대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 2, 205 ~ 225. May 2014

초등학교 6학년 학생들의 함수적 관계 인식 및 사고 과정 분석 - 기하 패턴 탐구 상황에서의 사례연구 -

최 지 영* · 방 정 숙**

본 연구는 초등학교 6학년 학생들이 기하 증가 패턴을 탐구하는 상황에서 함수적 관계를 어떻게 인식하고 일반화하며 표현하는지에 대해 분석하였다. 연구 결과, 처음에는 학생들이 그림에 의존하여 문제를 해결하는 경향을 보였으나, 후속 항들을 탐구하는 과정에서 일반화에 대한 시도가 자연스럽게 나타났다. 또한, 패턴 탐구의 결과를 어떤 방식으로 표현하는지는 개인에 따라 차이가 있었는데, 이 표현 방식은 패턴을 일반화하고 유사 상황에 적용하는 과정에도 영향을 끼쳤다. 본 연구는 이러한 결과들을 토대로, 초등학교에서의 함수적 사고의 지도 방안에 대한 시사점을 제공한다.

I. 서 론

대수의 중요성은 학교수학에서 꾸준히 강조되어 왔으나, 많은 학생들이 어려움을 겪는 대표적인 영역 중 하나이다(김성준, 2004; Kilpatrick & Izsák, 2008). 이에 중·고등학교 중심의 대수 교육을 개선해야 할 필요성이 제기되고 있으며, 학교교육과정의 초기 단계에서부터 학생들에게 대수적으로 추론할 수 있는 기회를 제공해야 한다는 초기 대수(early algebra) 교육이 새로운 대안으로 설득력을 얻고 있다(최지영·방정숙, 2011; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008; NCTM, 2000).

함수적 사고는 학교수학의 초기 과정부터 도입하기에 적절하면서도 유망한 대수적 추론 중 하나이다. Blanton과 Kaput(2005)은 대수적 추론을 '구체적인 몇몇의 사례들을 바탕으로 수학적 아이디어를 추측하고 정당화하며 일반화하고, 그러한 일반화를 학년 수준에 알맞은 형식으로 표현하는 일련의 사고 과정'으로 정의하면서, '일반화된 산술로서의 대수적 추론'과 '함수적 사고로서의 대수적 추론'을 학교교육과정에서 강조해야 할 대수적 추론의 핵심 유형으로 들었다.

특히, 함수적 사고는 둘 이상의 변화하는 양들 사이의 관계에 초점을 두는 사고로서, 학생들에게 친근하면서도 풍부한 문제 상황을 소재로 접근할 수 있다는 장점이 있다(Carraher & Schliemann, 2007). 초등학교에서의 함수적 사고는 변화하는 양들 사이의 관계를 탐구하고 그 관계에 대한 일반화를 표현하기 위해 초등학교 수준에 알맞은 형식으로 표현 방법을 고안하거나 사용할 때 자연스럽게 발생할 수 있다.

우리나라 수학과 교육과정에서 함수 개념은 중학교 과정에서 본격적으로 다루어진다(교육부, 1999; 교육과학기술부, 2008; 교육과학기술부, 2011). 대신, 초등학교 교육과정에서는 함수 개념

* 서울영남초등학교, ji2006@empal.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (교신저자)

의 기초가 되는 '규칙 찾기', '규칙과 대응', '정비례와 반비례' 등을 다루는데, 이러한 내용은 중학교에서 다루는 '대수적 함수 개념' 학습을 위한 토대가 된다(강완 외, 2013). 특히, '규칙과 대응' 및 '정비례와 반비례'를 다루는 과정에서, 학생들에게 변화하는 두 양 사이의 대응 관계를 탐구하고 그 관계를 학생들의 수준에 알맞은 형식으로 일반화하도록 기회를 제공함으로써 초등학생들의 함수적 사고 능력을 촉진할 수 있다.

이런 측면에서 초등학생들의 함수적 사고 가능성과 능력을 탐구하는 것은 의미 있는 일이다. 그러나 초등학교 과정에서의 함수 지도에 관심을 갖기 시작한 것은 비교적 최근의 일로, 학교 수학에서의 함수와 관련된 대부분의 연구가 중등학교 내용에 집중되어 있다(예, 김남희 외, 2011; 김연식·박교식, 1992; 변희현·주미경, 2012). 예외적으로, 최지영·방정숙(2012)은 초등학교 교과서에서 다루는 함수적 문제 상황을 중심으로 우리나라 학생 전반에 걸쳐 이해 능력을 조사한 바 있으나, 초등학생들의 함수적 사고 과정을 깊이 있게 이해하기에는 한계가 있다.

이에 본 연구에서는 함수적 관계가 포함된 기하 패턴 탐구 상황을 예로, 초등학생들이 함수적 관계를 어떻게 인식하는지, 변화하는 두 양 사이의 대응 관계를 어떻게 파악하고 일반화하는지, 그리고 그 관계를 어떻게 표현하고 적용하는지 등을 심도 있게 알아보고자 하였다. 이를 위해 학교 교육을 통해 '규칙과 대응' 및 '정비례와 반비례'를 배운 초등학교 6학년 학생 2명을 대상으로 임상면담을 실시하였고, 초등학생들의 함수적 사고 과정과 특징을 분석하고자 하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 기하패턴을 통한 일반화 탐구

패턴을 탐구하는 것은 수학에서의 핵심적인 활동이다. 패턴을 인식하기 위해서는 수학적인 관계 및 규칙성에 집중해야 하고, 대상간의 관계에 대해 사고해야 하는데, 이러한 과정은 수학적 개념을 형성하는 데 기본이 되며, 수학 문제 해결력과 추론 능력을 향상시키는 데 도움이 된다(김성준, 2002). 또한, 인식한 패턴을 간결하게 표현하고 적용하며 다른 상황으로 확장하는 활동은 패턴의 일반화와 연결되며, 이러한 일반성의 탐구 및 표현 과정은 자연스럽게 변수와 함수에 대한 사고를 촉진한다(NCTM, 2000).

이런 이유로, 국내외의 많은 연구들은 패턴을 대수 교육과정의 필수 요소로 다룰 것을 강조하고 있으며, 변수, 대수식, 방정식을 도입하기 전에 패턴 및 관계를 먼저 다루는 방식을 일반적인 원리로 인식하고 있다(김성준, 2003; Kaput et al., 2008). 이러한 예로, 미국의 '수학과 공통 핵심 규준'(Common Core State Standards for Mathematics)에서도 초등학생들의 대수적 사고를 진작시키기 위한 내용으로 '패턴을 분석하고 일반화하는 활동'을 명시적으로 포함하고 있다(NGA Center & CCSSO, 2010). 또한, 우리나라 수학과 교육과정의 경우에도 초등학교과정에서 '규칙성'을 다룬 후, 중등학교 과정에서 '문자와 식' 및 '함수'를 도입하고 있다(교육과학기술부, 2011).

초등학교에서 패턴은 수열, 기하(도형) 패턴, 표 등으로 제시된다. 기하 패턴은 시각적으로 제시되기 때문에, 수열이나 표에 비해 패턴이 더 생생하게 전달되어, 학생들이 더 쉽게 접근하는 경향이 있다(Orton, Orton, & Roper, 1999). Billings(2008)에 따르면, 기하 증가 패턴(geometric growing patterns)은 그림 증가 패턴(pictorial growth pattern)이라고도 하는데, 특정 대상에 대한 그림들이 일렬로 나열된 형태로, 한 항에서 다음 항으로 나아갈 때에는 반드시 예측

가능한 규칙이 존재한다.

Warren과 Cooper(2008)는 초등학교의 대수적 사고를 촉진하기 위한 수학 수업에서 기하 증가 패턴의 탐구가 매우 유용하다는 것을 강조한다. 특히, 초등학교 수업에서 기하 증가 패턴 탐구가 중요한 이유로, (1) 기하 증가 패턴은 수 패턴에 대한 시각적 표현이고, (2) 변수 개념을 비형식적으로 도입하는 데 활용될 수 있으며, (3) 등식을 일반화하는 데 활용 가능하다는 점을 강조했다. 본 연구에서는 기하 증가 패턴을 탐구하는 상황에서, 학생들이 패턴을 어떻게 인식하고 일반화하며 표현하는지를 탐구하고자 하였다.

2. 함수적인 문제 상황에 포함된 패턴 및 관계 유형

함수적 문제 상황에는 다양한 패턴 및 관계가 포함되어 있다. 따라서 동일한 문제 상황이라도 학생들이 어떻게 접근하느냐에 따라 서로 다른 탐구 결과를 얻을 수 있다. Blanton과 그의 동료들(2011)은 함수에서 발견할 수 있는 여러 가지 패턴 및 관계 중에서 특히, 순환적인 패턴(recursive patterns), 공변적 관계(co-variational relationships), 대응 규칙(correspondence rules)의 세 가지 유형이 매우 중요하다고 강조한다. 여기서 첫째, 순환적인 패턴은 단일 수열 값에서의 변화를 말한다. 5명씩 탈 수 있는 승용차의 수와 총 탑승자의 수 사이의 관계를 탐구하는 문제 상황을 예로 들어 설명하면 다음과 같다. 한 학생이 수열 5, 10, 15, 20, … 내에서 어떻게 총 탑승자의 수가 변화하는지에 대한 패턴을 "5에서 시작해서 5씩 커진다."와 같이 표현한다면, 이 학생은 순환적인 패턴을 찾았다고 볼 수 있다. 그러나 이 패턴에는, '승용차의 대수'와 '총 탑승자의 수'가 각각 어떻게 대응되는지, 그리고 이 두 변수가 서로 어떻게 관련되어 변화하는지에 대한 정보는 포함되어 있지 않다. 따라서 순환적 패턴을 발견했다고 하더라도, 함수적인 문제를 해결하기는 어렵다. 예를 들어, "5씩 커진다."와 같은 순환적 패턴을 적용하여, 승용차가 1000대일 때의 탑승자 수를 구하고자 한다면, '(승용차가 1000대일 때의 탑승자 수) = (승용차가 999대일 때의 탑승자 수) + 5'와 같은 방법으로 해결해야 할 것이다. 그러나 이런 방법으로 답을 얻기 위해서는 승용차가 999대일 때의 탑승자 수를 알아야 하고, 같은 이유로 승용차가 998대, 997대, 996대, … 등등의 탑승자 수를 알아야 하는 번거로움이 있다. 이렇듯, 순환적인 패턴은 오직 하나의 변수의 변화에만 집중하므로, 서로 다른 두 양이 어떻게 관련되어 변화하는지에 대한 사고를 포함하지 않는다.

둘째, 공변적 관계는 두 변량이 서로 어떻게 관련되어 변화하는지에 대한 분석을 포함하는 규칙을 말한다. 예를 들어, 앞에서 다룬 승용차의 수와 탑승자의 수 사이의 관계를 탐구하는 문제 상황에서, 한 학생이 "승용차의 수가 1씩 늘어날 때, 탑승자의 수는 5씩 늘어난다." 또는 "탑승자의 수가 5씩 증가할 때, 승용차의 수는 1씩 늘어난다."고 표현한다면, 이 학생은 승용차의 수의 변화량과 탑승자의 수의 변화량을 함께 고려한 것으로, 공변적 관계를 찾았다고 할 수 있다. 그러나 공변적 관계를 발견하는 것만으로는 함수를 충분히 이해했다고는 보기 어렵다. 예를 들어, 한 변에 두 명씩 앉을 수 있는 정사각형 모양의 식탁을 일렬로 2개 이어 붙인다면, 앉을 수 있는 사람의 수는 12명이 된다. 이러한 상황에서, 식탁의 개수를 계속 늘려가면서 일렬로 이어붙인다면, 앉을 수 있는 사람 수 역시 늘어나게 된다. 만약, 한 학생이 "식탁이 1개 늘어날 때, 앉을 수 있는 사람의 수는 4씩 늘어난다."고 말한다면, 이 학생은 공변적 관계를 발견했다고 할 수 있다. 그러나 이러한 관계만을 적용하여,

'식탁이 1000개일 때, 앉을 수 있는 사람의 수' 를 구하기는 여전히 쉽지 않다.

셋째, 대응 관계는 함수 규칙으로 표현된 두 양 사이의 상관관계를 말하는 것으로서, 순환적인 패턴이나 공변적 관계를 넘어서서, 두 양 사이의 일반화된 관계를 확인하는 것이다. 예를 들어, 한 학생이 식탁에 앉을 수 있는 사람의 총수를 구하는 방법으로 '(사람의 수) = (식탁의 수) × 4 + 4'를 발견한다면, 대응 관계에 대한 규칙을 확인한 것이다. 이러한 규칙은 "사람의 수가 4명씩 늘어난다." 또는 "식탁이 1개 늘어날 때, 앉을 수 있는 사람의 수는 4씩 늘어난다."는 것보다 활용도가 높다고 할 수 있다. 대응 관계 규칙은 '식탁이 999개일 때 앉을 수 있는 사람의 수'를 알지 못하더라도, '식탁이 1000개일 때 앉을 수 있는 사람의 수(1000× 4 + 4=4004)'를 바로 구할 수 있게 하기 때문이다. 이처럼 대응관계는 매우 유용한 것으로 순환적인 패턴이나 공변적 관계보다 한 차원 더 높은 사고라고 할 수 있다.

3. 함수의 여러 가지 표현

일반적으로, 수학에서 다양한 표현을 이해하고 활용할 수 있는 능력은 수학적 개념을 더욱 풍부하고 깊이 있게 이해하도록 하는데 도움이 된다. 특히, 어떤 동일한 수학적 상황을 여러 가지 표현들로 나타내어 보면서 다양한 측면에서 탐구하는 경험은 관련된 수학적 개념이 더욱 체계적이고 견고하게 형성되도록 돕는다. 이와 관련하여 Van de Walle(2004)은 초·중등학교 과정에서 함수를 학습하고 의사소통하는 데 유용하게 활용될 수 있는 표현으로 언어, 상황, 표, 그래프, 대수식의 다섯 가지를 들고 있다. 여기서 언어는 함수적 관계를 말로 기술하는 것으로, 초등학교 수준에서는 형식적인 기호의 도입보다는 학생들에게 친숙한 언어를 사용하여 함수적 관계를 표현하고 의사소통하게 하는 것이 더 적절할 때가 많다. 상황은 수학적 세계 외부의 함수적 관계를 일컫는 말로, 학교수학에서는 엄밀하게 정의된 형식적인 수학의 세계 내에서 함수를 탐구하기 보다는, 현실 세계의 맥락 속에서 함수적 관계를 탐구하게 한다. 표는 함수적 관계에 의해 짝지어진 요소들을 나란히 대응시키는 표현 방법으로, 초등 교과서에서 문제해결 전략 중 하나로 소개되며 이변량 사이의 관계를 탐구하는 과정에서 빈번하게 사용된다. 그래프는 함수적 관계에 있는 짝지어진 요소간의 관계를 그림으로 표현한 것으로, 증가 혹은 감소와 같은 변화의 양상을 쉽게 파악할 수 있고, 전체 경향성을 발견할 수 있으며, 주어지지 않은 값에 대한 예측도 가능하다는 장점이 있다. 마지막으로, 대수식은 함수적 관계를 수학적 기호 및 변수를 사용하여 하나의 문장으로 표현한 것인데, 초등학교에서는 초보적인 형태의 변수 개념으로 문자 대신 ○, □ 등과 같은 기호를 사용하기도 한다.

한편, Friedlander와 Tabach(2001a)은 대수 학습을 더욱 의미 있고 효과적으로 만들 수 있는 표현으로 구어적 표현, 수리적 표현, 그래프 표현, 대수적 표현의 네 가지를 들고 있으며, 각 표현의 장단점을 설명한다. 구어적인 표현은 학생들이 쉽게 접근할 수 있고, 맥락을 이해하거나 해결 방법을 공유하기 위한 자연스러운 환경을 제공해 주는 장점이 있으나, 덜 보편적이고 때로는 개인의 스타일에 의존하기 때문에 모호하여 의사소통에 장애를 유발할 수 있다. 수리적 표현은 학생들에게 익숙하고, 문제 상황을 처음으로 도입하여 특정 사례를 탐구하는 상황에서 중요한 역할을 하며, 효과적인 연결점을 제공하고, 종종 다른 표현으로 쉽게 나아가게 하는 장점이 있으나, 일반성이 부족하여 문제 해결 도구로서의 잠재성이 제한적이라는 단점이 있다. 그래프 표현은 직관적이고 시각적 접근을 선호하는 학생들

에게 매력적이나 문제의 영역이나 범위의 부분만 보여질 수 있고, 그리는 사람에 따라 확대나 축소와 같은 외부 요건에 영향을 받으므로 정확성이 떨어질 수 있다는 단점이 있다. 대수적 표현은 정교하고 효과적이며, 일반적인 진술을 정당화하거나 증명하는 데 유용하나, 학생들이 접근하기 어렵고, 지나친 기호 사용은 자칫 수학이 지닌 의미를 축소 해석하게 하는 단점이 있다.

본 연구는 초등학생들이 함수적 상황을 인식하고 일반화하며 정당화는 과정에서 사용하는 표현을 분석하기 위해, Van de Walle(2004)의 연구와 Friedlander와 Tabach(2001a)의 연구를 토대로 하였다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법 개관

본 연구는 크게 두 가지 이유로 질적 사례연구방법을 적용하였다. 첫째, 본 연구의 목적은 초등학교 6학년 학생들의 함수에 관한 전반적인 이해 실태를 알아보려는 것이 아니라, 학생들이 기하 증가 패턴을 탐구하는 과정에서 나타나는 함수적 사고와 표현의 특징을 자세하게 분석하는 것이다. 둘째, 학교과정의 초기단계부터 함수적 사고를 개발해야 할 필요성이 제기된 것은 비교적 최근의 일로, 초등학교에서 이에 관한 선행 연구는 거의 이루어지지 않았다. 이에 초등학생들의 함수적 사고에 관한 기초 정보를 제공하기 위해 사례연구 방법이 적절하다.

2. 연구 참여자

본 연구를 위해 서울시에 소재하는 Y초등학교 6학년 학생 2명을 선정하였다. Y초등학교는 서울의 변두리에 위치한 학교로, 학생들의 학력 수준이 중위 수준이며, 가정의 사회·경제적 수준도 대체로 중위에 해당한다. 학생은 학원 등을 통해 중학교 과정의 선행학습을 하지 않은 학생들 중에서, 과제 집중력이 우수하고 수학교과에 흥미가 있는 여학생 1명(가명: 효선), 남학생 1명(가명: 성재)을 선정하였다.

두 학생은 모두 자신의 생각을 언어로 표현하는 데 적극적이었으며, 효선은 전 교과 성적이 상위권에, 성재는 중상위권에 속하는 학생이다. 두 사람은 서로 다른 학급 학생이며, 연구에 참여하는 당시, 두 학생 모두 6학년 2학기의 ‘정비례와 반비례’ 단원을 이미 학습한 상태였다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구는 초등학교 정규과정을 통해 규칙성과 문제 해결 영역을 학습한 학생들의 함수적 사고의 특징을 조사할 목적으로 임상 면담법을 실시하였다(Ginsburg, 1997). 면담은 방과 후 시간을 이용하여, 학생당 40분씩 5회에 걸쳐 전체 10회 실시하였다. 연구자는 면담자로 직접 참여하였으며, 학생의 이해 정도를 면밀히 관찰하기 위해서 임상 면담을 위한 다양한 지침을 활용하였다. 면담과정은 비디오로 녹화하였으며, 각각의 면담이 끝난 후 학생에 의해 작성된 기록물이나 활동자료는 모두 수집하여 활용하였다. 이러한 자료들은 학생의 활동의 시간 순서에 따라 지속적으로 수집하고 분석하였다. 최종 면담이 끝난 후에는 면담 내용과 활동지에서 학생들의 사고가 잘 드러나는 부분을 중심으로 분석 결과를 정리하였다.

한편, 본 연구가 함수적인 문제 상황을 중심으로, 학생들이 패턴을 인식하고 일반화하며 표현하는 과정을 탐구하는 데 관심을 두기 때문에, Friedlander와 Tabach(2001b)가 제시한 패턴의 일

반화 단계에 따라 분석을 실시하였다. 이에, 분석 결과를 (1) 일반화를 시작하는 단계, (2) 일반화를 형성하는 단계, (3) 일반화를 명확하게 하는 단계, (4) 일반화를 정당화하는 단계로 구분하여 제시하였다. 그러나 이러한 일반화 단계가 학생들의 발달단계를 의미하는 것은 아니며, 학생들이 문제를 해결하는 일련의 과정들을 '일반화'라는 측면에서 보다 상세하게 기술하기 위해 구분한 것이다. 결과 분석을 위한 분석 초점은 Friedlander와 Tabach(2001b)가 제시한 단계별 내용들을 고려하여, <표 Ⅲ-1>과 같이 작성하였다.

4. 면담

면담은 학생당 다섯 번에 걸쳐 실시하였으며, 함수적인 관계가 포함된 문제 상황을 면담 과제로 사용하였다. 사용한 과제에 따라 다섯 번의 면담을 크게 세 부분으로 구성하였다. 첫째, 시각적 이미지가 포함된 기하 증가 패턴으로 제시된 과제(1 · 2차면담), 둘째, 표로 제시된 과제(3 · 4차면담), 셋째, 시각적 이미지 없이 문장으로만 기술된 문장제 과제(5차면담)로 구성하였다. 본 논문은 학생들이 가장 흥미 있게 참여했고, 함수적 사고 지도와 관련한 시사점을 논의하기에 적합한, 기하 증가 패턴 과제를 중심으로 학생들이 함수적 관계를 어떻게 인식하고 일반화하며 표현하는지를 분석하는 데 초점을 둔다.

본 연구에서 사용한 기하 증가 패턴 과제는, Moss외(2008)가 미국의 4학년 학생들을 대상으로 연구할 때 사용했던 사다리꼴 테이블 문제와 Smith 외(2005)의 사례 중, 6학년 대수 수업의 과제로 사용되었던 정다각형 패턴 문제를 참고하여 구성하였다.

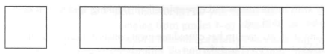
특히, 1차면담에서는 정다각형 중에서 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 정사각형을 소재로, '정사각형을 일렬로 이어 붙여 나갈 때, 정사각형의 수에 따른 둘레의 길이'를 탐구하는 과제를 설정하였다. 2차면담에서는 학생들이 1차면담의 패턴 탐구과정을 통해 일반화한 내용을 다른 패턴의 상황에 적용할 수 있는지를 알아보기 위하여

<표 Ⅲ-1> 분석의 초점

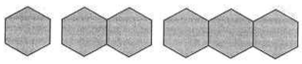
일반화 단계	내용	분석의 초점
일반화를 시작하는 단계	▪ 학생들에게 특별한 예를 제시한다. ▪ 학생들 스스로 특별한 예들을 만든다.	▪ 문제 상황을 어떻게 이해하고 해결하는가? ▪ 처음 몇 개 항들을 탐구하는 과정에서 드러나는 사고와 표현의 특징은 무엇인가?
일반화를 형성하는 단계	▪ 추가적인 예들을 만든다. ▪ 큰 수로 예들을 만들고 해결한다. ▪ 반대 상황의 과제(reversal task)를 해결한다.	▪ 열 번째 항을 탐구하는 과정에서 드러나는 사고와 표현의 특징은 무엇인가? ▪ 학생들의 사고에서 일반화에 대한 필요는 어떤 방식으로 일어나는가?
일반화를 명확하게 하는 단계	▪ 관찰된 패턴을 언어로 기술한다. ▪ 관찰된 패턴을 기호로 기술한다.	▪ 구체적인 사례들을 모두 포괄하여 지칭할 수 있는 용어를 고안하는 과정은 어떠한가? ▪ 학생들이 발견한 일반화를 어떤 방법으로 설명하고 표현하는가? ▪ 학생들이 패턴을 기술하기 위하여 제시한 언어 및 기호에는 어떤 특징이 있는가?
일반화를 정당화하는 단계	▪ 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다.	▪ 학생들이 고안한 일반화된 식을 100번째 및 1000번째 항에 적용하는 과정에서 드러나는 학생들의 사고와 표현의 특징은 무엇인가? ▪ 일반화한 내용과 표현들을 다른 패턴 상황으로 확장하여 적용하는 과정에서 드러나는 사고와 표현의 특징은 무엇인가?

고안되었다. 이에, '정육각형을 일렬로 이어 붙여 나갈 때, 정육각형의 수에 따른 둘레의 길이'를 탐구하는 과제를 설정하였다.

정사각형 패턴 문제와 정육각형 패턴 문제를 학생들에게 처음으로 제시하는 과정에서는, 시각적 이미지도 함께 제시해주었다([그림 Ⅲ-1], [그림 Ⅲ-2] 참조). 다만, 초항부터 세 번째 항까지만 제시해주었으며, 학생이 필요를 느낄 때에는 스스로 구성하여 사용할 수 있도록, 빈 A4용지와 필기도구를 제공해 주고 언제든 자유롭게 사용하도록 안내하였다.



[그림 Ⅲ-1]
정사각형 패턴



[그림 Ⅲ-2]
정육각형 패턴

면담 질문의 구성은 기본적으로 정사각형 및 정육각형의 수를 점차 늘려나가면서 학생들이 기본 도형의 수에 따른 둘레의 길이를 탐구하도록 하는 것이다. 그러나 세부적으로는 1차와 2차 질문 내용 구성상에 약간의 차이를 두었다. 먼저, 1차면담에서는 첫째항부터 네 번째 항까지 순차적으로 모든 항을 탐구한 후, 열 번째 항을 탐구하도록 질문을 제시하였다. 그러나 2차면담에서는 새로운 패턴을 소개하자마자 곧바로 열 번째 항에 대한 질문을 제시하였다. 이는 1차면담을 통해 학습한 내용이 얼마나 잘 전이되는지를 탐구하기 위함이었다. 한편, 각 면담과정에서 학생들이 성공적으로 일반화를 시도한 경우, 연구자는 후속 질문으로 학생이 발견한 패턴을 일반화하여 표현할 수 있는지에 대해 질문을 제시하였다. 또한, 학생들이 일반화된 표현을 고안한 경우, 후속 질문으로 20번째 항, 100번째 항, 그리고 1000번째 항에 대해서 탐구하도록 하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 일반화를 시작하는 단계에서 드러나는 학생들의 사고 및 표현의 특징

가. 그림으로 제시된 처음 세 개 항들에 대해 탐구하는 과정 분석

연구자는 각 항이 '한 변의 길이가 1인 정사각형'을 사용하여 만들어졌다는 것을 안내하고, 첫 번째 항에 대해서 도형의 둘레를 구할 수 있는지 질문했다. 이에 대해 효선이와 성재는 모두 망설임 없이, '정사각형은 변이 네 개이며, 각 변의 길이가 모두 1로 같다'는 점을 들어, 둘레의 길이가 '4'임을 설명했다.

연구자는 후속 질문으로, 정사각형 두 개로 구성된 두 번째 항에 대해서, 둘레의 길이를 어떻게 구할 수 있겠는지 풀이 방법을 설명해보도록 했다. 두 학생은 공통적으로 시선을 그림으로 돌리고, 생각에 잠기는 행동을 보였다. 잠시 시간이 흐른 후, 효선과 성재는 모두 타당한 설명을 제시했다. <에피소드 1>과 <에피소드 2>는 각각 효선이와 성재가 제시한 해결 방법이다.

<에피소드 1 : 두 번째 항에 대한 효선이의 설명>

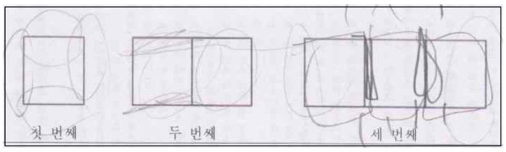
효 선 : (두 번째 그림을 찬찬히 들여다보며) 정사각형 2개를 맞붙이면, 2개의 변이 없어져요. 정사각형 1개의 둘레는 4였으니까 4 더하기 4에다가, 사라지는 변 2개를 빼면, 8빼기 2 해서 6이 돼요.

<에피소드 2 : 두 번째 항에 대한 성재의 설명>

성 재 : (두 번째 그림에 연필 선을 그으며) 정사각

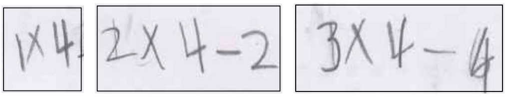
형이 2개니까 변이 4개씩 2개있으니까, 8개인 데, 그 중에 2개가 겹치므로 빼야 하니까 결국에는 6이 나와요.

효선이와 성재는 모두 정사각형 1개의 둘레가 4라는 것에 착안하여 정사각형 2개의 둘레가 8이라는 것을 이끌어내었고, 8에서 서로 겹쳐지는 변 2개를 제외시키는 방법으로 직사각형의 둘레가 6이라는 것을 얻어냈다. 또한 두 학생은 해결 방법을 탐구하는 과정에서, '제시된 그림을 주의 깊게 관찰하며, 분석하는 행동'을 했다. [그림 Ⅳ-1]은 성재가 연필로 선을 그어가며 분석했던 흔적이다. 이처럼 그림은 효선이와 성재가, 전체 변의 수와 둘레에서 제외시켜야 하는 변의 수를 성공적으로 얻어내는 데, 중요한 역할을 했을 것으로 유추된다.



[그림 Ⅳ-1] 성재가 처음 세 개 항들에 대해 탐구하는 과정에서 그림을 분석한 흔적

한편, 효선이와 성재의 탐구 과정에는 다소 차이점도 발견되었다. 첫째, 둘레에서 제외되는 변을 가리킬 때, 효선이는 '사라지는 변' 또는 '없어지는 변'으로 언급한 반면, 성재는 '겹치는 변' 또는 '겹쳐 없어지는 변'으로 언급하고 있다(<에피소드 1>, <에피소드 2> 참조). 둘째, 효선이는 문제를 해결하고 설명하는 과정에서 무언가를 기록하거나 메모하는 행동을 보이지 않았던 반면, 성재는 미리 나누어준 A4 용지에 풀이 과정을 하나의 수식으로 표현하려는 시도를 했다([그림 Ⅳ-2] 참조).



[그림 Ⅳ-2] 성재가 처음 세 개 항들에 대해 탐구하는 과정에서 도형의 둘레를 하나의 수식으로 표현한 내용

연구자는 후속 질문으로, 세 번째 항에 대해서 둘레의 길이를 어떻게 구할 수 있겠는지 풀이 방법을 설명해보도록 했다. 두 학생은 앞에서와 마찬가지로, 가장 먼저 도형 그림을 주의 깊게 관찰하고 분석하는 행동을 보였고, 이어 타당한 설명과 함께 옳은 답을 제시했다. 즉, 세 개의 정사각형이 일렬로 이어 붙어있는 그림을 분석하여 둘레에서 제외시켜야 하는 변의 수에 대한 정보를 얻었고([그림 Ⅳ-1] 참조), 이를 반영하여, 둘레가 8이라는 것을 성공적으로 구했다(<에피소드 3>, <에피소드 4> 참조).

<에피소드 3 : 세 번째 항에 대한 효선이의 설명>

효 선 : (세 번째 도형을 주의 깊게 관찰하며) 정사각형 3개를 맞붙이면 없어지는 변의 수는 4개에요. 정사각형 3개의 둘레는 12, 따라서 12에서 4를 빼면 8이 돼요.

<에피소드 4 : 세 번째 항에 대한 성재의 설명>

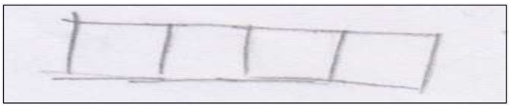
성 재 : (세 번째 그림에 연필선을 그으며) 똑같이 3개의 정사각형을 붙이면 변이 모두 12개가 되는데, 그 중에 2개 2개씩 해서 4개가 겹치므로 8개가 남아요. 그래서 8이에요.

특히, 성재는 세 번째 항을 탐구하는 과정에서도, 둘레의 길이를 하나의 수식으로 표현하는 데 성공적이었다([그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2] 참조).

나. 그림이 제시되지 않은 네 번째 항에 대해 탐구하는 과정 분석

그림을 제시해주지 않은 상태에서 정사각형 4

개를 이어 붙였을 때의 둘레를 구하도록 했을 때, 효선이와 성재 모두 둘레의 길이를 성공적으로 구했다. 그러나 문제 해결 과정에서 다소 차이를 보였다. 효선이는 문제 풀이를 위한 첫 과정으로, 그림을 그리는 행동부터 시작했고, 성재는 그림을 그리려는 시도를 하지 않았다. [그림 Ⅳ-3]은 효선이가 표현한 네 번째 항의 그림으로, 효선이는 이 그림을 주의 깊게 살펴보면서 <에피소드 5>와 같이 설명했다.



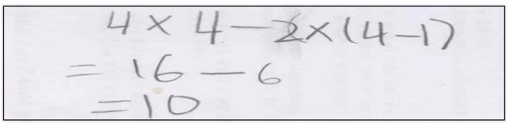
[그림 Ⅳ-3] 효선이가 그린 정사각형 4개를 이어 붙였을 때의 도형

<에피소드 5 : 네 번째 항에 대한 효선이의 설명>

효 선 : (종이에 정사각형 4개를 이어붙인 그림을 그려놓고 잠시 관찰한 후) 정사각형 4개를 맞붙이면, 없어지는 변이 6개이고, 정사각형 4개의 둘레는 4곱하기 4해서 16, 16에서 없어지는 변의 수를 빼면, 16빼기 6해서 10이 돼요.

즉, 효선이는 자신이 그린 도형을 통해, 서로 맞닿는 부분이 세 군데라는 것과 각 부분에서 변 2개씩 총 6개의 변이 둘레에서 제외된다는 사실을 확인했다. 그리고 정사각형 4개의 둘레가 16라는 것을 이끌어냈고, 16에서 겹쳐지는 변 6을 빼어 둘레가 10이라는 것을 구했다.

반면에, 성재는 정사각형 4개를 이어 붙인 도형 그림을 그리지는 않았다. 성재는 곧바로 종이에 [그림 Ⅳ-4]와 같이 풀이 과정을 적었다.



[그림 Ⅳ-4] 성재가 제시한 정사각형 4개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법

연구자가 성재에게 풀이 과정에 대한 설명을 요구하자, 자신이 제시한 풀이 과정에 대해 다음과 같이 설명했다(<에피소드 6> 참조).

<에피소드 6 : 네 번째 항에 대한 성재의 설명>

성 재 : 정사각형이 4개니까, 변은 모두 4개씩 4개가 되요. 식으로는 ‘4×4’로 나타낼 수 있고요. 정사각형 4개를 이어 붙일 때 겹치는 곳은 4보다 1 작은 3곳이므로 ‘4-1’을 한 후에, 3곳에서 각각 변이 2개씩 겹쳐지므로 ‘2×(4-1)’을 해서 나오는 수만큼 전체 변의 수에서 빼줘야 해요. 그것을 식으로 나타내면 ‘4×4-2×(4-1)’에요. 이것을 계산하면 16빼기 6은 10이 돼요.

성재가 정사각형이 4개일 때의 도형 둘레 구하는 방법을 살펴보면, 앞서 성재가 정사각형이 2개, 3개일 때의 도형 둘레를 구했던 방법과 마찬가지로 ‘전체 변의 수’와 ‘겹쳐지는 변의 수’를 각각 구한 후, ‘전체 변의 수’에서 ‘겹쳐지는 변의 수’를 빼고 있음을 알 수 있다. 그러나 차이점은 앞선 문제에서는 ‘겹쳐지는 변의 수’를 도형 그림관찰 및 분석을 통해 얻었던 것에 반해, 이번에는 도형 그림을 사용하지 않고, 겹쳐지는 곳이 몇 군데인지를 구하는 방법(‘겹치는 곳은 4보다 1 작은 3곳이므로 4-1을 한 후)과 총 겹쳐지는 변의 수를 구하는 방법(‘각각 변이 2개씩 겹쳐지므로 2×(4-1)을 해서)을 스스로 만들어 사용하는 경향을 보였다.

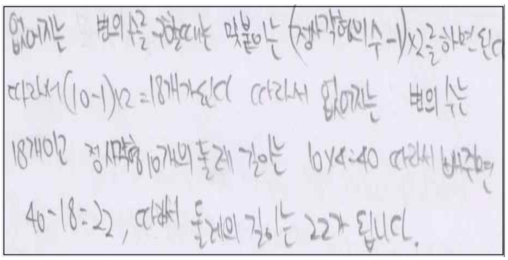
2. 일반화를 형성하는 단계에서 드러나는 학생들의 사고 및 표현의 특징

연구자는 초항부터 네 번째 항까지에 대해서는 학생들이 순차적으로 ‘정사각형의 개수에 따른 둘레의 길이’를 탐구하도록 했었다. 그러나 다섯 번째 항부터 아홉 번째 항까지에 대한 질문 없이 열 번째 항에 대해 둘레의 길이를 구해보도록 했으며, 풀이 과정을 종이에 자유롭게 적

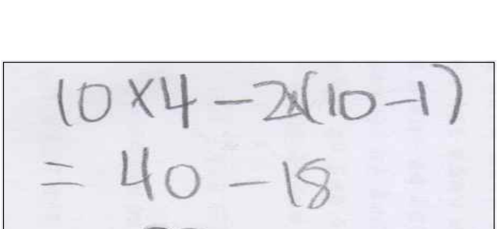
어보도록 했다.

효선이와 성재 모두 열 번째 항에서의 둘레의 길이를 정확하게 구했으며, 풀이 과정도 적절하게 제시했다. 주목할 점은, 처음 네 개 항에 대해 탐구하는 과정에서 두드러지게 도형 그림에 의존하는 모습을 보였던 효선이 조차도 이번에는 그림을 그리려는 시도를 하지 않았다는 점이다.

두 학생이 제시한 풀이 과정을 살펴보면, 처음 네 개 항에서 사용해왔던 방법이 동일하게 적용되고 있음을 알 수 있다. 즉, 두 사람 모두, 정사각형 1개의 둘레가 4라는 것에 착안하여 정사각형 10개의 둘레가 40이라는 것을 이끌어내었고, 40에서 서로 겹쳐지는 변 18을 빼어 직사각형의 둘레가 22라는 것을 구했다. 그러나 풀이과정을 표현하는 방식에 있어서는, 두 사람 사이에 확연한 차이를 보였다. 효선이는 언어적인 표현과 수식을 혼합하여 긴 문장으로 풀이 방법을 서술했고([그림 Ⅳ-5] 참조), 성재는 수식만을 사용하여 풀이를 간결하게 표현했다([그림 Ⅳ-6] 참조).



[그림 Ⅳ-5] 효선이가 제시한 정사각형 10개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법(1)



[그림 Ⅳ-6] 성재가 제시한 정사각형 10개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법(1)

먼저, 효선이의 풀이 과정을 살펴보면, '없어지는 변의 수를 구할 때'라는 문구와 '(정사각형의 수-1)×2'라는 식을 확인할 수 있다. 이는 효선이가 처음 네 개 항들에 대해서 둘레의 길이를 구하기 위해 제시했던 풀이 방식들과는 많은 차이가 있다. 즉, 효선이는 처음 네 개 항들에 대해 둘레의 길이를 구할 때, 그림에 의존하여 '둘레의 길이에서 제외되는 변의 수'를 유추해냈으며, 각각의 특정한 사례에만 해당되는 구체적인 진술을 제시했었다(예, "정사각형 2개를 맞붙이면, 2개의 변이 없어져요.", "정사각형 3개를 맞붙이면 없어지는 변의 수는 4개에요"). 반면, 열 번째 항에 대해 둘레의 길이를 구할 때에는, 모든 사례에 적용할 수 있는 일반적인 진술을 제시하고 있다([그림 Ⅳ-5]에서 '없어지는 변의 수를 구할 때는 맞붙이는 (정사각형의 수-1)×2를 하면 된다'). 더 나아가, 효선이는 자신이 직접 고안한 식에 '10'을 대입함으로써 '열 번째 열에서 둘레 길이를 구할 때, 제외해야 하는 변의 수'를 성공적으로 구하고 있다([그림 Ⅳ-5]에서 '따라서 (10-1)×2=18개가 된다'). 이는 앞선 일련의 문제해결 경험을 통해, 효선이의 사고 과정에서, 패턴을 일반화하고 그 일반화를 표현하려는 시도가 자연스럽게 나타나고 있음을 드러낸다.

한편, 성재의 풀이과정을 살펴보면, 열 번째 항의 둘레를 구하기 위해 제시한 수식의 형태가, 앞의 네 번째 항의 둘레의 길이를 구하기 위해 제시했던 수식의 형태와 완전히 일치한다는 것을 알 수 있다([그림 Ⅳ-4], [그림 Ⅳ-6] 참조). 사실, 성재는 이미 네 번째 항의 둘레를 구하는 과정에서부터 그림을 필요로 하지 않았었고, 정사각형을 이어붙일 때, 겹쳐지는 곳은 정사각형의 개수보다 1 작다는 일종의 규칙을 만들어 활용하고 있었다(<에피소드 6> 참조). 열 번째 항의 둘레의 길이를 구하는 과정에서도 망설임 없이 풀이 과정을 빠르게 적었다. 이는 성재가 이미

정사각형의 수가 주어졌을 때, 둘레의 길이를 어떻게 구해야 하는지에 대한 규칙을 발견했고, 이번에도 그러한 규칙을 적용하여 간단히 문제를 해결하고 있음을 짐작하게 한다.

이처럼 효선이와 성재는 일련의 패턴 탐구 과정을 거치면서, 점차 자신의 사고 과정에서, 패턴을 일반화하고 그 일반화를 문제 해결 과정에 적용하려는 시도를 자연스럽게 드러내고 있었다.

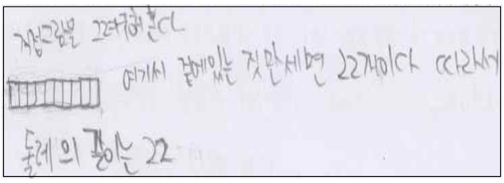
3. 일반화를 명확하게 하는 단계에서 드러나는 학생들의 사고 및 표현의 특징

연구자는 효선이와 성재가 '정사각형의 수'와 '둘레의 길이' 사이의 관계를 보다 명확하게 일반화할 수 있는지, 그리고 그 관계를 어떻게 표현하는지를 알아보기 위해, 열 번째 항을 예로, 정사각형의 수에 따른 둘레의 길이를 다양한 방법으로 탐구해보도록 했다.

효선이와 성재는 앞에서 일관성 있게 사용했던 방법 이외에 다른 접근을 시도하기 위해, 열 번째 항에 대한 그림을 필요로 했다. 이에, 두 사람은 열 번째 항에 대한 그림을 그려 탐구하기 시작했고, 결국에 가서는, 정사각형의 수가 얼마로 주어지더라도 간편하게 둘레의 길이를 구할 수 있는 일종의 공식 같은 것을 성공적으로 고안해냈다. 그러나 두 사람의 일반화 과정이나 표현상에 다소 차이가 있었다.

먼저, 효선이가 일반화된 공식을 탐구하고 표현하기까지의 과정을 분석하면 다음과 같다. 효선이는 앞선 탐구과정에서 '전체 변의 개수에서 제외시켜야 하는 변의 수'를 '(정사각형 수-1)×2'라는 식으로 일반화하여 표현했었다. 그러나 직접적으로 '정사각형의 수'와 '둘레의 길이' 사이의 관계를 명확하게 한마디로 표현하지는 못했었다. 이에, 열 번째 항에서의 둘레의 길이 구하는 방법을 설명할 때, 여러 절차에 걸쳐 길게 서술하는 방식을 사용했었다([그림 Ⅳ-5] 참조).

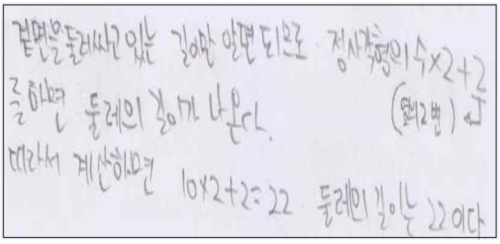
이런 상황에서, 연구자가 후속 질문으로 '정사각형이 10개일 때, 둘레의 길이를 다른 방법으로도 탐구해보라'고 했을 때, 효선이는 다소 머뭇거리는 행동을 보였다. 그리고 잠시 후, 연구자에게 직접 그림을 그려서 세는 방법도 되는지를 물었다. 연구자는 괜찮다고 했고, 효선이는 안심한 듯이 종이에 풀이 과정을 적어 내려갔다([그림 Ⅳ-7] 참조).



[그림 Ⅳ-7] 효선이가 제시한 정사각형 10개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법(2)

효선이는 종이에 정사각형 10개를 이어붙여 만든 도형 그림을 그렸고, 둘레에 해당하는 변을 직접 세어봄으로써 둘레가 22라는 것을 구했다. 그러나 여기서 주목해야 할 점은, 그림을 활용하여 둘레의 길이를 구했다는 점에 있어서는, 효선이가 앞에서 처음 네 개 항들을 탐구할 때 보였던 과정과 유사하지만, 둘레의 길이를 구하는 방법상에 있어서는 분명한 차이가 있다는 점이다. 즉, 효선이는 앞에서는 그림 분석을 통해 '전체 변의 수'와 '겹쳐지는 변의 수'에 대한 정보를 각각 얻은 후, 전체 변의 수에서 겹쳐지는 변의 수를 빼는 방법으로 문제를 해결했었다. 이에 반해, 이번에는 도형에서 '둘레에 직접적으로 해당하는 변의 수'에 대한 정보를 얻어냈다. 실제로, 효선이는 이미 앞선 탐구과정을 통해 둘레의 길이가 22라는 사실을 알고 있었음에도 불구하고, [그림 Ⅳ-7]의 내용을 적는 과정에서, 둘레에 해당하는 변들만을 연필로 하나하나 짚어가면서 1부터 22까지 변의 수를 세어나가는 행동을 보였다.

한편, 위에서 효선이가 열 번째 도형을 예로 둘레에 직접적으로 해당하는 변의 수를 구했던 과정들은, 효선이가 차후 '정사각형의 수'와 '둘레의 길이' 사이의 관계를 깨닫는데, 중요한 통찰의 기회가 되었다. 연구자는 후속 질문으로 둘레의 길이를 구하는 또 다른 방법을 탐구해보라고 했고, 효선이는 바로 전 자신이 적었던 풀이 방법([그림 Ⅳ-7] 참조)을 다시 살피더니, 이내 또 다른 풀이 방법을 적었고([그림 Ⅳ-8] 참조), 이에 대해 <에피소드 7>과 같이 설명하였다.



[그림 Ⅳ-8] 효선이가 제시한 정사각형 10개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법(3)

<에피소드 7 : 풀이 방법(3)에 대한 효선이의 설명>

효　선 : 겉면을 둘러싸고 있는 길이만 알면 되므로, 정사각형의 수 10에 2를 곱하고, 2를 더해서 22를 구할 수 있어요.

연구자 : 정사각형의 수 10에 2를 곱하고 2를 더한다고?

효　선 : 네. 정사각형의 수 10이 바로 직사각형 가로의 길이에요. 세로의 길이는 1이고요. 사각형의 둘레는 가로의 길이의 두 배와 세로의 길이의 두 배를 더하면 되잖아요. 그러니까 10×2+1×2=22가 돼요.

효선이는 정사각형 10개로 구성된 긴 도형 자체를 새로운 하나의 도형으로 인식하고, 가로의 길이와 세로의 길이를 구하는 데 초점을 맞추고 있었다. 이는 앞서 효선이가 제시했던 풀이 방법인, 정사각형 1개의 둘레가 4라는 것을 하나의 단위로 이용하여 몇 배로 계산했던 것(예, [그림 Ⅳ-2]의 '10×4=40', '40-18=22')과는 다른 접근이다.

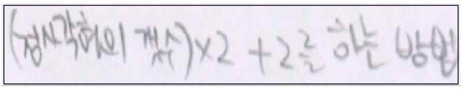
효선이는 정사각형 10개를 이어 붙였을 때의 둘레를 구하는 여러 가지 방법 중에서 가장 마음에 드는 방법으로 '(정사각형의 수)×2+2'의 방법을 들었다. 그 이유로는 그림을 그린다거나 변의 수를 일일이 셀 필요가 없어 간편하고, 계산이 복잡하지 않다는 것이었다.

연구자는 효선이에게 둘레를 간편하게 구하는 공식 같은 것을 만들 수 있는지 물었다. 이에 대해 효선은 <에피소드 8>과 같이 답하며, [그림 Ⅳ-9]를 적어보였다.

<에피소드 8 : 둘레를 구하는 공식 만들기>

연구자 : 그럼, 둘레를 구하는 데 이용할 수 있는 공식 같은 것을 만들어 볼 수 있을까?

효　선 : 윗변과 아래 변의 길이를 더한 다음 옆의 두 변의 길이를 더한다. 위와 아래의 변의 길이는 같으므로 위쪽 변의 길이×2를 한다. 그리고 양쪽 변의 길이를 더해주면 된다. 따라서 ([[그림 Ⅳ-9]를 적어보이며) 공식을 세우면 '(정사각형의 수)×2+1×2'이다.



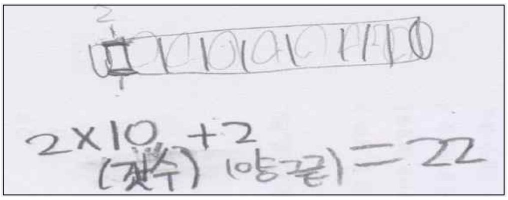
[그림 Ⅳ-9] 효선이의 둘레 구하는 공식

[그림 Ⅳ-9]와 <에피소드 7>, <에피소드 8>에서 알 수 있듯이, 효선이는 '정사각형의 수'와 '둘레의 길이' 사이의 관계를 명확하게 한마디로 표현하는 데 성공적이었다. 즉, '둘레의 길이'를 '(정사각형의 수)×2+2'라는 일반화된 식으로 표현할 수 있었다.

두 번째로, 성재가 일반화된 공식을 탐구하고 표현하기까지의 과정을 분석하면 다음과 같다. 성재는 앞선 탐구과정에서, 효선이와는 다르게, '정사각형의 수'와 같은 일반적인 표현은 사용하지 않았으며, 직접적으로 '정사각형의 수'와 '둘레의 길이' 사이의 관계를 명확하게 표현하려는 시도는 하지 않았었다. 그러나 정사각형의 수를

구체적인 수로 제시해주면, 그림의 도움 없이도 둘레의 길이를 신속하게 구해냈고, 둘레의 길이를 하나의 수식으로 간결하게 표현했었다.

이런 상황에서, 연구자가 후속 질문으로 ‘정사각형이 10개일 때, 둘레의 길이를 다른 방법으로도 탐구해보라’고 했을 때, 성재는 효선이와 마찬가지로 다소 머뭇거리는 행동을 보였다. 이어, 종이에 정사각형 10개를 이어붙인 도형 그림을 그려놓고, 주의 깊게 관찰하면서 골똘히 생각에 잠겼다. 성재는 그림에 연필로 무언가를 표시하면서, 자신이 그린 그림 밑에 [그림 Ⅳ-10]과 같이 적었고, 이에 대해 <에피소드 9>와 같이 설명하였다.



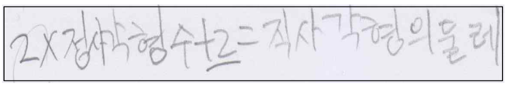
[그림 Ⅳ-10] 성재가 제시한 정사각형 10개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법(2)

<에피소드 9 : 풀이 방법(2)에 대한 성재의 설명>

성 재 : 일단 양쪽 옆에 있는 변은 빼놓고, 윗변과 아랫변의 길이를 먼저 생각해요. 그런데 윗변과 아랫변의 길이가 같으니까, 윗변을 구한 다음에 2를 곱하면 되죠. 윗변이 길이는 정사각형의 개수와 같아요. 그러니까 정사각형 개수에 2를 곱하면 윗변과 아랫변이 나온다는 말이에요. 마지막으로 양쪽 끝에 있는 변 2개만 더해주면 되죠. 정사각형 10개일 때를 구하면, ‘2×10+2’니까 22가 돼요.

성재는 정사각형이 10개라고 주어진 특수한 경우에 대해 문제를 해결하고 있음에도 불구하고, ‘정사각형의 개수에 2를 곱하면 윗변과 아랫변이 나온다’와 같이, 보다 일반적인 표현으로 풀이 과정을 설명했다. 그리고 마지막으로 ‘정사각형이 10개일 때를 구하면’이란 표현처럼, 앞에 제시한 풀이 전략에 10을 대입하듯이 문제를 해결하고 있었다.

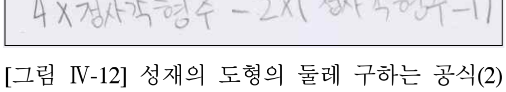
연구자는 성재에게 정사각형이 ‘몇 개’로 주어지던지 상관없이, 도형의 둘레를 구하는 공식 같은 것을 만들 수 있는지 물었다. 이에 대해 성재는 자신 있게 그렇다고 답했다. 연구자가 종이에 공식을 적어보라고 했고, 성재는 [그림 Ⅳ-11]과 같이 적었다.



[그림 Ⅳ-11] 성재의 도형의 둘레 구하는 공식(1)

[그림 Ⅳ-11]과 <에피소드 9>에서 알 수 있듯이, 성재역시 ‘정사각형의 수’와 ‘둘레의 길이’ 사이의 관계를 명확하게 한마디로 표현하는 데 성공적이었다. 즉, 성재는 효선이와 마찬가지로 ‘둘레의 길이’를 ‘2×(정사각형의 수)+2’라는 일반화된 식으로 표현할 수 있었다.

한편, 성재는 위에 제시한 식 이외에도 ‘4×(정사각형의 수)-(정사각형의 수-1)’와 같은 식도 고안했다([그림 Ⅳ-12] 참조). 그러나 ‘2×(정사각형의 수)+2’가 더 편리하다는 이유로 더 선호하는 경향을 보였다.



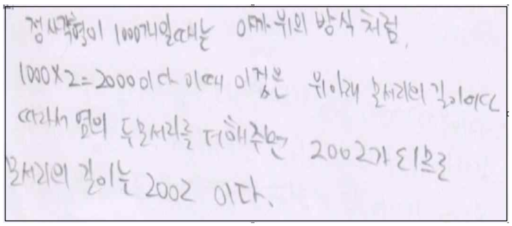
[그림 Ⅳ-12] 성재의 도형의 둘레 구하는 공식(2)

4. 일반화를 정당화하는 단계에서 드러나는 학생들의 사고 및 표현의 특징

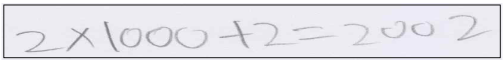
가. 일반화된 식을 20, 100, 1000번째 항들에 적용하여 탐구하는 과정 분석

효선이와 성재는 정사각형 패턴에서, 정사각형의 수가 주어졌을 때, 둘레의 길이를 구하는 일반화된 식을 성공적으로 고안해냈다. 구체적으로, 효선이는 ‘(정사각형의 수)×2+2’, 성재는 ‘2×(정사각형의 수)+2’의 식이 그것이다. 연구자는 후속 질문으로, 각각 20개, 100개, 1000개일 때의 둘레의 길이를 구해보도록 했다.

이에 대해, 효선이는 문제 풀이 방법으로 가장 마음에 든다고 답했던 ‘(정사각형의 수)×2+2’의 방법을 일관성 있게 적용하는 경향을 보였고([그림 Ⅳ-13] 참조), 성재 역시 자신이 선호하는 방법인 ‘2×(정사각형의 수)+2’를 적용하여 일련의 문제들을 해결하였다([그림 Ⅳ-14] 참조). 다만, 두 사람이 풀이 과정을 표현하는 방식에는 차이가 있었다. 효선이는 언어적인 표현과 수식을 혼합하여 긴 문장으로 풀이 방법을 서술한 반면, 성재는 수식만을 사용하여 풀이 방법을 간결하게 표현했다. 비록 표현 방식은 달랐지만, 두 사람 모두 자신의 답에 대해 “확신 한다”고 답하며, 강한 자신감을 보였다.



[그림 Ⅳ-13] 효선이가 제시한 정사각형 1000개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법

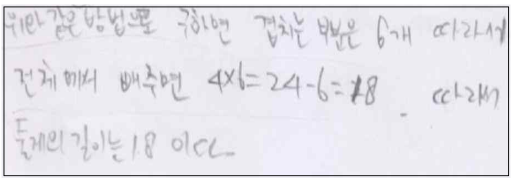


[그림 Ⅳ-14] 성재가 제시한 정사각형 1000개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법

나. 정육각형 패턴 상황으로 확장하여 탐구하는 과정 분석

정육각형 패턴에서 정육각형이 10개일 때, 둘레의 길이가 얼마인지 구해보도록 했을 때 효선이와 성재의 반응에는 많은 차이가 있었다. 효선이는 정사각형 패턴을 탐구할 때 거쳤던 과정들을 또다시 순차적으로 밟아 나갔던 반면, 성재는 정사각형 패턴 탐구과정의 처음과 중간 과정에서 보여주었던 모습은 건너뛰고, 바로 패턴을 일반화된 식으로 표현해 제시하는 행동을 보였다.

먼저, 효선이가 정육각형 패턴을 인식하기 시작하는 과정부터 일반화된 공식을 탐구하고 표현하기까지의 과정을 분석하면 다음과 같다. 연구자는 효선이에게 처음 세 개 항까지 그림으로 제시된 정육각형 패턴에 대해, 열 번째 항에서의 둘레의 길이를 구해보도록 했었다. 이에, 효선이는 열 번째 항에 대해 대답하기 전에, 첫째 항부터 네 번째 항에 이르기까지의 둘레 길이를 순차적으로 구해나갔다. 이 때 사용한 풀이 과정은 정사각형 패턴과 동일하게, ‘전체 변의 수’와 ‘겹쳐지는 변의 수’를 각각 구한 후, 둘 사이의 차이를 구하는 방법이었다([그림 Ⅳ-15] 참조).



[그림 Ⅳ-15] 효선이가 제시한 정육각형 4개를 이어 붙였을 때의 둘레의 길이 구하는 방법

효선이가 이와 같이 네 번째 항까지의 둘레의 길이를 구했을 때, 연구자는 열 번째 항에서의 둘레의 길이는 얼마나 될지 생각해 볼 것을 권했다. 이에, 효선이는 <에피소드 10>에 제시한 바와 같이 정사각형 패턴에서는 보이지 않았던,

새로운 접근 방법을 설명했다.

<에피소드 10 : 열 번째 항에 대한 효선이의 설명>

효 선 : 계속 구하다 보니까, 한 가지 규칙을 발견했어요. 그건 바로, 가면 갈수록 둘레의 길이가 4씩 늘어난다는 규칙이에요. 따라서 정육각형이 9개일 때의 둘레길이를 구하고, 거기에 4개를 더해주면 돼요.

연구자 : 그래? 그럼 그 방법을 사용해서 정육각형 10개를 이어붙일 때의 둘레길이를 구해볼래?

효 선 : 정육각형 9개를 이어붙일 때, 그러니까, 9개일 때는 전체 변의 개수가 9×6=54이고, 겹쳐지는 곳이 여덟 군데인데, 변 2개씩 사라지니까 변 8×2=16, 16을 빼야 해요. 그러면 9×6=54, 54-16=38 에요. 따라서 4를 더해주면 42, 둘레의 길이는 42에요.

효선이는 전항과 후항 사이의 둘레의 길이 차이가 '4'라는 규칙을 얻어냈고, 전항의 둘레의 길이에 4를 더하여 후항의 둘레의 길이를 구하는 방법을 발견했다. 그리고 열 번째 항에서의 둘레의 길이를 구하는 데 적용하기 위하여, 아홉 번째 항에서의 둘레의 길이를 먼저 구하고 4를 더했다. 결국 효선이는 성공적으로 열 번째 항에서의 둘레를 구했다. 효선이는 이 방법이 기존의 방법들과는 달리 4만 더해주면 되므로, 꽤 마음에 들어 했다. 그러나 이런 순환적인 패턴은 궁극적으로 정육각형의 수에 따른 둘레의 길이를 사이의 관계를 명확히 이해하고 활용하는 데에는 한계가 있다.

연구자는 후속 질문으로, 효선이가 새로 발견한 방법을 적용하여 100번째 항에서의 둘레의 길이를 구해볼 것을 권했다. 이에, 효선이는 자신이 발견한 순환적인 패턴을 100번째 항에 적용하려고 시도했다. 그러나 결국 실패했고, 또 다른 접근 방법을 탐구하기 위해 노력했다. <에피소드 11>은 효선이가 순환적인 패턴의 한계를 깨닫고 100번째 열에서의 둘레를 구하기 위해 새로운 접근을 탐구하는 과정이며, [그림 Ⅳ-16]은 효선이가 그림을 통해 얻은 정보를 활용하여 메모한 내용이다.

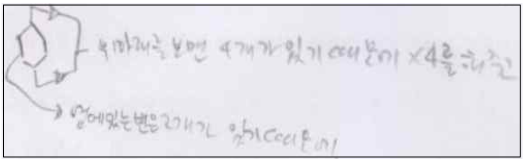
<에피소드 11 : 순환적 패턴의 한계를 깨닫고 100번째 열에서의 둘레를 구하기 위해 탐구하는 과정>

연구자 : 그럼, 네가 발견한 규칙으로 정육각형 100개를 이어붙일 때의, 둘레의 길이를 구해볼래?

효 선 : (잠시 생각에 잠겼다가) 제가 발견한 규칙을 사용하려면, 정육각형 99개를 이어 붙였을 때의 둘레를 먼저 구해야 하는데, 복잡하네요.

연구자 : 그럼, 어떻게 할까?

효 선 : (그림을 다시 살펴보며) 그림을 보면, 정육각형 한 개마다 위에 변 2개와 아래에 변 2개해서, 위와 아래에 변이 4개씩 있어요. 그러니까 정육각형을 이어붙인 개수에 곱하기 4를 해야 해요. 또, 양 옆에 변이 한 개씩 총 2개가 있으니까 2를 더해줘요. 그러니까, 이어붙인 개수에 곱하기 4를 한 후, 더하기 2를 해주면 돼요.



[그림 Ⅳ-16] 효선이가 새로운 접근을 시도하는 과정에서 그림을 관찰하고 탐구한 내용

효선이는 위와 같이 정육각형 패턴의 변들을, 크게 정육각형의 위와 아래에 위치한 변 4개씩과 양쪽 옆에 놓인 변 2개로 구분하여 보고 있다. 그리고 둘레의 길이를 '(정육각형의 수)×4+2'의 방법으로 구할 수 있음을 발견하였다. 이어, 자신이 발견한 규칙에 '100'을 대입하는 방법을 사용하여, <에피소드 12>와 같이 100번째 항에

서의 둘레의 길이를 설명했다.

<에피소드 12 : 100번째 항에 대한 효선이의 설명>
효 선 : 둘레의 길이는 100×4를 한 후, 2를 더하면 돼요. 100×4는 위와 아래 변의 길이를 구하는 것이고, +2는 옆쪽 길이를 더해주는 거예요. 따라서 둘레의 길이는 402가 돼요.

효선이는 전항의 둘레의 길이에 4를 더하여 후항의 둘레의 길이를 구하는 순환적 패턴으로는 100번째 항에서의 둘레의 길이를 구하기 어렵다는 사실을 경험했고, '(정육각형의 수)×4+2'의 방법을 적용하여 성공적으로 100번째 항에서의 둘레의 길이를 구했다. 그러나 연구자가 정육각형 패턴에서 둘레의 길이를 구하는 일종의 공식을 만들어보라고 했을 때, 첫 번째 방법으로, 전항에 4를 더하는 방법을 들었다(<에피소드 13> 참조).

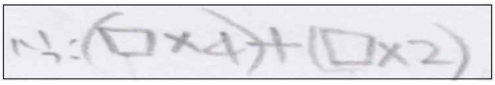
<에피소드 13 : 정육각형 패턴에서 둘레 구하는 공식에 대한 효선이의 설명 (1)>
연구자 : 정육각형패턴에서 어떤 열의 둘레를 구하는데 이용할 수 있는 방법이나 공식을 만들 수 있을까?
효 선 : 규칙을 찾아서 구하는 방법이 있어요. 정육각형을 한 개씩 더 이어붙일수록 둘레의 길이가 4씩 커지는데, 따라서 바로 전 둘레의 길이 더하기 4를 하면 알 수 있어요. 예를 들면, 10개일 때를 구할 때 9개를 알면, '9개일 때 둘레 +4'를 할 수 있다는 말이에요. 2개를 이어붙였을 때의 길이는 1개일 때 둘레인 6에 4를 더한 것과 같아요.

이에, 연구자가 "만약 아홉 번째 항에서의 둘레를 모른다면?"이라고 질문하자, 두 번째로, '전체 변의 수에서 겹치는 변의 수를 빼는 방법'을 들었다. 그리고 연구자가 또 다른 방법을 제안하자, 마지막 세 번째로, '(정육각형의 수)×4+2'의 방법을 들었다. 효선이는 정사각형 패턴에서 다른 어떤 방법들보다, '(정사각형의 수)×2+2'의 방법을 선호했었다. 그러나 정육각형 패턴에서 일반화된 방법을 고안하는 과정에서는 우선적으로 제시하지는 않았다.

그러나 위의 세 가지 방법 중에 가장 마음에 드는 방법을 선택하게 했을 때에는, 마지막 세 번째 방법을 들었다(<에피소드 14> 참조).

<에피소드 14 : 정육각형 패턴에서 둘레 구하는 공식 중에 효선이가 가장 선호한다고 대답했던 방법>
연구자 : 여러 방법 중에 어떤 방법이 가장 맘에 드니?
효 선 : 위아래 둘레를 구하고, 옆의 둘레를 더해주는 방법이요. 위와 아래 둘레의 길이는 정육각형의 수에 곱하기 4를 해야 해요. 따라서 10개일 때는 (10×4)를 하고, 더하기 (1×2)를 하면, 42개가 돼요.
연구자 : 이것을 하나의 식으로 써보겠니?
효 선 : (종이에 '(□×4)+(□×2)'라고 쓰며) 여기요.
연구자 : 네모가 두 개나 있네? 앞의 네모는 뭐고, 뒤에 네모는 뭐지?
효 선 : 앞의 네모는 이어붙인 정육각형의 수고요, 뒤의 네모는 정육각형의 한 변의 길이에요.

연구자는 효선이에게, 효선이가 가장 선호한다고 대답했던 방법을 하나의 식으로 표현해 볼 것을 제안했다. 이에 효선이는 [그림 Ⅳ-17]과 같이 '(□×4)+(□×2)'라고 적어보였다.



[그림 Ⅳ-17] 효선이가 풀이 과정을 하나의 일반화된 식으로 표현한 내용

한편, '(□×4)+(□×2)'의 네모가 각각 무엇을 의미하는지에 대한 답변으로, 효선이는 앞의 네모는 '이어붙인 정육각형의 수'를, 뒤의 네모는 '정육각형의 한 변의 길이'를 의미한다고 설명했다(<에피소드 14> 참조).

두 번째로, 성재가 일반화된 공식을 탐구하고

표현하기까지의 과정을 분석하면 다음과 같다. 연구자는 성재에게도 동일한 방식으로, 처음 세 개 항까지 그림으로 그려진 정육각형 패턴을 제시해주며 열 번째 항에서의 둘레의 길이를 구해보도록 했다. 이에, 성재도 그림을 주의 깊게 관찰하기 시작했다. 그러나 얼마 지나지 않아, 자신 있는 표정으로 종이에 [그림 Ⅳ-18]과 같이 써 보였고, <에피소드 15>와 같이 자신이 고안한 공식을 설명해나갔다.

4×(정육각형 수)+2 = 정육각형의 둘레

[그림 Ⅳ-18] 성재가 제시한 정육각형 패턴에서 둘레 구하는 방법

<에피소드 15 : 정육각형 패턴에서 둘레 구하는 공식에 대한 성재의 설명>

성　재 : 10 곱하기 4는 40에다가 2를 더하니까, 42에요.

연구자 : 너는 '정육각형 수'라고 적었는데?

성　재 : 네, 정육각형이 몇 개든, 정육각형의 개수에 4를 곱하고 2를 더해주면 정육각형의 둘레가 나와요.

연구자 : 정육각형의 둘레라고?

성　재 : 정육각형 이어붙인 것의 둘레

연구자는 후속 질문으로, 성재가 발견한 방법을 적용하여 100번째 항에서의 둘레의 길이를 구해볼 것을 권했다. 이에, 성재는 망설임 없이, "100 곱하기 4에 2를 더하니까, 402에요."라고 답했다. 이에, 연구자는 정육각형 대신, 정십이각형으로 구성된 패턴이라면 어떠하겠는지 물었고, 성재는 자신 있는 태도로, [그림 Ⅳ-19]와 같이 적어보였다.

10×(십이각형의 수)+2 = 십이각형의 둘레

[그림 Ⅳ-19] 성재가 제시한 정십이각형 패턴에서 둘레 구하는 방법

연구자는 이어서, '한 변의 길이가 1인 정이십각형을 이어붙이는 상황'에 대해 생각해보자고 말한 후, '둘레의 길이가 92가 되려면, 정이십각형 몇 개를 이어 붙어야 할지'를 물었다. 성재는 잠시 생각하다가, 종이에 [그림 Ⅳ-20]과 같이 적어보인 후, '다섯 개'라고 답했다.

(20-2)×(정이십각형 수)+2=92

→(92-2)÷(20-2)=(정이십각형 수)

90÷18=(정이십각형 수)=5

[그림 Ⅳ-20] 성재가 제시한 정이십각형 패턴에서 둘레가 92일 때, 정이십각형 수를 구하는 방법

연구자가 정말 5개만 있으면 92개가 되는지 재차 묻자, 성재는 확신에 찬 말투와 표정으로 '그렇다'고 답하며 자신감을 보였다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 기하 증가 패턴 상황을 중심으로 학생들이 함수적 관계를 인식하고 일반화하며 표현하는 과정을 분석하였다. 분석 결과에 따른 결론 및 제언을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 일반화를 시작하는 단계에서 어떤 관계에 기초하여 문제를 해결하기 보다는 그림에 의존하여 문제를 해결하는 경향을 보였다. 그리고 이러한 경향은 개인차가 있었는데, 효선이는 네 개 항, 성재는 세 개 항을 탐구하는

과정까지 그림을 먼저 분석하고 그 결과를 반영하여 해결 과정을 설명하였다. 본 연구에 참여한 학생들이 중상위권 이상의 학생들이었고, 결과적으로 일반화를 성공적으로 해낼 수 있는 학생들이었음에도 불구하고, 처음 몇 개 항을 탐구하는 과정 동안에는 함수적 관계를 쉽게 파악하지 못했다. 이런 점들을 감안할 때, 초등학교에서 패턴을 일반화하는 경험을 제공하고자 할 때, 초기 항들에 대해 충분히 탐구할 수 있는 기회를 제공하는 것이 필요하다.

둘째, 학생들이 후속 항들을 대상으로 패턴을 탐구할 때, 이전에 자신이 패턴을 탐구하던 방식들을 그대로 고수하여 적용하는 경향이 관찰되었다. 본 연구에서 학생들은 처음 네 개 항을 탐구하는 방식들에는 일관성이 있었고, 추가로 열 번째 항을 탐구하는 상황에도 동일한 방식이 적용되었다. 예를 들어, 효선이는 처음 몇 개항들을 탐구하는 과정에서 계속해서 '전체 변의 수'에서 '겹치는 변의 수'를 제외하여 둘레의 길이를 구했었다. 이에, 연구자가 다양한 해결 방법을 탐구해보도록 하자, 효선이는 둘레에 직접적으로 해당하는 변들만 빠르게 계산하는, 더 효율적인 방법을 찾아냈다. 그리고 이 방법은 결국 효선이가 가장 선호하는 방법이 되었다. 이처럼 학생들은 더욱 효율적인 방법을 고안할 수 있는 잠재력을 가지고 있다. 그러나 기존의 방법을 그대로 고수하려는 성향은 이러한 학생들의 능력이 충분히 발휘하는 것을 막을 수도 있다. 따라서 패턴 탐구 과정에서 학생들의 잠재적 능력이 충분히 발현될 수 있도록, 교사가 적재적소에 다양한 방법으로 탐구하도록 발문을 제시하는 게 중요하다.

셋째, 기하 증가 패턴에서의 체계적인 탐구는 초등학생들이 변수에 대한 초보적인 개념을 갖게 하는 데 도움이 된다. 본 연구에서 학생들은 패턴의 탐구과정을 통해 일반화에 대한 시도와 그 일반화를 스스로 표현하려는 시도가 자연스럽게 나타났다. 특히, 함수적 관계를 일반화하여 표현하려는 과정에서, 학생들은 구체적인 사례들을 포괄하여 지칭할 수 있는 용어로 '정사각형 수', '직사각형의 둘레'를 도입했다. 그리고 이런 용어들을 사용하여 '(정사각형의 수)×2+2=(직사각형의 둘레)'라는 일반화된 식을 성공적으로 고안해냈다. 이처럼 기하 증가 패턴은 학생들이 변수의 필요성을 깨닫고, 비형식적으로 변수를 도입할 수 있게 하는 의미 있는 맥락을 제공한다.

넷째, 학생에 따라 일반화하는 속도와 표현 방식에는 차이가 있었으나, 함수적 관계를 인식하기 시작해서 일반화에 도달하기까지 거쳐야 하는 단계에 있어서는 공통점이 발견되었다. 먼저, 그림에 의존하여 문제 상황을 이해하고, 특정한 사례에만 적용되는 구체적인 수치를 사용하여 문제해결 과정을 표현하는 단계를 거쳤다. 두 번째로, 앞서 탐구했던 사례 경험들 속에서 변화하는 양들에 주목하고, 변량들을 총괄하여 지칭하기 위해, 단편적으로나마 일반적인 표현을 시도하는 단계를 거쳤다. 마지막으로, 독립변수를 지칭하는 일반적인 용어와 종속변수를 지칭하는 일반적인 용어를 함께 사용하여, 하나의 문장 또는 식으로 표현하는 단계를 거쳤다. 물론 더 많은 연구와 검증이 필요하겠지만, 초등학교에서 함수적 사고를 촉진하고자 할 때, 이러한 일반화 단계와 특징들을 고려할 필요가 있다.

다섯째, 현재 초등학교 수학 교과서에서는 기하 증가 패턴에서 규칙을 찾아 수나 언어로 표현하는 활동들이 다수 포함되어 있다. 그러나 이러한 활동들을 통해 함수적 관계를 일반화하고 일반화된 식으로 표현하는 단계까지는 연결하지 못하고 있다. 대신, 함수적 관계를 찾고 □, △등을 사용하여 일반화된 식으로 표현하는 과정은 표 패턴 과제를 중심으로 구성되어 있다. 본 연구는 기하 증가 패턴 과제가 일반화를 시작하는

단계에서부터 일반화를 정당화하는 단계에 이르기까지 매우 유용하게 사용될 수 있음을 확인하였다. 특히, 기하 증가 패턴 과제는 학생들로 하여금 일반화한 함수적 관계를 다른 문제 상황에 적용하고 확장하는 기회도 자연스럽게 제공해 주었다. 이에, 초등교육 과정에서 기하 증가 패턴을 함수적 사고 신장과 관련하여 보다 적극적으로 활용할 필요가 있다.

마지막으로, 본 연구는 초등학교 과정에서 이미 다루고 있는 정다각형의 둘레를 소재로, 학생들의 함수적 사고 과정을 깊이 있게 탐구하였다. 이는 초등학교 교육과정에 굳이 새로운 내용을 추가하지 않더라도, 기존 소재나 문제를 교사가 어떻게 활용하느냐에 따라 의미 있게 초등학생들의 함수적 사고를 신장할 수 있는 가능성을 보여준 것으로 해석될 수 있다. 이에 부족하나마 본 연구를 통해 초등학생들의 함수적 사고 신장과 관련된 후속 연구가 양산되기를 기대한다.

참고문헌

강완 · 나귀수 · 백석윤 · 이경화(2013). **초등수학 교수 단위 사전**. 서울: 경문사.

교육부(1999). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2008). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8].

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤(2011). **예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰-패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로. **수학교육학연구, 12**(3), 353-369.

김성준(2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **학교수학, 5**(3), 343-360.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**, 서울대학교 박사학위논문.

김연식 · 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. **대한수학교육학회 논문집, 2**(1), 1-15.

변희현 · 주미경(2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성. **수학교육학연구, 22**(3), 353-370.

최지영 · 방정숙(2011). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장방안 탐색: 곱셈의 결합법칙 탐구에 관한 수업 사례 연구. **학교수학, 13**(4), 581-598.

최지영 · 방정숙(2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. **학교수학, 14**(3), 275-296.

Billings(2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on* *mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001a). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-184). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001b). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 12th ICME Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp.252-257). The University of Melbourne, Australia.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: the clinical interview in psychological research and practice*. New York: Cambridge university press.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Erlbaum.

Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 3-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum.

Moss, J., Beatty, R., Brakin S., & Shillolo, G. (2008). "What is your theory? What is your rule?": Fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 155-168). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Governors Association Center for Best Practice and Council of Chief State School Officers(NGA Center and CCSSO). *Common core state standards for mathematics*. Washington, D.C.: NGA Center and CCSSO, 2010. http://www.corestandards.org.

Orton, J., Orton, A, & Roper, T. (1999). Pictorial and pracical contexts and the perception of pattern. In Orton, A. (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). New York: Continuum Books.

Smith, M. S., Silver, E. A., & Stein, M. K. (2005). *Improving instruction in algebra: Using cases to transform mathematics teaching and learning* (Vol. 2). New York: Teachers College Press.

Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson Education.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

An Analysis on Sixth Graders' Recognition and Thinking of Functional Relationships
- A Case Study with Geometric Growing Patterns -

Choi, JiYoung (Seoul YoungNam Elementary School)
Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)

This study analyzed how two sixth graders recognized, generalized, and represented functional relationships in exploring geometric growing patterns. The results showed that at first the students had a tendency to solve the given problem using the picture in it, but later attempted to generalize the functional relationships in exploring subsequent items. The students also represented the patterns with their own methods, which in turn had an impact on the process of generalizing and applying the patterns to a related context. Given these results, this paper includes issues and implications on how to foster functional thinking ability at the elementary school.

* Key Words : Geometric Growing Patterns(기하 증가 패턴), Pattern Recognition(패턴 인식), Generalization(일반화), Justification(정당화), Functional Thinking(함수적 사고), Functional Relationship(함수적 관계), Representation(표현)

논문접수 : 2014. 3. 15
논문수정 : 2014. 4. 24
심사완료 : 2014. 4. 24