대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 2, 201 ~ 218. Jun 2014

수학 교과서의 정당화 도입 실태 분석: 중학교 2학년 기하 영역을 중심으로[1)]

김 수 철*

본 연구는 정당화의 도입과 관련하여 중학교 기하 영역에서 정당화를 어떻게 지도할 것인가에 대한 논의로부터 출발하여 개정 수학 교과서를 분석을 통해 정당화 지도 방향을 탐색하고 정당화 수업에 대한 시사점을 제공하기 위하여 수행되었다. 연구자는 두 명의 협력자와 함께 선행 연구의 분석 기준을 활용하여 중학교 수학 ② 교과서의 기하 단원을 분석하였으며, 그 결과, 교과서에 제시된 정당화 단계 및 유형을 여러 수준의 학습자들에게 적용 가능하도록 다양한 형태로 제시하려는 노력이 필요하며, 학습자들이 기하 학습을 지루하고 어렵게 느끼지 않도록 교과서의 내용을 적절히 재구성하여 학습자의 수준에 맞는 정당화 활동을 유도할 필요가 있음을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정(이하, 개정 교육과정)에서는 “기하 교육은 영역의 전체적 골격을 유지한 채, 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며, 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 정당화 수준의 교육을 지향한다.”라고 중학교 기하 교육의 방향을 제시하고 있다. 이전의 교육과정 문서들[2)]에서는 “삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.”와 같이 진술되어 있음을 확인할 수 있으나, 개정 교육과정에서는 “이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외심과 내심의 성질, 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.”와 같이 진술되어 있다. 이는 수학적 정당화를 개정 교육과정에 어느 정도 반영하려는 시도라고 할 수 있으며, 교육과정 개발자들은 논리적이고 형식적인 것만을 다루는 증명 활동이 아닌 학습자들의 수준과 흥미를 고려한 포괄적인 형태의 증명을 교육과정 개정 시에 도입하려 했던 것으로 볼 수 있다. 교육부(당시, 교육과학기술부)는 개정 교육과정 고시 및 수학교육 선진화방안 발표(2012. 1. 10)에 따라 새로운 중학교 수학 교과서를 개발하게 하여 2013년 1학년부터 적용하였다. 새롭게 적용된 중학교 수학 ② 교과서의 기하 영역을 살펴보면, “∼을 증명하여라.”를 대신하여 “∼을 설명하여라.”로 진술 방식을 바꿈으로써 과도기적인 형태로 정당화의 도입을 시도하고 있으나, 개정된 대부분의 교과서에서 여전히 형식적인 증명이 강조되고 있다[3)]. 교과서 및 지도서는 교사들이 학생들을 지

---

* 청주교육대학교 교육연구원, sckim211@cje.ac.kr
1) 이 논문은 연구자의 박사학위논문 일부를 수정・보완하여 재구성한 것으로 2008년 정부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받았음(과제번호: KRF-2008-411-J04103).
2) NCIC(국가교육과정정보센터, http://www.ncic.go.kr)
3) <표 Ⅳ-1> 도형의 성질 단원의 정당화 단계 및 유형에 대한 빈도수와 비율을 참고하기 바란다.

도하기 위한 지침이라고 할 만큼 교육 현장에서 활용도가 매우 높기 때문에 교과서 진술 방식의 변화만으로는 실제 교육 현장에서 '정당화'의 도입을 기대하기는 어렵다. 따라서 교사들은 수학적 정당화의 의미를 올바르게 이해하고, 현장에서 정당화를 어떻게 지도할 것인지에 대해 깊이 고민해야 한다. 변희현(2011)은 '증명'이라는 용어가 중학교 2학년 기하 영역에서 처음으로 사용되고 있으므로 대부분의 학생들이 중학교 2학년에서 증명을 처음 학습하는 데 많은 어려움을 겪고 있다고 지적하였으며, 나귀수(1998)는 중학교 2, 3학년에서는 상당히 많은 시간을 할애하여 평면도형에 대한 증명을 다루고 있음에도 불구하고 증명을 제대로 이해하지 못할 뿐만 아니라, 증명을 다루는 수업 시간을 가장 지루하고 따분한 시간으로 여기고 있으며, 기계적인 방식으로 증명을 단지 암기하고 있다고 지적하였다. 또한 대부분의 교사들이 중학교 기하 영역 지도에 어려움을 느끼고 있으며(Balacheff, 1991; Van Hiele, 1986; 서동엽, 1993; 나귀수 1997, 1998; 우정호, 1994), 연구자 또한 많은 교사들이 기하 지도에 어려움을 느끼고 있음을 인식하고 있었다. 연구자는 중학교에서 수년간 수학을 가르치면서 '모든 학생들에게 형식적인 증명(formal proof)을 요구하는 것이 타당한가?'에 대해 계속적인 문제 제기를 해왔으며, 개정 교육과정이 적용된 후, 수학에서 정당화를 어떻게 지도할 것인지에 대해 많은 고민을 하게 되었다. 이는 비단 연구자만의 것이 아니라, 정당화를 지도하는 대부분의 교사들이 겪게 될 문제라고 할 수 있다. 선행 연구 분석 결과, 정당화에는 여러 가지 수준이 있음을 확인할 수 있었으며(Balacheff, 1991; Coe & Ruthven, 1994; Tall, 1995; Simon & Blume, 1996; Sowder & Harel, 1998; Miyazaki, 2000; 김정하, 2010; 이환철・하영화; 2011), 학습자의 수준을 고려한 정당화 지도를 위해서는 심도 깊은 교과서의 분석이 필요하다. 본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 2학년 수학 교과서의 정당화 도입 실태를 분석하여 정당화 지도 방향을 탐색하고 정당화 수업을 위한 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 정당화의 의미

정당화의 사전적 의미를 살펴보면 다음과 같다. 국어사전에는 "정당성이 없거나 정당성에 의문이 있는 것을 무엇으로 둘러대어 정당한 것으로 만듦을 뜻하는 명사"로 정의하고 있으며(국립국어원 표준국어대사전, 2013), 영어사전에는 "A justification for something is an acceptable reason or explanation for it"으로 정의하고 있다(Collins Cobuild Advanced Learner's English Dictionary, 2013). 즉, 정당화의 사전적 의미를 "자신의 추론 결과가 정당하다는 것을 다른 사람이 수용할 수 있도록 근거를 제시하고 설명하는 것"으로 나타낼 수 있다. 정당화는 다른 사람들 사이에서 자신의 주장을 타당하게 하고, 어떤 결과나 현상으로의 통찰을 제공하며, 지식을 체계화한다(Bell, 1976; de Villiers, 1990; Hanna, 2000; Staples & Bartlo & Thanheiser, 2012). 정당화는 학교수학에서 증명의 기능을 하고(Stylianides, 2007), 증명과 정당화라는 용어는 교사들에게 다양한 실천이나 개념을 색인화하며(Knuth, 2002), 정당화는 증명과 입증을 모두 포함하고 있다(Staples & Bartlo & Thanheiser, 2012). Sowder & Harel(1998)은 정당화를 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 증명이라는 좁은 의미에서가 아니라, 심리학적인 의미에서 보다 포괄적인 관점에서의 증명이라고 정의하였다. 조완영(2000)은 학생들의 증명에 대

한 개념을 보다 포괄적으로 해석해서 정당화라는 용어와 동일시 하고자 하였으며, 몇 개의 예를 이용하여 실험과 측정에 의해서 또는 시각적인 그림을 이용하여 어떤 명제가 참인지, 왜 참인지를 설명하는 것을 경험적 정당화로, 보다 엄밀하고 형식적인 전통적인 의미에서의 증명을 연역적 정당화로 정의하였다. 김택수(2007)는 수학적 사실에 대해 다양한 사고를 통해 학습자의 것으로 소화한 관계적 이해 및 개념적 이해가 확실히 된 상태로 수학적 지식에 대한 아이디어를 타당하고 명확한 근거의 제시를 통하여 타인에게 명쾌한 설명과 설득할 수 있는 증명 등을 정당화로 정의하였으며, 김정하(2010)는 적당한 논리에 의해 자신 또는 다른 사람에게 어떤 주장이 참임을 확신시키는 과정으로 정의하였다. 이환철 · 하영화(2011)는 어떤 명제가 참임을 밝히는 보다 포괄적인 과정을 정당화로 정의하였으며, Staples & Bartlo & Thanheiser(2012)는 받아들여진 진술과 추론의 수학적 형식을 사용한 주장이 참이 됨을 설명하는 논쟁을 정당화로 정의하였다. 이상의 논의를 토대로, 본 연구에서는 정당화를 '경험적 · 귀납적인 것부터 형식적 · 연역적인 것까지 다양한 방법을 사용하여 자신의 수학적 추론이 참이라는 것을 설명하는 과정'으로 정의하였다.

2. 정당화 관련 연구

가. Balacheff의 정당화

Balacheff(1987)는 Lakatos의 준-경험주의 수리철학적 입장에서 정당화에 대한 학생의 이해 수준을 소박한 경험주의(navie empiricism), 결정적 실험(crucial experiment), 포괄적인 예(generic example), 사고실험(thought experiment)의 네 가지 유형으로 구분하였다. 소박한 경험주의는 몇 개의 예를 이용하여 자신의 추측이나 주장이 참임을 정당화하는 것이며, 결정적 실험은 극단적인(extreme) 예를 통해 일반성을 조사하여 자신의 추측이나 주장이 참임을 정당화하는 것이다. 포괄적인 예는 자신의 추측을 확인하기 위해 가능한 모든 경우의 대표적인 예를 이용하여 정당화하는 것이며, 사고실험은 연역적이고 일반화된 설명을 통해 자신의 추측이나 주장의 타당성을 입증하는 것이다.

나. Tall의 정당화

Tall(1995)은 증명의 표현(representation) 방법에 따라 활동적 증명(enactive proof), 시각적 증명(visual proof), 수치적 증명(numeric proof), 형식적 증명(formal proof)의 네 가지로 분류하였다. 활동적 증명은 가장 낮은 단계로 물리적 환경과의 상호작용을 통해 이루어지고, 일반화에는 한계가 있지만 저학년에게 유용한 방법 중 하나이다. 시각적 증명은 언어적 요소와 활동적 요소를 모두 포함한 것으로, 활동적 요소로 부분들을 역동적으로 재배열하는 것이다. 수치적 증명은 증명을 할 때 예로 구체적 수를 들어 사용하는 것으로, 대수적으로 의미 있는 연산 기능이지만 연역적 증명이라고 보기는 어렵다. 형식적 증명은 수학적으로 엄밀한 연역적 증명을 의미하는 것이다.

다. Sowder & Harel의 정당화

Sowder & Harel(1998)은 학생들의 증명 스키마를 외부-기반 증명 스키마(externally based proof schemes), 경험-기반 증명 스키마(empirical based proof schemes), 분석-기반 증명 스키마(analytic based proof schemes)의 세 가지로 구분하였다. 외부-기반 증명 스키마는 학생들이 확신을 얻거나 다른 사람들을 설득시킬 때 외부의 자원을

이용하는 것으로, 권위적 증명 스키마(authoritarian proof scheme), 관습적 증명 스키마(ritual proof scheme), 기호적 증명 스키마(symbolic proof scheme)로 나누어진다. 경험-기반 증명 스키마는 어떤 명제의 정당성을 예를 근거로 주장하는 경우로, 지각적 증명 스키마(perceptual proof scheme), 예-기반 증명 스키마(example based proof scheme)로 나누어진다. 분석-기반 증명 스키마는 수학자나 수학교사들이 일반적으로 증명으로 인정하고 증명 교육의 궁극적인 목표로 생각하는 것으로, 변환적 증명 스키마(transformational proof scheme), 공리적 증명 스키마(axiomatic proof scheme)로 나누어진다.

라. 국내의 정당화 연구

김정하(2010)는 정당화 수준에 관한 선행 연구를 분석하여 정당화 수준을 0단계에서 5단계까지로 구분하여 제시하였는데, 0단계는 아직 정당화를 시도하지 않은 단계로 보았고, 1단계는 외적 확신에 의한 정당화 단계, 2단계는 경험적·귀납적 정당화 단계, 3단계는 포괄적 예를 통한 연역적 정당화 단계 , 4단계는 단순 연역적 정당화 단계, 5단계는 형식적·이론적 정당화 단계로 보았다. 이환철・하영화(2011)는 중학교 수학 교과서를 분석함으로써 정당화 방안을 탐색하기 위한 연구를 수행하였는데, 그들은 교과서 분석을 위한 틀을 마련하기 위하여 김정하(2010)가 제시한 정당화의 단계 여섯 가지 중에서 0단계와 1단계를 제외한 2단계부터 5단계까지를 선택하여 각각 유형1부터 유형4까지 네 가지의 유형으로 정리하였다. 즉, 김정하(2010)의 정당화 2단계를 유형1로, 3단계를 유형2로, 4단계를 유형3으로, 5단계를 유형4로 정의하였다.

마. 중학교 수학의 정당화 단계 및 유형

김정하(2010)는 Balacheff(1987), Tall(1995), Simon & Blume(1996), Sowder & Harel(1998, 2007), Miyazaki(2000) 등이 제시한 정당화 유형을 비교하여 정리하였으며, 이환철・하영화(2011)는 중학교 수학 교과서 분석을 통한 정당화 방안 탐색을 위하여 김정하(2010)가 제시한 정당화의 단계 중 0단계와 1단계를 제외한 2~5단계를 활용하였다. 김정하(2010)의 연구에서는 선행 연구자들이 언급한 정당화의 ‘수준 및 유형’을 ‘단계’라고 표현하였고, 이환철, 하영화(2011)의 연구에서는 교과서 분석이라는 연구의 특성을 반영하여 김정하(2010)가 제시한 정당화의 ‘단계’를 ‘유형’이라고 표현하였다. 한편 학습지도에는 단계가 있기 때문에 교사가 정당화 수업을 진행하는 과정에는 단계가 존재할 수밖에 없고, 이러한 단계 내에는 여러 가지 정당화 유형이 포함될 수 있다. 따라서 이 연구에서는 정당화 단계 또는 유형이라는 용어를 수업 상황에 맞게 적절하게 사용하고자 한다. 예를 들어, A학생이 단순 연역적 정당화 단계에서 자신의 수학적 추론이 참이 됨을 설명할 때 정당화의 수단으로 식의 조작에 의한 방법을 사용한다면, A학생은 단순 연역적 정당화 단계 내에서 식의 조작에 의한 정당화 유형을 사용했다고 볼 수 있다. 김정하(2010)가 제시한 정당화 0단계는 정당화가 나타나지 않은 단계로 정당화의 의미를 잘 알지 못하거나 문제를 해결하기 위한 사전 지식이 없기 때문에 정당화를 시도하지 않는 단계이고, 정당화 1단계는 어떠한 적절한 논리가 아닌 교사나 교과서의 권위에 의해 정당화를 시도하려는 단계로 정당화의 근거를 자신이 아닌 밖에서 찾으려고 하는 정당화라고 할 수 있다. 그러나 이 연구는 중학교 2학년 수학교과서의 기하 영역에서 정당화 실태를 분석하는 것이 목적이

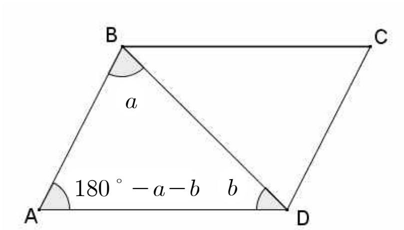
므로 정당화가 아예 나타나지 않는 0단계와 학생 자신이 아닌 외부로부터의 권위에 의해 정당화를 시도하려는 1단계는 제외 하였다. 이상의 논의를 토대로 연구자는 중학교 수학의 정당화를 4단계, 8가지 유형으로 구분하였다. 제 1단계는 경험적·귀납적 정당화 단계로, 지각적·활동적 정당화, 평범한 예에 의한 정당화, 극단적 예에 의한 정당화의 세 가지 유형을 포함하고 있다. 제 2단계는 예에 의한 정당화 단계로, 시각적 예에 의한 정당화와 포괄적 예에 의한 정당화 유형이 여기에 속한다. 제 3단계는 준연역적 정당화 단계로, 식의 조작에 의한 정당화 유형과 논리적 설명에 의한 정당화 유형을 포함하고 있다. 제 4단계는 형식적·연역적 정당화 단계로, 여기에는 형식적 증명 유형이 있다.

1) 경험적·귀납적 정당화 단계 및 유형

시각 자료나 조작 활동 등을 통해 도형의 성질을 발견하고 발견된 성질에 대하여 그것이 참이 된다는 것을 스스로 확인하거나 다른 사람에게 설명하는 단계를 경험적·귀납적 정당화라고 한다. 예를 들어, 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분함을 정당화할 때, 실제 종이 접기를 통해 이등변삼각형을 반으로 접어봄으로써 이러한 성질이 참이라는 것을 자신의 경험을 토대로 설명하는 정당화 사례가 지각적·활동적 정당화 유형에 속한다. 또한 삼각형의 외심에서 각 꼭짓점에 이르는 거리가 같음을 정당화할 때, 일반적인 형태의 삼각형(직각삼각형, 이등변삼각형 등과 같은 특수한 형태의 삼각형이 아닌 삼각형)을 이용하여 외심을 확인하는 사례가 평범한 예에 의한 정당화 유형에 속한다. 반면 특수한 형태의 삼각형을 이용하거나 밑면의 길이에 비해 높이가 매우 큰 형태의 극단적인 모양의 삼각형을 이용하여 외심을 확인하는 사례가 극단적 예에 의한 정당화 유형에 속한다.

2) 예에 의한 정당화 단계 및 유형

경험적이고 귀납적인 방법에 의해 정당화하는 수준을 벗어나, 예를 사용하여 연역적으로 설명하는 정당화 단계를 예에 의한 정당화 단계라고 한다. 예를 들면, 평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기가 서로 같음을 정당화할 때, [그림 Ⅱ-1]과 같이 평행사변형 ABCD를 그리고 대각선을 그린 후, $\angle ABD=a$, $\angle ADB=b$ 라고 놓으면 삼각형의 내각의 합이 180° 이므로 $\angle A=180^\circ-a-b$ 임을 설명한다. 한편, 평행사변형의 정의에 의해, 선분 AB와 선분 DC는 서로 평행하므로 엇각의 성질에 의해 $\angle CDB=a$ 이고, 선분 BC와 선분 AD는 서로 평행하므로 엇각의 성질에 의해 $\angle CBD=b$ 이므로 $\angle C=180^\circ-a-b$ 임을 설명한 다음, $\angle A=\angle C$ 가 되고, 같은 방법에 의해, $\angle B=\angle D$ 가 된다는 사실을 설명하는 경우로, 이는 포괄적 예[4]와 시각적 예에 의한 정당화 유형이 모두 이용된 사례이다.



[그림 Ⅱ-1] 예에 의한 정당화 사례

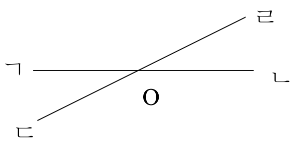
3) 준연역적 정당화 단계 및 유형

형식적인 증명의 형태는 아니지만, 결론을 연역할 때 논리적인 오류 없이 그 명제가 성립함

4) [그림 Ⅱ-1]의 삼각형 ABD에서 $\angle ABD=a$, $\angle ADB=b$와 같이 구체적인 값이 제시되지 않았으므로 "특수한 예에서 일반성을 이해"하는 포괄적인 정당화라 할 수 있다(조완영, 2000).

을 타당하게 설명할 수 있는 단계를 준연역적 정당화 단계라고 한다. 예를 들어, 두 직각삼각형에서 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으면 서로 합동임을 보일 때, 두 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변이 서로 일치하도록 뒤집어 이등변삼각형을 만든 다음, 이등변삼각형의 성질을 이용하여 두 밑각의 크기가 같음을 설명하는 사례가 논리적 설명에 의한 정당화 유형에 속한다[5]. 한편 식의 조작에 의한 정당화 사례는 [그림 Ⅱ-2]와 같다.

두 선분이 서로 만날 때 마주보는 각의 크기는 서로 같음을 정당화해 보자. 아래 그림과 같이 직선 ㄱㄴ과 직선 ㄷㄹ이 서로 한 점에서 만난다고 하면,



각 ㄱㅇㄴ과 각 ㄹㅇㄷ은 각각 180° 이므로
각 ㄱㅇㄹ + 각 ㄹㅇㄴ=180°
각 ㄱㅇㄹ + 각 ㄱㅇㄷ=180°
각 ㄱㅇㄹ는 공통이므로 결국
각 ㄹㅇㄴ = 각 ㄱㅇㄷ이어야 한다.

[그림 Ⅱ-2] 준연역적 정당화 사례

4) 형식적·연역적 정당화 단계 및 유형

어떤 인정된 형식에 따라 논리적으로 수학적 증명을 시도하는 단계를 형식적ㆍ연역적 정당화 단계라고 한다. 예를 들어, 평행사변형의 두 쌍의 대각의 길이는 각각 같음을 정당화할 때, 수학적 기호를 사용하여 변과 각을 표현하고 삼각형의 합동조건을 이용하는 등 형식적이고 연역적인 방법으로 주어진 명제가 참이 됨을 증명하는 사례가 형식적 증명 유형에 속한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구를 위해 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 ② 교과서 13종을 분석하였다. 이 교과서들은 교육부(당시, 교육과학기술부)의 개정 교육과정 고시 및 수학교육선진화방안 발표(2012. 1. 10)에 따라 새롭게 개발된 교과서로서 개정 교육과정의 기본 틀을 잘 반영하고 있다. 연구자가 교과서 분석을 중학교 2학년 기하 영역으로 설정한 이유는 개정 교육과정에서 제시하고 있는 내용 규준 중 수학적 정당화 도입 취지를 가장 잘 반영하고 있는 학년과 영역이 여기에 해당되기 때문이다. 분석은 총 13종의 중학교 수학 ② 교과서(A, B, C, ... , L, M) 도형의 성질 단원에 대하여 이루어졌는데, 탐구활동을 포함한 소단원의 도입부, 본문 내용, 예제 중에서 단순한 문제 풀이 형태의 설명보다는 수학적 성질을 정당화하는 것을 분석하여 유형별로 분류하였다. 분석 대상 단원은 다음 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 분석 대상 단원

중단원명	분석 대상 소단원명
도형의 성질	이등변삼각형의 성질
	직각삼각형의 합동
	삼각형의 내심과 외심
	평행사변형의 성질
	평행사변형이 되는 조건
	여러 가지 사각형

2. 분석 기준 및 방법

가. 분석 기준

5) 이 사례는 2단계의 시각적 예에 의한 정당화 유형도 포함하고 있다.

<표 Ⅲ-2> 교과서 분석을 위한 부호화 체계

단계		부호	유형	부호
1	경험적・귀납적 정당화	EI	지각적·활동적정당화	PA
			평범한 예에 의한 정당화	NE
			극단적 예에 의한 정당화	EE
2	예에 의한 정당화	Ex	시각적 예에 의한 정당화	VE
			포괄적 예에 의한 정당화	GE
3	준연역적 정당화	SD	식의 조작에 의한 정당화	ME
			논리적 설명에 의한 정당화	LE
4	형식적・연역적 정당화	FD	형식적 증명	FP

교과서 분석을 위하여 앞서 연구자가 제시한 중학교 수학의 정당화 단계 및 유형을 분석 준거로 활용하였다. 연구자는 교과서 분석 결과를 쉽게 파악할 수 있도록 하기 위하여 각각의 정당화 단계 및 유형을 부호화(coding)하여 다음 <표 Ⅲ-2>와 같이 제시하였다.

나. 분석 방법

연구자는 교육 경력이 각각 9년, 5년인 수학교사 2명과 함께 교과서 분석을 실시하였으며, 각자 중학교 수학 ② 교과서의 도형의 성질 단원에 제시된 정당화 유형의 사례를 찾아 부호화한 다음, 연구자와 협력자, 즉 3명의 분석자가 모여서 분석 결과의 일치도를 확인하였다. 분석 결과가 상이한 부분에 대해서는 각각의 분석자가 부호화한 근거를 교과서의 사례로 제시한 다음, 제시한 사례가 부호화의 근거로서 적절한지에 대해 논의함으로써 의견의 일치를 구하였다. 정당화 단계 및 유형의 구분이 명료하지 않은 경우, 전문가 협의[6]를 통해 부호화의 적절성에 대하여 논의한 다음, 부호화를 진행하였다.

Ⅳ. 분석 결과

1. 소단원별 분석 결과

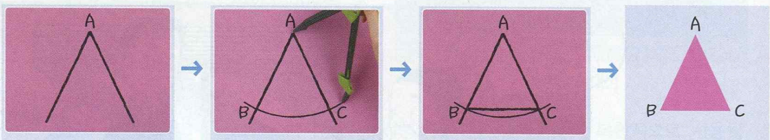
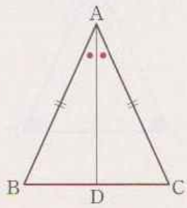
가. 이등변삼각형의 성질

총 13종의 교과서 중에서 11종의 교과서가 1단계, 3단계, 4단계의 정당화 유형을 제시하고 있으며, 1단계와 4단계의 정당화 유형을 제시한 교과서가 1종이다. 한편 1단계부터 4단계의 정당화 유형을 모두 제시하고 있는 교과서는 1종에 불과하다. 이등변삼각형의 성질 단원의 대표적인 사례는 [그림 Ⅳ-1]과 같고, 1단계에서 작도를 통해 이등변삼각형의 성질을 탐색하도록 유도하고 있으며, 형식적 증명(4단계)을 하기 위해 $\angle ADB + \angle ADC = 180^{\circ}$와 같이 식의 조작에 의한 정당화(3단계) 유형을 사용하고 있다.

나. 직각삼각형의 합동

총 13종의 교과서 중에서 9종의 교과서가 1단계, 3단계, 4단계의 정당화 유형을 제시하고 있고, 2종의 교과서는 1단계, 2단계, 4단계의 정당

6) 수학교육과 교수 1명, 수학교육학 박사과정을 수료한 현직 수학교사 1명, 교육학 석사학위를 소지한 현직 수학교사 2명으로 구성된 전문가 협의회 임.

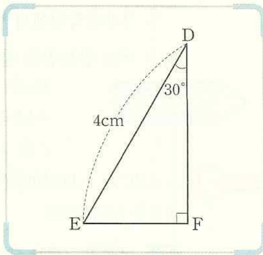
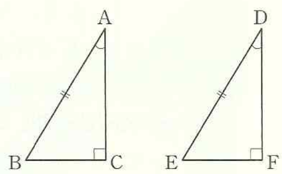
단계 (유형)		대표적 사례
1	EI (PA, NE)	생각열기 intro 다음은 이등변삼각형 ABC를 종이 위에 작도하여 잘라 내는 과정이다.  점 A를 찍고 점 A에서 시작하는 두 반직선을 그린다. → 점 A를 중심으로 하는 원을 그려 두 반직선과의 교점을 각각 B, C라고 한다. → 두 점 B, C를 선분으로 연결한다. → 완성된 삼각형 ABC를 자른다. 탐구 1 삼각형 ABC에서 길이가 같은 두 변을 찾아보자. 탐구 2 삼각형 ABC에서 ∠B와 ∠C의 크기를 다음 두 가지 방법으로 비교해 보자. [방법 1] 삼각형 ABC를 두 점 B, C가 겹치도록 접어 본다. [방법 2] 각도기로 ∠B와 ∠C의 크기를 재어 본다.
3 · 4	SD (ME) · FD (FP)	오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 할 때, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$이므로 $\overline{BD}=\overline{CD}$ ······ ① 이다. 이때 $\angle ADB=\angle ADC,\ \angle ADB+\angle ADC=180^\circ$ 이므로 $\angle ADB=90^\circ$ ······ ② 이다. 따라서 ①, ②에서 $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$를 수직이등분함을 알 수 있다. 즉 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다. 

[그림 Ⅳ-1] 이등변삼각형의 성질 단원의 대표적 사례(황선욱 외, 2013, 202-203쪽)

화 유형을 제시하고 있으며, 나머지 2종의 교과서는 1단계부터 4단계까지의 모든 정당화 유형을 제시하고 있다. 직각삼각형의 합동 단원의 대표적인 사례는 [그림 Ⅳ-2]와 같고, 투명 종이 위에 조건이 주어진 직각삼각형을 그려보고 그것이 교과서에 제시된 그림과 포개어지는지 확인하는 과정을 통해 경험적인 정당화(1단계)를 유도하고 있으며, 형식적 증명(4단계)을 하기 위해 두 직각삼각형이 합동이 된다는 것을 시각적인 예(2단계)와 식의 조작(3단계)에 의한 정당화 유형을 사용하고 있다.

다. 삼각형의 내심과 외심 단원

교과서 13종 중에서 7종이 1단계와 4단계의 정당화 유형만을 제시하고 있고, 5종의 교과서는 1단계, 2단계, 4단계의 정당화 유형을 제시하고 있으며, 2단계와 4단계의 정당화 유형만을 제시하고 있는 교과서가 1종이다. 삼각형의 내심과 외심 단원의 대표적인 사례는 [그림 Ⅳ-3]과 같

단계 (유형)		사례
1	EI (PA, NE)	직각삼각형의 합동 조건은 무엇인가? 활동해 봅시다 다음 활동을 해 보고, 물음에 답하여 보자. 투명 종이 1 투명 종이 위에 $\overline{AB}=4\text{cm}$, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC를 그린다. 2 1에서 그린 삼각형이 오른쪽 그림의 삼각형과 포개어지는지 확인하여 보자. (1) 2의 결과에서 두 삼각형은 서로 합동인가? (2) 삼각형 DEF에서 $\angle E$의 크기를 구하여 보자. 
2 · 3 · 4	Ex (VE) · SD (ME) · FD (FP)	예제 1 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $\angle C=\angle F=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\angle A=\angle D$이면 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이다. 그 이유를 설명하여라. 풀이 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $\angle C=\angle F=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\angle A=\angle D$ ……① $\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-\angle D=\angle E$ 따라서 $\angle B=\angle E$ ……② ①, ②에서 한 변의 길이가 서로 같고, 그 양 끝각의 크기가 각각 서로 같으므로 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 임을 알 수 있다. 

[그림 Ⅳ-2] 직각삼각형의 합동 단원의 대표적 사례(우정호 외, 2013, 241쪽)

고, 컴퓨터를 활용하여 삼각형의 외심을 작도해 봄으로써 “외심에서 삼각형의 각 꼭지점에 이르는 거리가 같음”을 경험적이고 귀납적인 형태(1단계)로 정당화하도록 유도한 다음, 바로 형식적 증명(4단계)을 요구하고 있다. 정당화 수준이 낮은 학습자들은 이러한 전개 방식을 어려워할 수도 있기 때문에 [그림 Ⅳ-3]의 4단계에 제시된 삼각형 ABC에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$가 성립한다는 것을 시각적으로 확인할 수 있도록 표시하고 증명 과정 ①이 외심에 “외심에서 삼각형의 각 꼭지점에 이르는 거리가 같음”을 의미하는 것임을 부연 설명하고, 점 O에서 변 BC에 수선을 발을 내리는 이유에 대하여 진술함으로써 정당화 수준이 낮은 학습자들도 교과서에 제시된 증명 과정을 이해할 수 있도록 할 수 있다.

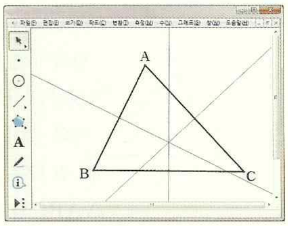
라. 평행사변형의 성질

전체 교과서 13종 중 7종의 교과서가 1단계부터 4단계까지의 정당화 유형을 모두 제시하고 있고, 1단계, 2단계, 4단계의 정당화 유형과 1단계, 4단계의 정당화 유형을 제시한 교과서가 각각 3종이다. 평행사변형의 성질 단원의 대표적인 사례를 제시하면 [그림 Ⅳ-4]와 같고, 1단계에서는 학습자들이 평행사변형의 성질을 시각적으로 확인하여 추측할 수 있도록 평행사변형 형태의

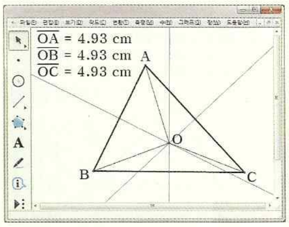
<table>
<tr><th colspan="2">단계
(유형)</th><th>사례</th></tr>
<tr><td>1</td><td>EI
(PA,
NE)</td><td>

탐구 활동 **컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음과 같은 활동을 하고, 물음에 답하여 보자.**

1 △ABC를 그린 후, △ABC의 세 변의 수직이등분선을 그려라. 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만나는지 확인하여라.

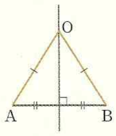


2 세 변의 수직이등분선이 만나는 점을 O라고 하자. 점 O에서 각 꼭짓점에 이르는 거리를 측정하고, 그 거리를 비교하여라.



</td></tr>
<tr><td>4</td><td>FD
(FP)</td><td>

$\overline{AB}$의 수직이등분선 위의 점 O에서 두 점 A, B에 이르는 거리는 서로 같다.



△ABC에서 두 변 AB, AC의 수직이등분선의 교점을 O라고 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{OA}=\overline{OC}$ ……①

이제 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하면

△OBD와 △OCD에서

$\angle ODB=\angle ODC=90^{\circ}$ ……②

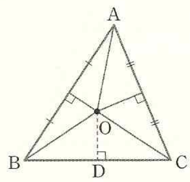
①에서 $\overline{OB}=\overline{OC}$ ……③

$\overline{OD}$는 공통 ……④

②, ③, ④에서 △OBD와 △OCD는 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 직각삼각형이므로

△OBD≡△OCD

따라서 $\overline{BD}=\overline{CD}$이다.



</td></tr>
</table>

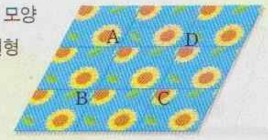
[그림 Ⅳ-3] 삼각형의 내심과 외심 단원의 대표적 사례(김서령 외, 2013, 241쪽)

천 조각 그림을 제시하여 지각적 정당화를 유도하고 있다. [그림 Ⅳ-4]의 오른쪽 하단에 제시된 것처럼 평행사변형 ABCD가 대각선 AC를 그으면 평행선의 성질에 의해 엇각의 크기가 같아져서 두 삼각형이 서로 합동이 된다는 것을 그림으로 나타내었고, 두 삼각형이 서로 합동이므로 대각과 대변의 크기가 같다는 것을 그림에 표시함으로써 시각적 예에 의한 정당화(2단계)를 유도하고 있다. 또한 $\angle A=\angle BAC+\angle DAC=\angle DCA+\angle BCA=\angle C$와 같이 식의 조작에 의한 정당화(3단계) 유형을 사용하여 형식적 증명을 시도하고 있다.

마. 평행사변형이 되는 조건

총 13종의 교과서 중 11종의 교과서가 1단계,

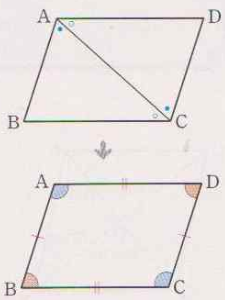
<table>
<tr><th colspan="2">단계
(유형)</th><th>사례</th></tr>
<tr><td>1</td><td>EI
(PA,
NE)</td><td>
수학
평행사변형의 성질은 무엇인가?

| 탐 | 구 | 하 | 기 |
오른쪽 그림은 평행사변형 ABCD와 합동인 사각형 모양의 천을 이어 붙인 것이다. 이 그림을 보고 평행사변형 ABCD에 대하여 다음 물음에 답하여라.


(1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$와 길이가 같은 변을 각각 구하고, 그 이유를 말하여라.
(2) ∠A, ∠B와 크기가 같은 각을 각각 구하고, 그 이유를 말하여라.
(3) (1), (2)의 결과를 이용하여 평행사변형의 성질을 추측하여라.
</td></tr>
<tr><td>2
·
3
·
4</td><td>Ex
(VE)
·
SD
(ME)
·
FD
(FP)</td><td>
이전에 배운 내용
평행사변형은 두 쌍의 대변이 평행한 사각형이다.

생각 두드림
$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$임을 설명하기 위해 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$, $\overline{AD}$와 $\overline{DC}$를 각각 포함하는 두 삼각형을 만들어 그 두 삼각형이 합동임을 밝힌다.

탐구하기에서 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같음을 추측할 수 있다. 이 추측이 항상 옳은지 확인해 보자.

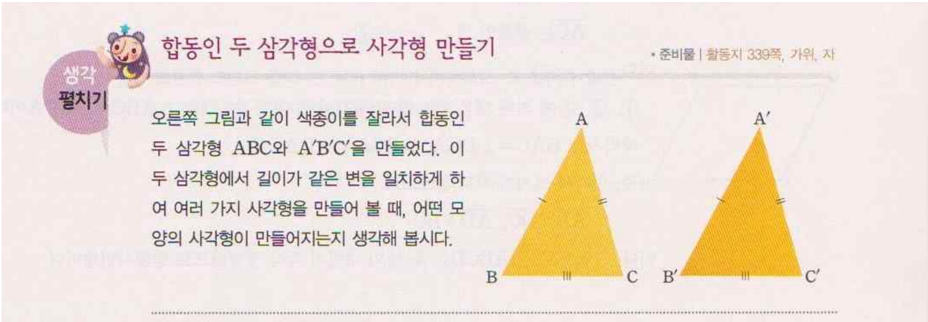
오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$인지 설명하여 보자.


대각선 AC를 그으면 △ABC와 △CDA에서
$\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$이므로
∠BAC=∠DCA(엇각) ······ ①
$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이므로
∠BCA=∠DAC(엇각) ······ ②
$\overline{AC}$는 공통인 변 ······ ③
①, ②, ③에 의하여 △ABC≡△CDA(ASA 합동)
이다. 따라서
$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, ∠B=∠D
이다. 또, ①, ②에 의하여
∠A=∠BAC+∠DAC=∠DCA+∠BCA=∠C
이다.

2. 사각형의 성질 265
</td></tr>
</table>

[그림 Ⅳ-4] 평행사변의 성질 단원의 대표적 사례(류희찬 외, 2013, 265쪽)

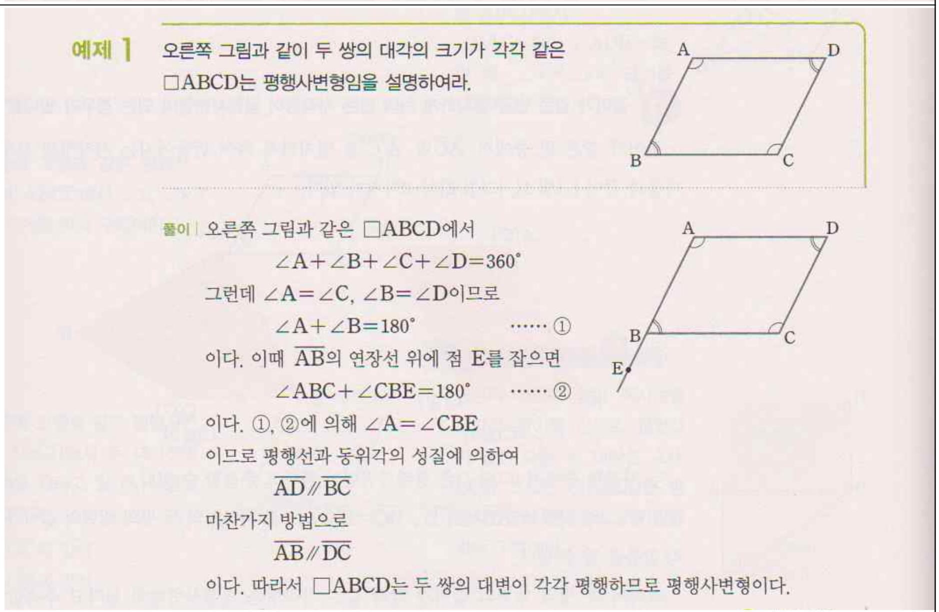
2단계, 3단계, 4단계의 정당화 유형을 모두 제시하고 있으며, 나머지 2종의 교과서는 2단계, 3단계, 4단계의 정당화 유형을 제시하고 있다. 평행사변형이 되는 조건 단원의 대표적인 사례는 [그림 Ⅳ-5]와 같고, 1단계에서는 학습자로 하여금 합동인 두 삼각형을 활용하여 사각형을 만들어보게 함으로써 평행사변형이 되는 조건에 대하여 추측하도록 하고 있다. [그림 Ⅳ-5]는 평행

<table>
<tr><th colspan="2">단계
(유형)</th><th>사례</th></tr>
<tr><td>1</td><td>EI
(PA,
NE)</td><td>

생각 펼치기

합동인 두 삼각형으로 사각형 만들기 • 준비물 | 활동지 339쪽, 가위, 자

오른쪽 그림과 같이 색종이를 잘라서 합동인 두 삼각형 ABC와 A′B′C′을 만들었다. 이 두 삼각형에서 길이가 같은 변을 일치하게 하여 여러 가지 사각형을 만들어 볼 때, 어떤 모양의 사각형이 만들어지는지 생각해 봅시다.

</td></tr>
<tr><td>2
·
3
·
4</td><td>Ex
(VE)
·
SD
(ME)
·
FD
(FP)</td><td>

예제 1 오른쪽 그림과 같이 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 □ABCD는 평행사변형임을 설명하여라.

풀이 | 오른쪽 그림과 같은 □ABCD에서

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

그런데 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$이므로

$\angle A+\angle B=180^\circ$ …… ①

이다. 이때 $\overline{AB}$의 연장선 위에 점 E를 잡으면

$\angle ABC+\angle CBE=180^\circ$ …… ②

이다. ①, ②에 의해 $\angle A=\angle CBE$

이므로 평행선과 동위각의 성질에 의하여

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$

마찬가지 방법으로

$\overline{AB}/\!/\overline{DC}$

이다. 따라서 □ABCD는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.

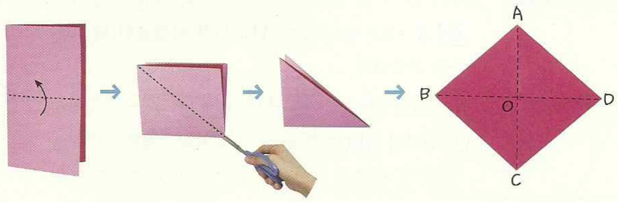
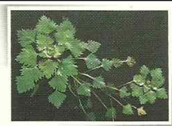
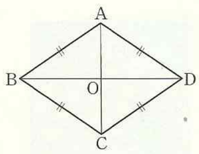
</td></tr>
</table>

[그림 Ⅳ-5] 평행사변형이 되는 조건 단원의 대표적 사례(강옥기 외, 2013, 251-252쪽)

사변형이 되는 조건 중에서 “두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형은 평행사변형임”을 정당화하기 위하여 2-3-4단계를 모두 활용하고 있는데, 2단계에서는 가정이 되는 조건이나 보조선 등을 그림에 표시하는 형태로 시각적 예를 활용하고 있으며, 평행사변형 ABCD의 왼쪽 편에 제시되어 있는 것처럼 식의 조작을 활용하여 형식적 증명 수준까지 도달할 수 있도록 유도하고 있다.

바. 여러 가지 사각형

총 13종의 교과서 중 10종의 교과서가 1단계와 4단계의 정당화 유형만을 제시하고 있고, 2종의 교과서는 1단계, 3단계, 4단계의 정당화 유형을 제시하고 있으며, 나머지 1종의 교과서는 1단계, 2단계, 4단계의 정당화를 제시하고 있다. 여러 가지 사각형 단원의 대표적 사례는 [그림 Ⅳ-6]과 같고, 1단계에서는 종이 접기와 같은 조작 활동을 통해 정당화를 유도하고 있으며, 형식적

단계 (유형)		사례
1	EI (PA)	생각열기 intro 다음과 같이 직사각형 모양의 종이를 네 꼭짓점이 겹치도록 두 번 포개어 접고, 네 꼭짓점이 모인 점이 포함되지 않은 대각선을 따라 자른 후 펼쳐 보자.  탐구 1 사각형 ABCD는 어떤 사각형인지 말해 보자.
3 · 4	SD (ME) · FD (FP)	 '마름'은 물에서 자라는 한해살이풀이다. '마름모'는 이 식물의 이름에 뾰족하다는 뜻의 '모'를 붙여 만든 용어이다. 마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이므로 평행사변형이다. 따라서 마름모는 평행사변형의 성질을 모두 만족시키므로 마름모의 두 대각선은 서로를 이등분한다. 이제 마름모의 두 대각선은 수직임을 확인해 보자. 마름모는 평행사변형이므로 오른쪽 그림과 같이 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라고 하면 두 삼각형 AOB, AOD에서  $\overline{AB}=\overline{AD}$ ······ ① $\overline{OB}=\overline{OD}$ ······ ② $\overline{AO}$는 공통 ······ ③ 이다. 따라서 ①, ②, ③에서 $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$ (SSS 합동)이므로 $\angle AOB=\angle AOD$ 이다. 그런데 $\angle AOB+\angle AOD=180°$에서 $\angle AOB=\angle AOD=90°$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

[그림 Ⅳ-6] 여러 가지 사각형 단원의 대표적 사례(황선욱 외, 2013, 229쪽)

증명을 하기 위해 식의 조작에 의한 정당화(3단계) 유형을 사용하고 있다.

2. 분석 결과 종합

2009 개정 교육과정에 따른 수학 ② 교과서에는 1-2-3-4 단계, 1-2-4 단계, 1-3-4 단계, 1-4 단계, 2-3-4 단계, 2-4 단계와 같은 형태로 정당화를 유도하고 있음을 확인할 수 있다. 각 단계에 해당하는 유형을 자세히 살펴보면, 1단계인 경험적·귀납적 정당화에서는 지각적·활동적 정당화 유형과 평범한 예에 의한 정당화 유형이 대부분이다[7]. 2단계인 예에 의한 정당화에서는 대부분의 교과서에 시각적 예에 의한 정당화 유형이 제시되어 있으며, 포괄적 예에 의한 정당화 유형의 사례는 2개뿐이다. 3단계인 준연역적 정당화에서는 식의 조작에 의한 정당화 유형만 제시되어 있고, 논리적 설명에 의한 정당화 유형은

7) 극단적 예에 의한 정당화(EE) 유형의 사례의 경우, 9종의 교과서에서 동일하게 삼각형의 외심 단원에서만 따로 코너를 두어 제시하고 있기 때문에 <표 Ⅳ-1>에는 포함시키지 않았다.

<표 Ⅳ-1> 도형의 성질 단원의 정당화 단계 및 유형에 대한 빈도수와 비율

단계 · 부호화	소단원명	빈도수 (비율)	계 (비율)
1-2-3-4 · EI(PA, NE), Ex(VE), SD(ME), FD(FP)	이등변삼각형의 성질	1 (0.05)	21 (0.27)
	직각삼각형의 합동	2 (0.1)	
	삼각형의 내심과 외심	0 (0)	
	평행사변형의 성질	7 (0.33)	
	평행사변형이 되는 조건	11 (0.52)	
	여러 가지 사각형	0 (0)	
1-2-4 · EI(PA, NE), Ex(VE), FD(FP)	이등변삼각형의 성질	0 (0)	11 (0.14)
	직각삼각형의 합동	2 (0.18)	
	삼각형의 내심과 외심	5 (0.46)	
	평행사변형의 성질	3 (0.27)	
	평행사변형이 되는 조건	0 (0)	
	여러 가지 사각형	1 (0.09)	
1-3-4 · EI(PA, NE), SD(ME), FD(FP)	이등변삼각형의 성질	11 (0.50)	22 (0.28)
	직각삼각형의 합동	9 (0.41)	
	삼각형의 내심과 외심	0 (0)	
	평행사변형의 성질	0 (0)	
	평행사변형이 되는 조건	0 (0)	
	여러 가지 사각형	2 (0.09)	
1-4 · EI(PA, NE), FD(FP)	이등변삼각형의 성질	1 (0.05)	21 (0.27)
	직각삼각형의 합동	0 (0)	
	삼각형의 내심과 외심	7 (0.33)	
	평행사변형의 성질	3 (0.14)	
	평행사변형이 되는 조건	0 (0)	
	여러 가지 사각형	10 (0.48)	
1-3-4 · Ex(VE), SD(ME), FD(FP)2-	이등변삼각형의 성질	0 (0)	2 (0.03)
	직각삼각형의 합동	0 (0)	
	삼각형의 내심과 외심	0 (0)	
	평행사변형의 성질	2 (1)	
	평행사변형이 되는 조건	0 (0)	
	여러 가지 사각형	0 (0)	
2-4 · Ex(VE), FD(FP)	이등변삼각형의 성질	0 (0)	1 (0.01)
	직각삼각형의 합동	0 (0)	
	삼각형의 내심과 외심	1 (1)	
	평행사변형의 성질	0 (0)	
	평행사변형이 되는 조건	0 (0)	
	여러 가지 사각형	0 (0)	
계		78	78 (1)

제시되어 있지 않았는데, [그림 Ⅳ-3]과 같은 정당화 사례의 분석 결과에서도 알 수 있듯이, 정당화 수준이 낮은 학습자들에게 논리적 설명에 의한 정당화 유형을 활용하면 형식적 증명 과정을 이해하는 데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다. 4단계인 형식적·연역적 정당화는 모든 교과서에서 제시되어 있는데, 단독으로 4단계의 정당화 유형이 제시된 경우는 없으며, 1단계 또는

2단계 또는 3단계를 거쳐서 4단계의 정당화 과정을 진술하는 방식이 대부분이다.

한편 1-2-3-4 단계를 활용하는 경우가 27%, 1-2-4 단계는 14%, 1-3-4 단계는 28%, 1-4 단계 27%, 2-3-4 단계 3%, 2-4 단계 1% 순으로 나타났다. 즉, 개정된 중학교 수학 ② 교과서의 기하 영역의 경우, 전체의 1/3에 해당하는 교과서만이 1-2-3-4 단계의 정당화 유형을 모두 활용하고 있다. 따라서 향후 교과서를 개발할 때 중학교 기하 영역에서 다양한 유형의 정당화 사례를 제시하는 문제를 긍정적으로 검토할 필요가 있다. 특히 1-2-3-4 단계의 정당화 유형이 활용된 사례 중 빈도가 높은 소단원은 평행사변형의 성질 단원과 평행사변형이 되는 조건 단원으로 각각 33%와 52%를 차지하고 있기 때문에 다른 소단원들, 즉 이등변삼각형의 성질, 직각삼각형의 성질, 삼각형의 내심과 외심, 여러 가지 사각형 등의 단원에서 다양한 정당화 사례의 제시가 필요할 것으로 보인다. 또한 경험적인 수준에서 형식적인 수준으로 바로 넘어가는 1-4 단계의 정당화가 활용된 사례는 삼각형의 내심과 외심 단원과 여러 가지 사각형 단원으로 각각 33%와 48%를 차지하고 있으므로 이들 소단원에 대하여 다양한 정당화 사례를 발굴하여 제시함으로써 학습 수준이 낮은 학습자들이 삼각형의 내심과 외심의 성질 및 여러 가지 사각형의 성질을 이해할 수 있도록 도움을 제공할 필요가 있다.

연구자는 도형의 성질 단원을 여섯 개의 소단원으로 구분하여 정당화의 단계 및 유형을 부호화하였다. 각 소단원의 부호화 내용을 종합한 결과를 빈도수와 비율로 나타내면 다음 <표 Ⅳ-1>과 같다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 개정 교육과정에서 시도하려고 하는 정당화와 관련하여 중학교 기하 영역에서 정당화를 어떻게 지도할 것인가에 대한 논의로부터 출발하여 현장의 교사 및 학생들과 가장 밀접하게 관련성이 있는 개정 교과서 분석을 통해 정당화 지도 방향을 탐색하고 정당화 수업에 대한 시사점을 제공하기 위하여 수행되었다. 중학교 수학 ② 교과서의 기하 영역을 분석한 결과, 전체의 1/3에 해당하는 교과서에서 경험적·귀납적 정당화 단계에서 학습자의 조작 활동을 유도한 다음, 바로 형식적·연역적 정당화 단계로 넘어가도록 진술하고 있기 때문에 학습자들은 자신의 수준에 맞는 다양한 정당화 활동을 수행하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 1-2-3-4 단계의 정당화 사례를 모두 제시하고 있는 교과서는 전체의 27%이고, 이것 역시 특정 단원인 평행사변형의 성질, 평행사변형이 되는 조건의 2개의 단원에만 편중되어 있음을 확인할 수 있다. [그림 Ⅳ-3]과 같은 정당화 사례의 분석 결과에서도 알 수 있듯이, 정당화 수준이 낮은 학습자들에게 논리적 설명에 의한 정당화 유형을 활용하면 형식적 증명 과정을 이해하는 데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대되므로 다른 소단원에서도 다양한 유형의 정당화 사례가 제공될 필요가 있다. 여기서 "다양한 유형의 정당화 사례가 제공될 필요가 있다"는 연구자의 주장은 교과서에 다양한 유형의 정당화 사례를 제시하는 것이 필수적이라는 것이 아니라, 교과서 개발자들이 중학교 기하 영역을 집필할 때 여러 가지 유형의 정당화 사례를 제시함으로써 교육현장에서 학습자의 수준에 맞는 다양한 정당화 활동을 유도할 필요가 있다는 것이다. 즉, 학습자들이 자신의 수준에 맞는 정당화 유형을 선택적으로 활용하고 교사는 그러한 정당화 활동을 유도하는 것이 바람직하다는 의미이다. 이는 서두에서 언급한 바와 같이 중학교 2학년 기하 영역에서 처음으로 등장

하는 '증명'이라는 용어가 학생들에게는 생소하고, 대부분의 학생들이 상당히 많은 시간을 할애하여 형식적 증명을 다루고 있음에도 불구하고 그것을 제대로 이해하지 못할 뿐 아니라, 증명 과정, 즉 형식적·연역적 정당화 과정을 기계적으로 암기하려는 경향이 많으므로 교사는 이러한 문제점을 인식하고 적절한 지도 방안을 모색할 필요가 있기 때문이다. 대다수의 교사들이 교육과정 문서와 교과서에 의존하여 수업을 계획하고 실행하는 것을 감안할 때, 교과서에 제시된 정당화 단계 및 유형을 여러 수준의 학습자들에게 적용 가능하도록 다양한 형태로 제시하려는 노력이 필요하다. 또한 학습자들이 기하 수업시간을 지루하고 따분한 시간으로 여기지 않도록 교과서의 내용을 적절히 재구성하여 학습자들의 눈높이에 맞는 정당화 활동을 유도하여 기하 수업에 흥미를 가질 수 있도록 해야 할 것이다. 예를 들어, 정당화 수준이 낮은 집단을 지도할 때, 교사가 교과서에 제시된 정당화 유형이 그 집단의 수준에 적절한지 사전에 판단하여 형식적·연역적 정당화 단계까지의 수행을 요구하지 않고 경험적·귀납적 정당화나 예에 의한 정당화 단계까지 요구함으로써 학생들이 기하 학습에 자신감을 가질 수 있도록 유도해야 한다.

이상의 연구 결과를 토대로, 중학교 기하 영역에서의 정당화 지도와 관련하여 다음을 제언하고자 한다.

첫째, 새 교과서가 개정 교육과정에서 시도하고자 했던 정당화를 어느 정도 반영하고 있지만, 정작 현장에 있는 교사들은 정당화가 무엇이며, 어떻게 지도해야 하는지에 대해 곤란을 겪을 수 있으므로 정당화의 다양화라는 측면을 고려하여 정당화의 의미를 인식하고 학생들이 여러 가지 정당화 유형을 활용할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

둘째, 중학교 기하 교육에 정당화의 도입이 바람직하다고 한다면 교육과정 및 교과서 개발자는 학습자의 수준을 고려한 다양한 유형의 정당화 사례를 교육과정 문서 또는 교과서에 제시하여 교사 및 학생들이 필요한 요소를 선택적으로 활용할 수 있도록 해야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 2011-361호 [별책 8], 2-10.

____________(2012). **수학교육 선진화방안**. 홍보담당관실 보도자료.

국립국어원 표준국어대사전(2013). http://www.korean.go.kr

김수철(2013). **정당화 지도를 위한 수업 모형 개발: 중학교 기하 영역을 중심으로**. 성균관대학교 대학원 박사학위논문.

김정하(2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

김택수(2007). **동적 시각화 자료의 분류와 수학적 정당화에 관한 연구**. 공주대학교 대학원 박사학위논문.

이환철·하영화(2011). 중학교 수학 교과서 분석을 통한 정당화 방안 탐색. **한국학교수학회 14**(3), 329-341.

나귀수(1997). 중학교 2학년 기하 증명 수업 분석. **대한수학교육학회 수학교육 7**(2), 293-302.

______(1998). 중학교 기하의 증명 지도에 관한 소고: Van Hiele와 Freudenthal의 이론을 중심으로. **대한수학교육학회 수학교육 8**(1), 291-298.

변희현(2011). 삼각형의 외심 정의와 증명에 관한 고찰. **한국학교수학회논문집 14**(2), 227-239.

서동엽(1993). 증명 학습에서 나타나는 오류의 유형과 증명 지도. **대한수학교육학회 수학교육 3**(1), 105-115.

우정호(1994). 證明 指導의 再吟味. **대한수학교육학회 수학교육** 4(1), 3-24.

조완영(2000). **탐구형 기하소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례 연구**. 한국교원대학교 박사학위 논문.

Balacheff(1987). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning, Radical constructivism in mathmatics education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 89-110.

________(1991). Treatment of refutation: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), Radical constructivism in mathematics education, 89- 1 IO.

Bell(1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematics situations. Educational Studies in Mathematics 7, 23-40.

Coe & Ruthven(1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. British Educational Research Journal, 20(1), 41-53.

Collins Cobuild Advanced Learner's English Dictionary(2013). http://
www.collinsdictionary.com/dictionary

de Villiers(1990). The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 17–24.

Hanna(2000). Proof, explanation and exploration: An overview. Educational Studies in Mathematics, 44, 5–23.

Knuth(2002). Teachers'conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 5(1), 61–88.

Miyazaki(2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. Educational Studies in Mathematics 41(1), 47-68.

Simon & Blume(1996). Justification in the Mathematics Classroom: A study of prospective elementary teachers. Journal of Mathematical Behavior 15, 3-31.

Sowder & Harel(1998). Types of students' justifications. Mathematics Teacher, 91, 670-675.

Staples & Bartlo & Thanheiser(2012). Justification as a teaching and learning practice: Its multifacted role in middle grades mathematics classrooms. Journal of Mathematical Behavior 31, 447-462.

Stylianides(2007). Proof and Proving in School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education 38(3), 289-321.

Tall(1995). Cognitive developments, representations and proof. Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education, 27-38.

Van Hiele(1986). Structure and Insight: A theory of mathematics education. Orlando: Academic Press.

The Research on the Actual Introduction of Justification to the New Mathematics Textbooks: Focus on the 8th Grade Geometry

Kim, Soo Cheol (Cheongju National University of Education)

The purpose of this study is to research the Actual Introduction of Justification that mentioned in the middle school mathematics of 2009 Revised Curriculum. For this, researcher analyzed the new mathematics textbooks for 8th grade that will be applied 2014. Researcher and cooperators analyzed the 8th grade geometry using the criteria of advanced research. The conclusion of this study is following. Frist, Teacher need to present the various types of Justification to be used students of the different levels. Second, Teacher have to lead the activity of Justification to satisfy the needs of students.

* Key Words : justification(정당화), textbook(교과서), geometry(기하)

논문접수 : 2014. 2. 26
논문수정 : 2014. 3. 27
심사완료 : 2014. 3. 28