| | 305 | SH | 어떻게 알아? |
| | 306 | SS | 계산을 해봤지! 그림10이니까 처음패턴의 식에다가 10을 대입하면 21개 나온다이가? |

아래의 전사(<표Ⅳ-6>)에서 SH는 문제4에 대한 HS의 해결 방법에 대한 이해의 어려움을 보여주고 있다. SH는 모둠 동료들의 풀이방법을 듣고, 자신의 풀이에 대한 확신 때문에 다른 동료들의 풀이 방법에 대한 이해가 어렵다고 자인했다. 이와 관련하여, 여러 선행연구에서 자신이 사용하는 전략에 얽매여 다른 동료들의 방법을 이해하거나 새로운 방법을 고려하는데 큰 어려움을 겪는다고 보고된 바 있다(Mason, 1996; Lee, 1996).

<표 Ⅳ-6> 문제4에 대한 HS의 모둠 발표

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 420 | HS | 나는 여기 이 그림1이 21개니까 그림1부터 계속 두 개씩 늘어나서, n마이너스 1 곱하기 2를 곱해줬지. |
| | 421 | SH | n. 마이너스. 1. 곱하기 2? |
| | 422 | SS | (SH에게 설명하며)21로 잡고! 윗줄에 10개 밑에 줄에 11개! 그 뒤부터 두 개씩 늘어난 다이가? |
| | 423 | SH | ...식이 뭐지? (HS가 작성한 식을 보면서)21플러스..? |
| | 424 | SH | 난 내께 너무 편해서 딴 애들 걸 이해를 잘 못하겠다. 내께 너무 편한 것 같다! 내한테는.. 너무나 도! |

문제5에 대해, SS와 HS는 문제4에서 해결했던 절차를 그대로 적용하여 식을 용이하게 완성해 나갔다. SH도 역시 문제4에서 자신이 사용했던 절차를 적용했지만, 아래 [그림 Ⅳ-3]와 같이 처음패턴의 그림100을 구체적인 그림으로 나타내려고 하지 않았고, 문제4에서 사용했던 제스쳐는 더 이상 나타나지 않았다.




[그림 Ⅳ-3] 문제5에 대한 SH의 풀이

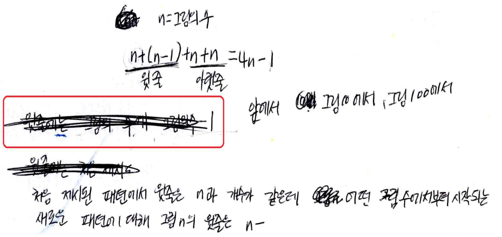
이러한 SH의 행동의 변화요인으로 그림100이라는 큰 수가 유의미하게 작용한다는 것을 보여준다. 수 패턴 일반화 연구에서 구체적으로 지각할 수 있는 것에서 추상적인 것으로 이행해가도록 자극하는 과제로 ‘큰 수(Radford, 2003)’의 중요성을 강조하였다. 또한, SH는 그림100을 조작하기 위해 그림10에서와 같이 구체적인 그림으로 표현하는 것이 불가능한 것은 아니지만, 문제4를 다룬 경험으로부터 구체적인 그림으로 나타내려는 시도와 바둑돌을 하나씩 헤아려 나가는

제스쳐는 사라지고, 윗줄에 놓인 바둑돌 전체 개수와 그림수로 주의력을 옮겨 그 둘 사이에 본질적인 관계를 부각시키고 있는 것이다. 이와 관련하여, 여러 선행연구자들은 특정한 성질을 두드러지게 하고 다른 나머지는 무시하는 주의력의 변화를 일반화에서 매우 중요한 것으로 언급하였다(Davydov, 1990; Gattegno,1990; Mason, 1996; Mason & Pimm, 1984).

## 1. 산술에서 대수로의 이행의 어려움

문제6은 처음패턴에서 시작되는 그 위치는 의미상 고정되지만 그 위치에 해당하는 그림수는 이전 과제들과는 달리 실제적인 수는 아니다. 즉, 처음 패턴의 어떤 그림에 대응하는 그림수는 고정되지만 아직 정해지지 않은 수로 매개변수에 해당한다(Bardini et al., 2005; Mason& Pimm, 1984).

먼저, SH는 문제6을 해결하는 동안 문제5의 풀이를 반복해서 점검하는 가운데 결국 식([그림 Ⅳ-4])을 완성하였다. 그러나, 이전 문제들과는 달리 자신이 작성한 식에 대해 확신을 갖지 못하고 계속 이전 문제로 돌아가 확인하는 모습을 보였다.




[그림 Ⅳ-4] SH의 문제6에 대한 풀이

아래 <표 Ⅳ-7>은 문제6에 대한 SH의 전체발표의 전사내용이다. SH는 문제6에서 새로운 패턴의 식을 완성하기 위해 이전 문제에서 구한 식에 바탕을 두고 있었다. SH가 문제4,5에서 작성한 새로운 패턴의 식에서 '(n+9)'와 '(n+99)'는 각각 새로운 패턴의 그림n의 윗줄에 해당하는 바둑돌의 개수에 관한 식이다. 이로부터, 문제6에서 새로운 패턴의 그림n의 윗줄의 바둑돌의 개수에 관한 식 n+(n-1)을 작성해 나갔다. SH가 작성한 식 n+(n-1)에서 앞에 있는 'n'은 (n+9)와 (n+99)의 각각의 n으로부터 유추한 결과로 작성되었고, 뒤에 있는 '(n-1)'은 (n+9)와 (n+99)의 각각에 있는 9와 99에 대응하여 만들어진 식이다.

<표 Ⅳ-7> 문제6에 대한 SH의 전체 발표

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 전체 발표 | 795 | SH | 어..(그림10에 밑줄을 그으며)10에서 시작되는 새로운 패턴에서는 (칠판에 작성한 식 (n+9)+(n+10)을 가리키며)이런 식이 나왔고, (그림100에 밑줄을 그으며)100에서 시작되는 패턴에서는 (작성한 식 (n+99)+(n+100)을 가리키며)이런 식이 나왔는데, ((n+9)에 밑줄을 그은 후, "윗줄"이라고 작성하면서)이거는 윗줄이고, ((n+99)에 밑줄을 그으며) 이것도[윗줄].. ((n+10)에 밑줄을 그으며)이거랑 ((n+100)에 밑줄을 그으며)이거는 ((n+10)아래에 "아랫줄"이라고 작성하며)아랫줄. |
| | 796 | SH | 그러면..(칠판에 자신의 말을 작성하며)그림 n에서..(혼잣말로)이 말이 아닌가? (작성한 "그림n에서"을 지운다) 그러면 이 문제에서는 ((n+9)에 있는 n에 마커로 갖다 대며)n. ((n+99)에 있는 n에 마커를 옮기며)n. (칠판에 작성하며)n. 그리고 ((n+9)와 (n+99)에 있는 9와 99에 동그라미를 그리며)이거는 그림수에서 1을 뺀 거(SB가 SH와 동시에 "1 뺀거"라고 외친다). |
| | 797 | SH | 그러니까 (작성한 n옆에 이어 +(n-1)작성하며)플러스 n 마이너스 1.(2모둠의 SB가 들리지 않게 중얼거림.) 그럼 (자신이 작성한 식에 밑줄을 긋고)이거는 ("윗줄"이라고 작성하면서)윗줄 |

여기서 9와 99는 각각 그림10에서 10-1=9, 그림100에서 100-1=99와 같이 만들어진 수로, 처음패턴의 어떤 그림에 대응하는 그림수에서 1을 빼면 된다는 생각으로 이어지게 했다. 그 다음, SH가 처음패턴의 '어떤 그림에 대응하는 그림수'(이하 '어떤 그림수')를 'n'이라고 정하게 되면서 새로운 패턴의 그림n의 윗줄의 바둑돌의 개수는 n+(n-1)로 작성되었다. 새로운 패턴의 그림n의 아랫줄에 나열된 바둑돌 개수에 관한 식 n+n 은 이전 문제에서와 동일하게 윗줄의 식에 1을 더함으로써 작성되었다. 결국, 새로운 패턴의 식은 n+(n-1)+n+n으로 작성한 후, 식을 정리하여 4n-1이라는 식에 도달하였다. 여기서 SH는 처음패턴의 어떤 그림수를 지문에 제시된 '그림n'의 n과 동일한 문자로 두고 식을 완성하였다. 특히, 문제6에 대한 SH의 풀이에서([그림 Ⅳ-4]) 자신이 작성한 식에 대한 설명 "n=그림의 수...윗줄에는 그림의 수에 그림의 수 - 1"은 그의 문자 선택의 오류를 분명하게 보여주고 있다. 또한, 문제6에 대한 SH의 전체 발표 전사((<표 Ⅳ-7>))중 "그림n에서.."(전사 796)라는 발화는 어떤 그림수를 n이라고 설정하고 있다는 것을 보여준다. 이러한 SH의 반응은 새로운 패턴의 그림의 위치를 나타내는 문자n(변수)과 '처음패턴의 어떤 그림에 대응하는 그림수(이하 '어떤 그림수')'의 서로 다른 역할을 구분하지 못한다는 것을 확증하는 것이다.

아래의 전사(<표 Ⅳ-8>)는 SH의 전체발표에 대해 다른 모둠 동료들이 질문을 제기하면서 이루어지는 대화내용이다. 2모둠의 SB는 SH의 풀이에 대한 오류를 파악하여, 그의 발화 "n 플러스 다른.. 어떤 그림의 수라고 잡아야.."(전사 816)에서 어떤 그림수는 지문의 조건 '그림n'의 문자 n과 구별해야 한다는 것을 암묵적으로 설명하고 있지만 SH는 파악하지 못했다. 이에 대해 다시 SB는 SH가 작성한 식에 대해 어떤 그림수가 10인 경우로 구체적인 반례를 제시하지만, 여전히 SH는 깨닫지 못했다. 특히 SB의 발화 "그러면 n이 10이 되는 거잖아."(전사 818)에 대한 SH의 수긍하는 응답 "응."(전사 819)으로부터 SH가 사용해온 문자 n의 용법을 보여주고 있다. 이것은 2모둠에서 YS의 문자 n에 대한 의미의 명료성을 요구하는 질문에 대한 SH의 반응에서도 나타났다. 이와 같은 근거로부터, SH는 문자 n을 변수가 아닌 특정한 하나의 값을 취하는 문자로 취급하고 있는 것으로 판단할 수 있다.

<표 Ⅳ-8> 문제6에서 SH의 전체 발표에 대한 논의

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 전체 토론 | 816 | SB | 야! 그 저기서 n플러스 n이 아니라, n 플러스 다른 ..어떤 그림의 수라고 잡아야 돼는 거 아니가? 저것도 n마이너스 1 하면 안 되고.. |
| | 817 | SH | 뭐라고? 다시.. |
| | 818 | SB | 저기서.. (SH가 그림10에 대해 작성한 식 (n+9)+(n+10)을 가리키며)저기 n 플러스 9잖아. 근데, (SH이 작성한 식 n+(n-1)+n+n을 가리키며)그거는 10 플러스 10마이너스 1이잖아. 그러면 n이 10이 되는 거잖아. |
| | 819 | SH | 응. |
| | … | … | … |
| | 841 | YS | n이 도대체 뭔데? 그림10에서.. |
| | 842 | SH | 그림수 |
| | 843 | YS | 그럼 n은 그림수라 하면.. 그림10이라고 하면 n은 10이란 말이가? |
| | 844 | SH | 응! |

즉, SH가 사용한 '그림n'에서의 문자 n은 각각의 바둑돌 그림의 위치와 그 위치에서의 바둑돌 그림의 개수와의 관계를 일반적으로 설명하는 변수가 아닌, 어떤 특정한 하나의 그림에 대응하는 그림수를 나타내는 것으로 파악하고 있다. 이것은 이미 여러 선행연구에서 학생들이 문자를 다가명사로 사용하기 보다는 오히려 특정한 하나의 값으로 고려하고 있다고 보고된 바 있다 (Freudenthal, 1983; Mason, 1996; Chalouh & Herscovics 1988).

SH의 전체 발표에 대한 전체 논의의 결과는 어떤 그림수를 "그림n"에 관한 문자 n과 구별하여 다른 문자를 사용해야한다는 것이었다. 그러나, 전체토론은 어떤 그림수에 해당하는 문자와 지문에서 제시된 '그림n'에서의 문자n 사이에 의미나 역할의 차이에 주목하는 논의로는 나아가지 못했다.

<표 Ⅳ-9>는 SH가 전체 토론의 결과를 받아들이고 다른 문자의 필요성을 언급한 이후에 자신의 식을 수정해 가면서 일어나는 전사내용이다.

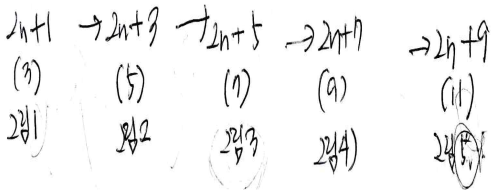
다음에 오는 전사(<표 Ⅳ-9>)에서 SH가 어떤 그림수를 x라고 두고, 바뀐 새로운 패턴의 그림n의 바둑돌의 개수에 대해 수정한 식은 x+(n-1)+x+n 이었다.

이에 대해 2모둠의 YS와 SB가 n과 x가 바뀌었다는 것을 지적하지만, SH는 그 의미를 이해하지 못하고 자신의 자리로 돌아갔다. 여기서 SH는 여전히 문자n과 x의 역할을 제대로 이해하지 못하고 있다는 것을 알 수 있다. 자리로 돌아간 SH가 "내 방법으로 하면 안 되겠다"라고 발화하면서 자신이 이전과제에서 편하게 적용하여 해결했던 전략을 버리고, HS와 SS가 사용한 전략에 주목하게 되었다.

1모둠의 SS 또한 문제6을 해결하는데 어려움을 보였다. 문제4,5에서는 처음 패턴에서 시작하는 위치가 구체적인 수로 명시되어 용이하게 해결할 수 있었지만, 문제6에서 "처음패턴의 어떤 그림"이라는 조건은 이전에 사용했던 전략을 일반화시켜 나가는 것을 방해했다. 결국, SS는 문제6을 해결하기 위해 이전에 사용한 방법을 버리고, 새로운 방법으로 해결을 시도하였다. 아래 [그림 Ⅳ-5]은 SS가 문제6을 해결하기 위해 작성한 내용이다.

<표 Ⅳ-9> SH의 문제6 대한 식의 수정

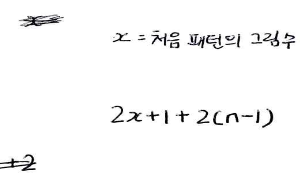
| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 전체 토론 | 886 | T | SH는 어떻게 생각해요? |
| | 887 | SH | 다른 문자가 필요한 것 같아요! |
| | 888 | T | 그럼 다시 정리해 볼 수 있겠어요? |
| | 889 | SH | (바뀐 새로운 패턴의 그림수=n, 어떤 수=x라고 작성하고, 자신이 어떤 수에 대한 패턴의 식 n+(n-1)+n+n이라고 작성한 식에서 맨 앞에 있는 n을 지우고, 잠시 생각하며)이거.. 아닌가? (곰곰히 생각하다가 지운 n자리에 x를 기입하고, 뒷부분에 n+n에서 앞에 있는 n을 지우고 x라고 작성한 후 식을 정리한다) |
| | 890 | T | SH가 지금 식을 다시 정리해서 작성했는데, 혹시 의견 있나요? |
| | 891 | SB, YS | 저거 x랑 n이랑 바뀌었어요. |
| | 892 | SH | ... |
| | ... | ... | ... |
| | 916 | SH | (자신의 자리로 돌아와 모둠내의 동료들에게)내 방법으로 하면 안 되겠다. |




[그림 Ⅳ-5] 문제6에 대한 SS의 풀이

SS가 문제6을 해결하기 위해 구체적으로 처음 패턴의 각 그림(그림1~그림5)에서 시작하는 새로운 패턴의 그림n에 관한 식들을 나열한 후 귀납을 시도했지만, 진전이 없자 모둠 동료들에게 도움을 요청했다. <표 Ⅳ-10>는 SS가 발화한 "뭐를 더해야.."(전사 614)에 대해 논의하면서 이루어지는 대화의 전사내용이다. SH가 "뭐"에 해당하는 수는 2의 배수가 될 것이라고 추측을 제기하지만, 어떤 그림에 대해서는 표현할 수 없다고 단언했다. 이에 대해 SS도 SH의 의견에 동의했다. SH와 SS가 "표현할 수 없다!"(전사 631)고 단정적으로 발화하는 것은 실제적인 수에서 추상적인 수로의 이행에서 수반되는 어려움을 보여주고 있다. 처음패턴에서 시작하는 위치가 구체적인 수로 정해진 경우에만 새로운 패턴의 식은 표현가능하고, 시작하는 위치가 어떤 그림인 경우, 그 어떤 그림에 해당하는 그림수는 아직 결정되지 않은 수로, 구체적으로 정해지기 전 까지는 그 어떤 수에서 시작하는 패턴의 식은 표현할 수 없다는 것이다. 이때 HS가 어떤 그림이라는 추상적인 대상을 표현할 수 있도록 "다른 문자"(전사 634)를 사용하자는 대안을 제안했다. HS가 SS에게 다른 문자를 이용해 보라는 아이디어는 SS에게 새로운 돌파구로 작용하여 처음 패턴의 어떤 그림 수를 x라고 두고 다시 식을 구성하려고 분투했지만 적절한 식을 완성해내지 못했다.

문제6에 대한 HS의 풀이를 살펴보면, SS가 모둠 동료들에게 도움을 요청하기 전, 이미 문제6에 대한 식을 완성한 상태로 모둠 토론에 참여했다. 아래의 [그림 Ⅳ-6]은 HS가 문제6에서 완성한 식을 보여준다.




[그림 Ⅳ-6] HS의 문제6에 대한 풀이

<표 Ⅳ-10> SS의 아이디어에 대한 모둠 토론

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 612 | SS | 그러니까. 여기서 보면.. 만약에 이거에서(2n+1) 이거로(2n+3) 갈려면 2를 더하고.. |
| | 613 | HS | (SS의 의도를 파악하여)아~ |
| | 614 | SS | 뭐 그런 식으로 하면 되는데. 거기다가..2n플러스 1에다가.. 뭐를 더해야 그게 맞는지 모르겠다. |
| | ... | ... | ... |
| | 620 | SH | 2의 배수? ... 안되지. 2..2를..나타낼 수 없어! |
| | ... | ... | ... |
| | 631 | SS | 그림3을 또.. (잠시 고민하다가)어! 표현할 수 없다.(웃음) 그래서 그렇지! |
| | 632 | HS | [처음 패턴의 식 2n+1에 어떤]그림숫자를 또 더하는 걸로 보면 되잖아. |
| | 633 | SH,SS | 다시 다시 뭐라고? |
| | 634 | HS | 어..다른 문자.. |

HS는 먼저 "x=처음 패턴의 그림수"라고 작성한 후, 처음패턴의 식 2n+1에 x를 대입하여 처음 패턴의 어떤 그림의 바둑돌의 개수에 해당하는 식 2x+1을 구하였다. 그런 다음, 식 2x+1을 새로운 패턴의 그림1의 바둑돌의 개수로 두고, 이전 문제에서 해결했던 방법과 동일하게 2x+1에 2(n-1)을 더하여 새로운 패턴의 식 2x+1+2(n-1)을 완성해냈다. 아래 <표 Ⅳ-11> 는 HS가 문제6에 대해 작성한 자신의 풀이에 대해 모둠 동료들에게 발표하는 전사내용이다.

<표 Ⅳ-11> HS의 문제6에 대한 모둠 발표

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 725 | SS | (HS가 작성한 식을 읽어보고)어떻게 한 건데? |
| | 726 | HS | 제일 처음에 그림1에서 바둑돌이 3개여서, 앞에 3플러스 2n..2곱하기 n마이너스 1했잖아? |
| | 727 | SH, SS | 응. |
| | 728 | HS | 그래서 [여기서도] (자신이 작성한 식에서 2x+1을 가리키며)그림1의 바둑돌의 개수..개수를 앞에 더하고, (2(n-1)을 가리키며)이걸 그대로 붙였어. |

SS와 SH는 HS가 작성한 식 2x+1+2(n-1)에서 2x+1에 대한 의미를 이해하는데 어려움을 드러냈다. 여기서, HS가 작성한 2x+1에는 두 가지 의미를 내포하고 있다. 먼저, x를 "처음 패턴의 그림수"라고 두고, 처음패턴의 식 2n+1에 x를 대입하여 얻은 식 2x+1은 처음 패턴의 어떤 그림수의 바둑돌 개수를 나타낸다. 이제 새로운 패턴의 식을 구하기 위해 이 식 2x+1은 새로운 패턴에서 그림1의 바둑돌 개수의 의미로 고려되어야한다. 즉, 2x+1에 대한 의미는 처음패턴에서의 의미(어떤 그림수의 바둑돌 개수)에서 새로운 패턴의 의미(그림1의 바둑돌 개수)로 관점의 변화가 일어나야 한다. <표 Ⅳ-12>에서 HS는 2x+1을 관점이 이동된 후자의 의미를 강조하여 모둠동료들에게 반복적으로 설명했지만, SH와 SS는 2x+1에 대해 관점이 이동하기 전인 전자의 의미에 집중하면서 HS의 의도를 이해하는데 어려움을 드러냈다.

<표 Ⅳ-12> HS 풀이에 대한 SH와 SS의 이해의 어려움

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1121 | SH | 근까.. (HS이 작성한 식에서 2x+1을 가리키며)이 앞에 거는..(자신의 활동지를 넘겨 처음 패턴의 식 2n+1을 가리키며)이거란 말이가? |
| | 1122 | HS | (자신이 작성한 식에서 2x+1을 가리키며)이게..새로운 패턴의 그림1의 개수, |
| | 1123 | SS | 아~ 근까, 처음에 제시된..응? (HS의 식에서 2x+1을 가리키며)이게 새로운 거라고? 그게? |
| | … | … | |
| | 1129 | SS | 니가 x라고 둔 게 처음에 제시된 패턴의 수..어떤 그림수를 x라고 둔거잖아? |
| | 1130 | HS | 응. |
| | 1131 | SS | 근데 금방 니가 (2x+1을 가리키며)이게 새로운 이라메? |

이러한 관점의 변화에 대한 논의는 맨 처음 문제3을 다루는 과정에서 일어났던 것이었다. 문제3에 대한 전체 토론에서 "처음패턴의 그림2를 새로운 패턴에서 그림1로 두자"는 전체 합의는 이후에 문제 4,5의 해결에서 유연하게 적용되었다. 하지만, 이전과제들에서는 처음패턴의 미리 정해진 위치나 그 위치에 대응하는 그림을 구체적인 그림이나 개수를 이용하여 실제적으로 다룰 수 있었기 때문에 그 그림을 새로운 패턴의 그림1로 바라보는 관점의 이동이 자연스럽게 이루어졌다. 하지만, 문제6에서는 처음패턴에서 정해진 그 그림을 구체적으로 지각할 수 없을 뿐만 아니라 실제적인 수로 다룰 수도 없었기 때문에 SS와 SH가 HS의 풀이를 이해하는데 어려움이 따랐다. 즉, 처음 패턴의 어떤 그림수에 대한 문자 사용은 이전에 실제적인 수에서 유연하게 적용되었던 관점의 이동을 방해했다. 특히,

SS는 문제6을 풀기 전까지 HS와 동일한 방법으로 이전 과제들을 용이하게 해결해 왔다. 그래서 교사 연구자는 SS가 문제6에 대한 HS의 설명을 듣고 그 의도를 즉시 알아차릴 수 있을 것이라 예상했지만, SH와 마찬가지로 명료한 이해에 도달하지 못했다. 이 결과는 구체적인 수에서 유연하게 적용된 절차를 추상적인 문자에 대해 일반화시켜 나가는 것은 큰 어려움이 수반된다는 것을 확증한다.

### 2. 전형적인 예를 통해 일반성 보기

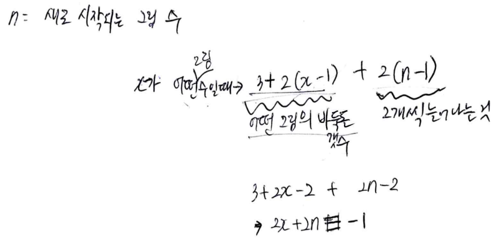
아래 <표 Ⅳ-13>는 SH가 HS의 반복적인 설명 이후에 그 식의 적절성은 인정했지만, 문자 n과 x사이에 의미의 모호성을 새로운 문제로 제기하는 전사내용이다.

<표 Ⅳ-13> 문자 n과 x의 구별의 어려움

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1256 | SS | (HS의 설명을 듣고나서)맞는거 같은데? |
| | 1257 | SH | 응. 맞는거 같은데.. 난 (HS이 작성한 식의 문자 x에 동그리마를 그리며)이거랑 (문자 n에 동그라미를 그리며)이거의 구분을 잘.. 지금 모르겠다. |
| | 1258 | SS | 나도 그 차이가 잘 모르겠어. |
| | 1259 | HS | 어떤.. |
| | 1260 | SH | (HS의 말을 자르며)어떤 그림? |

교사 연구자는 HS가 그 의미를 설명할 수 있을 것이라 예상했지만, SH와 SS는 계속 모호한 상태에 처해 있었다. 1모둠의 토론이 더 이상 진전이 이루어지지 않자, 교사연구자는 모둠 토론을 이미 마친 2모둠의 SB에게 도움을 요청했다. 교사연구자는 1모둠의 HS와 2모둠의 SB가 개인별 풀이에서 동일한 방식으로 문제6을 해결하는 것을 관찰하여, SB가 HS의 문제6에 대한 모둠 발표에 보완할 수 있을 것이라 판단했다.

아래 [그림 Ⅳ-7]은 SB[5]의 문제6에 대한 풀이를 보여준다.




[그림 Ⅳ-7] 문제6에 대한 SB의 풀이

SB가 처음 패턴과 새로운 패턴들의 식을 구성한 방식은 그림1 이후에 그림수가 1씩 증가할 때마다 바둑돌이 2개씩 늘어난다는 규칙을 이용하여 “그림1의 바둑돌의 개수+2(n-1)”와 같았다. 이 방식은 이전 문제에서 SS와 SH가 사용해 온 방식이었고, 모둠토론을 통해 SH도 이 방식을 이해하여 사용하고 있었다. SB의 풀이를 [그림 Ⅳ-6]에서 제시된 HS의 문제6에 대한 식을 비교했을 때, 처음 패턴의 어떤 그림수의 바둑돌의 개수의 표현이 달라 보이지만, HS의 표현 2x+1은 SB가 사용한 3+2(x-1)을 정리하면 같아진다는 것을 알 수 있다.

아래 <표 Ⅳ-14>는 2모둠의 SB가 1모둠의 동료들에게 다른 두 문자 n과 x에 대해 설명하는 전사내용이다. SB는 먼저 문제6에서 자신이 설정한 문자 x에 대한 의미를 설명하기 위해 문제5를 예로 들어 설명해나갔다. SB의 발화 “어떤 그림수는 그림..근까 주어진 수지!”(전사1298)에서 처음 패턴의 어떤 그림수에 대한 고정적인

5) SB는 문제6으로 넘어가기 전, 문제5(그림100)를 해결하고 나서, 바로 일반화를 시도하여 문제6에서 요구하는 답을 이미 완성하였다. SB에게 매개변수와 관련하여 일반화하여 대수적 표현으로 나아가도록 자극하는데 있어 문제5만으로도 충분했다.

<표 Ⅳ-14> SS의 문자 n과 x에 대한 설명

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1297 | SS | x랑 n의 차이를 잘 모르겠어. |
| | 1298 | SB | (문제5에서)만약에.. 이거("그림100"의 100에 동그라미를 그리며)그림100이며는..엉.. 여기서 새로 시작되는 거는, 그림100이 그림1로 되는 거고.. 어떤 그림수는 그림.. 근까 주어진 수지! 그냥.. 원래.. (문제5의 "그림100" 을 가리키며)그림.. 어떤 거지! 그림100이 어떤 수고..그게 그림1로..그림1부터 새로 시작되는 게..그게 n이고. |
| | … | … | … |
| | 1299 | SS | 근까 (문제5에 "그림100"의 숫자 100을 가리키며)이게..이게 x ? |
| | 1300 | SB | 어. 이게 어떤 그림수! |
| | 1301 | SS | 그 다음, 이게 100에서..1로 가서 새로 시작되는 거는.. |
| | 1302 | SH | 그 바뀐 패턴에서.. |
| | 1303 | SB | n! |

의미를 강조한 후, 문제5에서 그림수 100을 예로 들어 문자 x를 설명했다. 그리고 SB의 발화"그림100이 그림1로 되는 거고.."(전사1298)는 처음 패턴에서 정해진 그림수가 새로운 패턴에서 그림1로 바뀌어야 한다는 것을 강조하였다. 그런 다음, 바뀐 그림1부터 새로 시작되는 문자를 n이라고 설명했다. 여기서 SB는 문자 n과 x를 문제5의 조건을 통해 보고 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 문제5는 SB에게 전형적인 예로 작용하여 구체적인 예를 통해 일반적인 것을 보고 있는 것이다(Harel & Tall, 1991; Mason, 1996). SH와 SS에게 전형적인 예를 통한 SB의 설명은 문자 상징만을 가지고 기술한 HS의 설명보다 더욱 효과적이었다.

두 문자에 대한 의미를 구별하는 설명을 마친 후, SB는 문제6에 대한 식을 만들어가는 과정을 설명하기 위해 먼저 문제3,4,5에 대해 자신이 구성한 식과 1모둠의 동료들이 작성한 식을 비교해 나갔다. 그런 다음, 문제3,4,5 에서 새로운 패턴의 그림1의 바둑돌 개수 5, 21, 201은 처음 패턴에서 각각 그림2, 그림10, 그림100에 해당된다는 것과 처음패턴의 식은 3+2(n-1)이라는 것을 강조하였다. 그리고 나서, SB는 x를 어떤 그림수라고 할 때, 처음 패턴의 식 3+2(n-1)에서 n을 x로 대치함으로써 어떤 그림수의 바둑돌의 개수가 3+2(x-1)임을 설명해나갔다. 아래의 <표 Ⅳ-15>는 SB가 문제6에서 새로운 패턴의 그림1에 관한 식을 구성하는 과정을 설명하는 전사이다.

<표 Ⅳ-15> 식 3+2(x-1)에 대한 SB의 설명

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1319 | SB | 근까 (처음패턴의 식 3+2(n-1)에 밑줄을 그으며)이게 나오잖아. (다시 문제6으로 넘어와서)x를 ( "x가 어떤 그림수"에 동그라미를 그리며)어떤 그림수라고 두면, ("3+2(x-1)+2(n-1)"에서 3+2(x-1)에 밑줄을 그으며)이렇게 되는 거지! |
| | 1320 | SH, SS | … |
| | 1321 | SB | ("3+2(x-1)"에 x를 가리키며)n을..n을 x로 바꾸고 |

여기서 SH와 SS는 여전히 SB의 설명을 분명하게 이해하지 못하였다. 특히, SB의 발화"n을 x로 바꾸고"(전사1321)는 이전에 구체적인 수를 대입하는 절차를 바탕으로 처음패턴의 식 3+2(n-1)에서 n을 x로 대치하는 것에 주의를 기울이도록 시도했지만, 여전히 SH와 SS는 파악하

지 못했다. 이와 관련하여 Kieran(1990)은 산술적인 사고에서 대수적인 사고로의 이행에서 학생들의 어려움을 논증하기 위해 산술과 대수의 본질적인 차이를 언급했다. 그는 산술은 절차적이고 해답으로 나아가는 과정으로 인식되는 반면, 대수는 구조적이고 상징적인 표현 그 자체가 대상으로 간주되어야 한다고 주장하며, 이러한 두 가지 인식에 관한 단절이 자연스러운 이행을 방해한다고 주장하였다.

다음에 오는 전사(<표 Ⅳ-16>)는 SS와 SH가 새로운 패턴의 식에서 '3+2(x-1)'에 대한 설명을 이해하지 못하자 SB가 다시 문제3에서 구한 식을 구체적인 예로 설명하는 내용이다.

<표 Ⅳ-16> 식 3+2(x-1)에 대한 SB의 구체화

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1346 | SB | 근까.. 처음패턴에서 어떤 그림의 바둑돌 개수를 구하려면, |
| | 1347 | SS,SH | 음. |
| | 1348 | SB | 3플러스 2곱하기 n 마이너스 1 이잖아? |
| | 1349 | SH | 음. |
| | 1350 | SB | 어. 그리고 (문제3에서)여기 앞에서 보며는, ("5+2(n-1)" 에서 5를 손가락으로 가리키며)어떤 그림수의 바둑돌 개수잖아! |
| | | | (문제4 로 넘어가서 "21+2(n-1)"의 21을 가리키고, 문제5로 넘어가 "201+2(n-1)"에서 201을 가리킨다.) |
| | 1351 | SH | (SB가 가리키는 숫자를 가리키며)어! 이거! 어. |
| | 1352 | SB | 그러니까, (문제6으로 다시 돌아와서)식을 ("3+2(x-1)" 에 동그라미를 그리며)이렇게 쓰면 된다고! |
| | 1356 | SS,SB | 아~~ |

먼저 SB는 처음패턴의 식 3+2(n-1)을 상기시킨 후, 문제3에서 구한 식 5+2(n-1)에서 숫자 5를 가리키며"어떤 그림수의 바둑돌의 개수잖아!"(전사 1350)라고 발화하면서 일반적인 것을 구체적인 것을 통해 설명해 나갔다. 처음 패턴의 식 3+2(n-1)에 어떤 그림수를 대입하여 어떤 그림수의 바둑돌 개수를 구할 수 있다는 것을 예를 통해 설명한 이후, 문제4,5에서도 동일하게 적용된다는 것을 확인해 나갔다. 이러한 SB의 구체적인 예를 통한 설명으로부터 SS와 SH는 처음으로 3+2(x-1)에 대해 이해했다는 의사를 표현했다.

처음패턴의 어떤 그림수의 바둑돌의 개수에 관한 일반적인 식 3+2(x-1)을 설명하기 위해 SB의 구체적인 예를 통한 설명은 SH와 SS에게 발전적이었고 분명한 이해로 이어지게 했다. 또한, SH와 SS는 이러한 구체적인 예를 통해 일반적인 것을 보는 SB의 방식을 점유하였다. 또한, 그들이 이전에 해결한 문제들은 이제 특정한 하나의 독립적인 예가 아닌 일반적인 것을 볼 수 있도록 하는 전형적인 예로 역할하게 되었다.

이후의 SH와 SS의 발화에서 일반적인 것을 구체적인 것으로 옮겨 살펴 보고 다시 구체적인 것을 통해 일반적인 것을 보는 증거는 아래의 <표 Ⅳ-17>에서 확인할 수 있다. 아래의 <표Ⅳ -17>는 SB가 자신의 모둠으로 돌아가고 1모둠의 SH와 SS가 문제6에 대해 완성된 식을 다시 한번 정리하면서 대화하는 전사내용이다. 아래의 대화내용에서 SH의 발화 "(문자 x를 가리키며) 이게 어떤! 그림수 잖아. 그러니까 (문제5로 넘어가 지문에 그림100을 가리키며)이거.. 그림100"(전사1489)에서 어떤 그림수를 그림100으로 보고 있다는 것을 보여준다. 그리고, SS의 발화 "근까 201, 그러니까 그림100의.. 어떤 수의 바둑돌 개수"(전사1493)에서 구체적인 그림100의 바둑돌의 개수를 일반적인 어떤 그림수의 바둑돌의 개수로 고려하고 있는 것이다. SS의 발화에 이어 SH의 발화 "(문제6으로 넘어와 3+2(x-1)을 가리키며)이것도 똑같이 ("x=어떤 그림수"라고 작성된 x에 손가락을 갖다 대며)이 x를 그림수로 (식 3+2(x-1)의 x에 손가락을 옮기며)여기다가 대

<표 Ⅳ-17> SS와 SH의 문제6에 대한 식의 재정리

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1489 | SH | (문자 x를 가리키며)이게 어떤! 그림이잖아. 그러니까 (문제5로 넘어가 지문에 그림100을 가리키며)이거.. 그림100 |
| | ... | ... | ... |
| | 1493 | SS | 근까 201, 그러니까 그림100의.. 어떤 수의 바둑돌 개수. |
| | 1494 | SH | 어. (SS의 말에 이어)개수를 구하는 거잖아. (문제6으로 넘어와 '$3+2(x-1)$'을 가리키며)이것도 똑같이 ("x=어떤 그림수"라고 작성된 x에 손가락을 갖다 대며)이 x를 그림수로 (식 '$3+2(x-1)$'의 x에 손가락을 옮기며)여기다가 대입하면.. 그 패턴.. (그림1을 강조하기 위해 책상을 치며)그림1의 ('$3+2(x-1)$'에 밑줄을 그으며)바둑돌 개수가 나오겠지? 새로운 패턴에 대해 그림1(!) 의 바둑돌 개수! |
| | 1495 | SS | 그럼 ("x=어떤 그림수"에서 x를 가리키며)이게 100이라 치며는 (식 $3+2(x-1)$의 x에 손가락을 옮기며)여기다가 100을 대입하며는, 이게 그 그림100의 바둑돌 개수가 나오는 거고. |
| | 1496 | HS | 음. 근데 그 수가 새로운 패턴.. |
| | 1497 | SH | (HS의 말을 이어서)새로운 패턴에서 그림1로 되는 거고. |
| | 1498 | SS | 이게 1로..근까 (식 $3+2(x-1)+2(n-1)$에서 $3+2(x-1)$을 가리키며)얘가 1로 변하.. 100에서 1로 변하니까, (식 $3+2(x-1)+2(n-1)$에서 n을 가리키며)이게 1로 치고, 그 다음에 2로 치고, 이런 식으로 변한단 이 소리아이가? |
| | 1499 | SH | 엉. 뒤에는 두개씩 늘어나고, |

입하면.."(전사1494)로부터, 처음패턴의 그림100의 바둑돌의 개수를 구하는 방법을 일반화하여 n에 x를 대입한 결과 $3+2(x-1)$를 어떤 그림수의 바둑돌의 개수에 대한 표현으로 받아들일 수 있게 되었다. 이러한 처음패턴의 어떤 그림수의 바둑돌의 개수를 대수적 표현으로 다루게 됨으로써, 이제 SH는 이 식을 새로운 패턴의 그림1로 관점을 전환하는데 편안해졌다.

아래 <표 Ⅳ-17>의 전사1495와 전사1498에서 SS는 SH가 문자 상징으로만 설명한 과정을 다시 그림100으로 옮겨와 살펴보면서 일반적인 것을 특수한 것을 통해 보고 있었다. 이와 같이, SS와 SH의 상보적인 대화 속에서 일반적인 것을 특수한 경우로 옮겨 살펴보고, 다시 특수한 경우에서 일반적인 것으로 나아가는 과정이 수회에 걸쳐 일어났고(Mason, 1996), 결국 문제6에 대한 새로운 패턴의 식 '$3+2(x-1)+2(n-1)$'을 분명하게 이해하게 되었다

### 3. 매개변수 개념의 의미 충실한 사용

문제6에 대한 새로운 패턴의 식을 특수와 일반을 오고가면서 반성하고 정교화하는 가운데, SS로부터 문자 n과 x를 구별하는 유의미한 발화가 나타났다. 아래 <표 Ⅳ-18>는 SS가 모둠 동료들에게 문자에 대한 의미를 확인하는 가운데 나타난 대화의 전사 내용이다.

<표 Ⅳ-18> SS의 문자 n과 x에 대한 설명

| 그룹 | Line | 화자 | 전사 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1502 | SS | 근까 이거는 정해진 거일수도 있고, 얘는 계속 변하는거지. n은 변하는 거 아이가? |
| | 1503 | SH, HS | 음. 음. 음. |
| | 1504 | SS | 그러니까, (문자 x를 가리키며)이거는 우리가 무얼 뽑았을 때.. 이거는 먼저 정해지는 거고! 그 다음에 이 n은 변하는 수고! |
| | 1505 | SH, HS | 음. 음. |

여기서, SS의 발화 “이거는 우리가 무얼 뽑았을 때.. 이거는 먼저 정해지는 거고! 그 다음에 이 n은 변하는 수고!”(전사1502)에서 두 문자 x와 n에 대한 선후관계를 분명하게 구분하고 있다는 것을 보여주고 있다. 특히, 매개변수 x에 대해 아직 정해지지 않는 양의 의미를 “무얼 뽑는다”라는 발화로, 그리고 매개변수의 고정적인 의미를 “정해지는 거고!”라는 발화로 한 문자에 대해 상충되는 두 가지 의미를 동시에 고려할 수 있다는 것을 보여준다. 또한, 문자n에 대해 변수에 대한 의미를 “변하는 수고!”(전사1504)라는 발화로 설명하고 있다. 이러한 결과는 1모둠의 학생들이 매개변수를 의미충실하게 사용(NCTM, 2009)하게 되었다는 것을 확증한다.

본 연구에서 매개변수에 관한 개념에 대한 학생들의 점유의 준거로 두 문자 사이에 선후 관계를 파악하는 것으로 설정하였다. 이 준거에 비추어보았을 때, 1모둠의 학생들은 매개변수와 변수의 선후 관계를(Bloedy-Vinner, 2001) 분명하게 파악할 수 있었을 뿐만 아니라, 매개변수 개념의 역설적인 인식의 본질(Bardini et al., 2005)을 이해할 수 있었다.

## Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구의 목적은 학생들이 기하-산술적 패턴 과제로부터 매개변수를 어떻게 대수적으로 일반화하는지와 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인하는 것이다. 더불어, 본 연구진이 개발한 패턴 일반화 과제를 통해 학생들이 매개변수개념에 대해 의미 충실한 사용으로 나아갈 수 있는지를 확인하는 것이다. 연구 결과, 연구자에 의해 제시된 일련의 과제들을 공동으로 해결하는 가운데, 매개변수를 대수적으로 일반화하여 의미 충실한 사용으로 나아갈 수 있다는 것을 확인했다. 본 연구에서는 매개변수를 대수적으로 일반화하는 과정을 확인함으로써 다음과 같은 논점을 확인할 수 있었다.

먼저, 패턴을 대수적으로 일반화한다는 것은 몇 가지의 특정한 요소에 내재한 구조를 인식할 수 있고, 그 구조를 모든 경우로 일반화해 나갈 수 있으며, 일반적인 것을 대수적으로 표현하기 위해 인식된 그 국소적인 구조를 사용할 수 있는 것이다(Radford et al., 2007, p.42). 본 연구진이 개발한 패턴과제로부터 학생들의 매개변수에 대한 대수적 일반화는 한 문자 $n$에 관한 일차함수를 조작하는 과정에서 이루어졌다. 학생들은 변수로 작용하는 문자 $n$과 구별되는 역할로 작용하는 매개변수의 의미를 인식하여, 이로부터 문자 $n$과 다른 문자를 설정했다. 또한, 몇 가지의 일차함수로부터 문자 $n$과 독립적으로 수에 관한 관계를 인식하여 나머지 다른 모든 경우로 일반화하여 매개변수로 설정한 문자로 일반화된 그 관계를 대수적으로 표현하였다. 이때, 매개변수를 대수적으로 일반화하는 과정에서 특정한 예는 일반적인 것을 볼 수 있도록 기능했다. 대수적으로 표현된 식을 설명하는 학생들의 발화에서 확인된 특징은 특정한 것을 통해 일반적인 것을 설명하고, 일반적인 것을 특정한 것으로 옮겨 살펴보았다. 즉, 학생들의 대수적 일반화는 특수에서 일반으로의 단방향적인 결과이기 보다는 특수와 일반을 오고 가면서 반성과 정교화를 거치는 가운데 의미 충실한 이해로 나아갔다. Peter Vogel에 의하면, 학생들의 개념 형성의 과정은 단순히 구체적인 대상에서 공통된 성질의 추상적인 결과라기보다는 개념들의 피라미드내에서 구체적인 것에서 일반적인 것으로 그리고 일반적인 것에서 구체적인 것으로 향하는 두 가지 방향이 교대로 쉼 없이 반복해서 일어나는 사고의 활동으로 설명될 수 있다(Vygotsky, 1986 재인용, p.143). 이로부터, 수학적인 개념을 대수적으로 일반화할 수 있도록 꾀하는 경우, 몇 가

지 특정한 예를 다루는 가운데 어떤 관계를 일반화하여 대수적으로 표현하는 것에서 그치기보다는 다시 구체적인 경우로 옮겨 일반적인 경우를 반성하고 이로부터 다시 일반적인 경우로 나아가 정교화하는 과정을 거치도록하면서, 학생들에게 특수와 일반을 넘나드는 것이 편안해 질 수 있도록 해야 한다.

둘째, 본 연구에서 몇몇의 학생들이 기하-산술적 패턴과제에서 구제적인 수와 관련하여 용이하게 적용한 절차들을 대수로 자연스럽게 확장시켜 나가지 못한다는 것이 발견되었다. 특히, 아직 산술적인 절차에만 머물러 있는 학생들은 이미 매개변수를 대수적으로 일반화하여 상징적인 체계로 이해하는 학생들의 설명을 알아채지 못했고, 대안으로 전형적인 예(Harel & Tall, 1991)의 도움으로부터 점진적으로 대수적인 표현의 이해로 나아갈 수 있었다. 이로부터, 패턴의 일반화로부터 대수적 상징체계를 처음 도입하고자하는 교사들은 학생들에게 너무 성급한 대수적 표현을 사용하도록 요구하는 것은 지양되어야한다. 또한, 교사들은 산술에서 대수로의 이행의 본질적인 어려움과 문자기호의 사용에 대한 학생들의 어려움을 인식하고 있을 필요가 있다.

셋째, 본 연구에서 매개변수 개념을 대수적으로 일반화하는 과정에서 변수들 사이에 역할을 구별하지 못하고 매개변수에 해당하는 문자를 변수와 같은 문자로 설정하는 상황이 발견되었다. 또한 이 상황에서 학생들이 변수에 대한 의미를 다가명사보다는 특정한 하나의 값이 들어갈 자리지기로 간주하는 모습을 확인할 수 있었다. 즉, 변수를 미지수로서의 의미에 국한시켜 고려하고 있었다. 이로부터, 학생들은 변수들 사이에 다양한 역할을 구별할 수 있는 경험을 제공받을 필요가 있고, 특히, 매개변수 개념에 대한 학습은 이미 학습한 문자의 의미를 반성할 수 있는 기회를 제공한다는 점에서 매개변수개념의 의미 충실한 학습의 필요성은 부각된다.

마지막으로, 본 연구진이 개발한 기하-산술적 패턴은 학생들에게 매개변수를 의미충실하게 학습할 수 있도록 적절한 학습 조건을 제공했다. 주어진 처음패턴에서 시작하는 위치를 구체적인 수로 설정하여 새로운 패턴의 식을 구하는 문제는 매개변수를 산술적으로 조작할 수 있는 맥락을 제공했다. 즉, 변수 $n$과 독립적으로 매개변수 개념에 관련된 새로운 의미의 변화를 경험하면서 변하는 것이 무엇인지 그리고 그 대상을 변하게 하는 것은 무엇인지를 구체화하는 경험을 제공하였다. 더욱이, 시작하는 위치를 일상적인 용어인 ‘어떤 그림수’로 설정하여 이전에 사용된 산술적인 조작의 구조를 일반화하여 구조적인 대수로 넘어갈 수 있도록 촉진하는 역할을 제공하였다. 이와 같은 연구결과는 기존의 변수 개념의 도입에 있어 기하-산술적 패턴 일반화 과제의 역할을 재조명하고 확장하는 것이다. 한편, 산술에서 대수로의 자연스러운 이행을 위해 문자기호를 도입하는 단계에는 일반화된 성질을 곧바로 표준적인 상징체계를 이용하여 형식화하기보다는 학생들이 사용하는 일상적인 어휘로 그 일반화를 표현하는 기회를 제공할 필요가 있다.

결국, 연구진에 의해 개발된 일련의 패턴 과제를 공동으로 해결하면서, 매개변수개념에 대한 의미 충실한 사용(NCTM, 2009)으로 나아갈 수 있었다. 즉, 학생들은 매개변수를 변수와 구별되는 문자를 설정할 수 있었고, 변수와의 선후 관계를 파악할 수 있었을 뿐만 아니라 매개변수의 고정성과 부정성(indeterminate)의 역설적인 인식의 본질(Bardini et al., 2005)을 고려할 수 있었다. 본 연구에서는 일반화의 수단으로서 매개변수개념에 대한 학생들의 의미 충실한 학습의 가능성을 확인하였다. 우리나라 수학교육과정상 ‘매개변수’라는 용어와 그 개념에 대해 단편적, 소극적, 암묵적으로 다루고 있는 근거로 학생들의 인

지발달의 미숙을 든다면(김남희, 2004), 최소한 우리나라 중학교 3학년이후부터 적절한 과제와 교사의 안내에 의해 일반화 수단으로서 매개변수 개념에 대한 의미 충실한 학습으로 나아갈 수 있을 것이로 판단된다.

본 연구에서는 학생들이 기하-산술적 패턴과제로부터 매개변수를 어떻게 대수적으로 일반화하는지와 그 과정에서 일어나는 어려움은 무엇인지를 확인하였다. 더불어, 본 연구진이 개발한 패턴 일반화 과제를 통해 학생들이 매개변수개념에 대해 의미 충실한 사용으로 나아갈 수 있는지를 확인하였다. 연구 결과 학생들은 변수로 작용하는 문자 $n$과 구별되는 역할로 작용하는 매개변수의 의미를 인식하여, 이로부터 문자 $n$과 다른 문자를 설정했다. 또한, 몇 가지의 일차함수로부터 문자 $n$과 독립적으로 수에 대한 관계를 인식하여 나머지 다른 모든 경우로 일반화하여 매개변수로 설정한 문자로 일반화된 그 관계를 대수적으로 표현하였다. 이 과정에서 학생들에게 나타난 어려움은 매개변수와 다른 변수 사이에 구별의 어려움과 산술적인 절차를 대수로 이행하는 어려움이 확인되었다. 이러한 어려움을 함께 극복해 나가는 과정에서 전형적인 예는 매개변수 개념에 대한 학생들의 의미 충실한 사용(NCTM, 2009)을 견인하는 역할을 제공하였다. 하지만, 본 연구진이 개발한 기하-산술적 패턴으로부터 확인된 학생들의 매개변수개념에 대한 의미 충실한 학습의 가능성을 한 사례를 바탕으로 일반화하는 데 한계가 있다는 제한점이 있다. 마지막으로, 학생들에게 매개변수 개념을 의미충실하게 지도하고자하는 교사들에게 본 연구진이 개발한 기하-산술적 패턴은 하나의 보조자료로 활용 될 수 있을 것이라 기대한다. 또한 본 연구를 바탕으로 매개변수 개념의 의미 충실한 학습에 대한 다각적인 방안이 모색되길 희망한다.

## 참고문헌


김남희(1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원.

김남희(2004). 매개변수 개념의 교수-학습에 관한 연구. **수학교육학연구, 14**(3), 305-325.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

Allen, K. S. (2006). *Students' participation in a differential equations class: Parametric reasoning to understand system.* Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette Indiana.

Balacheff, N. (1987). Proof processes and situations for validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. *Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Eduaction,* vol2, 129-136,. University of Melbourne, Australia.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra *Perspectives on school algebra.* In R. Sutherlan et al. (Eds.), *Perspective on school algebra.*(pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Chalouh, L., & Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. *The* *ideas of algebra, K-12*, 33-42.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*, 25-129.

Davydov, V. (1990). Types of generalization in instruction. *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.*

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertation Utrecht University. Nederlands.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Freudenthal, H. (1977). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordretcht: Riedel publishing company.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? In da Ponte, J. P. & Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Eduaction*, vol2, 368-375, Lisbon, Portugal.

Gattegno, C. (1990). *The science of education.* New York: Educational Solutions.

Griffin, P., & Mason, J. (1990). Walls and windows: A study of seeing using Routh's theorem and associated results. *Mathematical Gazette, 74*, 260-269.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno-Armella, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, & D. Carraher, M. Blaton (Eds), *Algebra in the early garades* (pp. 19-56). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra, 4*, 33-56.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 97-136.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics*, 179-198.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Love, E. (1986). What is algebra? *Mathematics Teaching, 117*, 48-50.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational studies in mathematics, 33*(1), 1-19.

Malisani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the"variable". *Educational studies in mathematics, 71*(1), 19-41.

NCTM(2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. National Council of Teachers of Mathematics.

Martinez, M. V., & Castro Superfine, A. (2012). Integrating Algebra and Proof in High School: Students' Work with Multiple Variables and a Single Parameter in a Proof Context. *Mathematical thinking and learning, 14*(2), 120-148.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee(Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp.65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Thousand Oaks CA: SAGE publication company.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational studies in mathematics, 15*(3), 277-289.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce.* Volume2, edited by the Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana University Press.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The mathematics teacher, 85*(7), 557-561.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2).

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. *REDIMAT-Journal of research in mathematics education, 2*(1), 7-44

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530.

Schoenfeld, A. H. (2010). How We Think: *A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications. Studies in mathematical thinking and learning series.* New York: Routledge Chapman & Hall

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher, 81*(6), 420-427.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification－the case of algebra. *Learning mathematics* (pp. 87-124). New York: Springer.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: *Aspects of epistemology and pedagogy, 25*, 23-58.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks CA: SAGE publication company.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, 361–368, Bergen, Norway

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 8, 7-13.

Vygotsky, L. S. (1986). Thought and language (rev. ed.): Cambridge, MA: MIT Press.

Watson, A., & Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating example*. New York: Routledge.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks CA: SAGE publication company.

# Case Study on Meaningful use of Parameter
## - One Classroom of Third Grade in Middle School -

Jee, Young Myong (Graduate School, Seoul National University)
Yoo, Yun Joo (Seoul National University)

Algebraic generalization of patterns is based on the capability of grasping a structure inherent in several objects with awareness that this structure applies to general cases and ability to use it to provide an algebraic expression. The purpose of this study is to investigate how students generalize patterns using an algebraic object such as parameters and what are difficulties in geometric-arithmetic pattern tasks related to algebraic generalization and to determine whether the students can use parameters meaningfully through pattern generalization tasks that this researcher designed. During performing tasks of pattern generalization we designed, students differentiated parameters from letter ‘n’ that is used to denote a variable. Also, the students understood the relations between numbers used in several linear equations and algebraically expressed the generalized relation using a letter that was functions as a parameter. Some difficulties have been identified such that the students could not distinguish parameters from variables and could not transfer from arithmetical procedure to algebra in this process. While trying to resolve these difficulties, generic examples helped the students to meaningfully use parameters in pattern generalization.

* Key Words : parameter(매개변수), algebraic generalization(대수적 일반화), geometric-arithmetic pattern(기하-산술적 패턴), generic example(전형적인 예)

논문접수 : 2014. 5. 11
논문수정 : 2014. 6. 8
심사완료 : 2014. 6. 15

<부록1> 기하-산술적 패턴 과제

**아래 그림을 보고 물음에 답하시오.**

그림1　　그림2　　그림3

(1) 위에 제시된 패턴의 그림$n$에서 바둑돌의 개수는 몇 개인가?

(2) 위에 제시된 패턴으로부터 그림2014의 바둑돌의 개수는 몇 개인가?

(3) 처음에 제시된 패턴의 그림2에서부터 시작되는 새로운 패턴에 대해 그 패턴의 그림$n$의 바둑돌의 개수는 몇 개인가?

(4) 처음에 제시된 패턴의 그림10에서부터 시작되는 새로운 패턴에 대해 그 패턴의 그림$n$의 바둑돌의 개수는 몇 개인가?

(5) 처음에 제시된 패턴에서 그림100에서부터 시작되는 새로운 패턴에 대해 그 패턴의 그림$n$의 바둑돌의 개수는 몇 개인가?

(6) 처음에 제시된 패턴에서 어떤 그림에서부터 시작되는 새로운 패턴에 대해 그 패턴의 그림 $n$의 바둑돌의 개수는 몇 개인가?

(7) 처음에 제시된 패턴에서 그림$m$에서부터 시작되는 새로운 패턴에 대해 그 패턴의 그림$n$의 바둑돌의 개수는 몇 개인가?