

# 빗 형태 패턴을 가지는 OFDM 시스템을 위한 파일럿 심볼 기반 채널 주파수 응답의 추정

김 영 웅\*, 김 남 훈\*, 윤 은 철<sup>o</sup>

## Pilot Assisted Channel Frequency Response Estimation for an OFDM System with a Comb-Type Pilot Pattern

Youngwoong Kim\*, Namhoon Kim\*, Eunchul Yoon<sup>o</sup>

### 요 약

본 논문은 OFDM 블록에 파일럿 심볼들이 빗 형태의 패턴에 따라 배치된 경우, 가상 부반송파를 가지는 OFDM 시스템의 channel frequency response (CFR)를 추정하는 여러 방식들을 서로 비교한다. 채널 임펄스 응답을 먼저 예측하는 것이 목적인 minimum mean square error (MMSE) 기반의 채널추정 방식과 누설현상의 억제 목적인 MMSE 기반의 채널추정 방식이 지금까지 비교되지 않았기 때문에, 본 논문에서는 후자 방식과 전자 방식의 mean square error (MSE) 값들의 차이가 양수가 됨을 유도함으로써 전자 방식의 우수성을 논리적으로 증명한다. 아울러 본 논문에서는 파일럿 수의 변화가 MMSE 기반 채널추정 방식과 least-square (LS) 기반 채널 추정 방식의 성능에 미치는 영향을 조사한다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 채널추정 방식들의 성능을 정량적으로 확인한다.

**Key Words** : Channel estimation, pilot, OFDM, MMSE, least square

### ABSTRACT

The pilot assisted channel frequency response (CFR) estimation schemes for an OFDM-based system with virtual subcarriers are analyzed under the assumption that pilot symbols are located according to a comb-type pattern in the OFDM block. In particular, as the minimum mean square error (MMSE) based scheme aiming to directly predict the channel impulse response and the MMSE based scheme aiming to suppress the leakage have not been clearly compared, by proving that the mean square errors (MSEs) of the latter scheme is always larger than that of the former scheme, this paper shows that the former scheme is superior to the latter scheme. Moreover, the impact of the number of pilots on the performances of the MMSE and least-square based channel estimation schemes are investigated. The performance analyses of the presented schemes are confirmed by computer simulation.

\* 본 논문은 2013학년도 중소기업 융복합기술개발사업을 수행 중인 산업체 위월트(주)의 위탁연구개발 지원에 의하여 연구되었음.

※ 본 논문은 2013학년도 건국대학교의 연구년 교원 지원에 의하여 연구되었음.

• First Author : Department of Electronics Engineering, Konkuk University, woongk88@konkuk.ac.kr, 학생회원

◦ Corresponding Author : Department of Electronics Engineering, Konkuk University, ecyoon@konkuk.ac.kr, 종신회원

\* 건국대학교 전자공학부, mc3359@konkuk.ac.kr, 학생회원

논문번호 : KICS2014-04-125, Received April 8, 2014; Revised May 27, 2014; Accepted May 27, 2014

## I. 서 론

OFDM 시스템에서 동기 검출의 성능은 채널 추정  
 의 정확성에 영향을 받을 수 있다<sup>[1]</sup>. 현재 유망한 채널  
 추정 기술로서 주파수 영역에서 수행되는 파일럿 심  
 볼 기반 채널 추정 기법<sup>[2,3]</sup>이 존재하는데, 이 방법은  
 구현이 쉽기 때문에 많이 사용되고 있다. 파일럿의 범  
 위가 전체 스펙트럼을 차지하는 경우, 파일럿들이 균  
 등하게 배치되는 빔 형태 방식이 지금까지 최적이라  
 고 알려져 있다<sup>[4]</sup>. 또한 그 방식은 간단하기 때문에 적용  
 용에 유리하다. 그러나 현실적으로 OFDM 시스템은  
 다른 시스템과의 간섭을 방지하기 위해 스펙트럼의  
 끝 부분에 가상 부반송파라 불리는 사용하지 않는 부  
 반송파 영역을 둔다. 이 경우, 파일럿 신호들 사이의  
 채널들에 대해 discrete Fourier transform (DFT)를 수  
 행한 다음 인터폴레이션(interpolation)을 적용하는 방  
 식은 channel impulse response (CIR)의 왜곡 때문에  
 성능이 저하될 수 있다. 이러한 현상을 누설현상이라  
 부른다. 누설현상은 파일럿이 있는 데이터 블록이 주  
 파수 범위에 부분적으로 국한되어 있는 경우에도 발  
 생한다. [5]에서는 누설현상을 억제하는 경험적 채널  
 추정 기법을 제안하였다. 그러나 이 방식은 위치가 균  
 일하지 않은 추가적인 파일럿들을 필요로 하고, 가상  
 부반송파 영역이 확장될 경우에는 오히려 성능이 저  
 하될 수 있다는 단점이 있다. [6]에서는 가상 부반송  
 파 범위에 속하는 파일럿들에 대한 CFR를 MMSE 기  
 반의 선형 추정기를 통하여 추정함으로써 누설현상  
 문제에 대처하였다. 이 방법은 물리적 파일럿 위치뿐  
 만 아니라 가상 파일럿 위치에서 얻은 CFR를 IDFT  
 함으로써 CIR를 얻는다. 그러나 누설현상을 억제하기  
 위해 설계된 MMSE 기반의 채널 추정기는 가상 부반  
 송파 상에서 MSE가 최소화되지 않기 때문에 최적이  
 라 할 수 없다.

본 논문에서는 OFDM 블록에 파일럿 심볼들이 빔  
 형태의 패턴에 따라 배치되었다는 가정 하에서 가상  
 부반송파를 가지는 OFDM 시스템의 channel  
 frequency response (CFR)를 추정하는 여러 방식들을  
 서로 비교한다. 특히 채널 임펄스 응답을 먼저 예측하  
 는 것이 목적인 minimum mean square error  
 (MMSE) 기반의 채널추정 방식과 누설현상의 억제가  
 목적인 MMSE 기반의 채널추정 방식이 지금까지 비  
 교되지 않았기 때문에, 본 논문에서는 후자 방식과 전  
 자 방식의 mean square error (MSE) 값들의 차이가  
 항상 양수가 됨을 유도함으로써 전자 방식이 후자 방  
 식보다 우수함을 논리적으로 증명한다. 아울러 본 논

문에서는 파일럿 수의 변화가 MMSE 기반 채널추정  
 방식의 성능과 least-square (LS) 기반 채널 추정 방  
 식의 성능에 미치는 영향을 조사한다. 컴퓨터 시뮬레이  
 션을 통해 채널추정 방식들의 성능을 정량적으로 확  
 인한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. 제 2장에서는  
 빔 형태의 파일럿 패턴을 갖는 OFDM 시스템의 모델  
 에 대해 설명한다. 제 3장에서는 두개의 MMSE 기반  
 채널 추정기들을 유도하고 각각의 MSE 성능을 분석  
 한다. 제 4장에서는 두개의 LS 기반 채널 추정기들을  
 유도하고 이를 MMSE 기반의 채널 추정기들과 비교  
 한다. 제 5장에서는 앞서 제시한 채널 추정 방식들을  
 수치적으로 분석한다. 제 6장에서는 본 논문의 결론  
 을 내린다.

표기 : 본 논문에서는 표기상의 편의를 위하여 다음  
 과 같은 표기법을 사용한다.  $I_m$  및  $0_m$ 은 각각  
 $m \times m$  크기의 단위 행렬과 영 행렬을 나타내고  
 $diag\{\cdot\}$  및  $tr\{\cdot\}$ 는 각각 diagonalization 연산자  
 및 trace 연산자를 나타낸다.  $E\{\cdot\}$ 는 기댓값 연산자  
 를 나타낸다.  $(\cdot)^T$  및  $(\cdot)^H$ 는 각각 transpose 연산  
 자와 Hermitian 연산자를 나타낸다.

## II. 시스템 모델

본 논문에서는  $N = N_{us} + N_{vs}$  개의 부반송파를 갖  
 는 OFDM 시스템을 다룬다.  $N_{us}$ 와  $N_{vs}$ 는 각각 데이  
 터 및 파일럿 전송에 사용되는 가용 부반송파의 수와  
 물리적으로 사용되지 않는 가상 부반송파의 수를 나  
 타낸다. 또한 OFDM 블록들은 서로 독립적으로 변하  
 고 주파수 영역에 주어지는 OFDM 채널은 주파수 선  
 택적이라 가정한다. 길이  $L$ 의 CIR는  
 $h = [h(0), h(1), \dots, h(L-1)]^T$ 라고 표기할 수 있다.  
 $L \times L$  크기의 채널 상관관계 행렬  $C_h = E\{hh^H\}$ 는 대  
 각행렬이지만 반드시 full rank일 필요는 없다. CFR  
 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(k) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)e^{-j2\pi nk/N}. \quad (1)$$

동기 검출을 위해서는  $H(k)$ 가 필요하다. 우선 송신기  
 는 파일럿을 전송한다. 수신기는 미리 알고 있는 파일  
 렛 값들을 사용하여 파일럿이 전송된 부반송파들 상에  
 서의 채널을 추정한다. 그 다음 수신기는 파일럿을 사  
 용하여 얻은 채널들의 인터폴레이션 (interpolation)을

통하여 데이터 전송에 사용되는 부반송파들에 대한 채널들을 추정한다. 본 논문에서는  $k_{start} \leq k \leq k_{end}$ 의 인덱스를 갖는 가용 부반송파들에 대한 CFR를 추정한다.  $N_p$ 개 물리적 파일럿들  $\{P(k) : 0 \leq k \leq N_p - 1\}$ 은 가용 부반송파들  $\{a_k : 0 \leq k \leq N_p - 1\}$ 에 삽입되어 있다고 가정한다. 이와 유사하게  $N_v$ 개의 가상 파일럿들  $\{V(k) : 0 \leq k \leq N_v - 1\}$ 은 가상 부반송파들  $\{b_k : 0 \leq k \leq N_v - 1\}$ 에 배치되어 있다고 가정한다. 여기서 주의할 것은 가상의 파일럿들은 OFDM 블록 내에 실제로는 존재하지 않는다는 것이다. 만약 OFDM 블록이 총  $M = N_p + N_v$ 개의 가용 및 가상 파일럿들을 갖는다면 파일럿들의 위치 간격은  $\Delta = N/M$ 이 된다. 이때 [6]에서와 같이  $M \geq L$  이고,  $N/M$  이 정수이고, 빗 형태로 배치되는  $N_p$ 개 파일럿들의 위치들이  $\{a_k : a_k = a_0 + \Delta \cdot k, 0 \leq k \leq N_p - 1\}$ 라 가정한다. 물리적 파일럿의 위치로부터 복조된 신호들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y = PBh + W. \quad (2)$$

P는 다음과 같이 정의된 대각행렬이다.

$$P = \text{diag}\{P(0), P(1), \dots, P(N_p - 1)\}. \quad (3)$$

$N_p \times L$  크기의 행렬 B는 다음과 같이 정의된다.

$$[B]_{k,n} = e^{-j2\pi a_k n / N}, 0 \leq k \leq N_p - 1, 0 \leq n \leq L - 1. \quad (4)$$

W는 평균이 0이고 분산이  $\sigma^2 I_{N_p}$ 인 complex 가우시안 노이즈이다. 만약 물리적 파일럿들이 위상 편이 방식으로부터 얻어진다면 (예 :  $P(k) = \pm 1$ ), 식 (2)의 양변 앞에  $P^H$ 를 곱하여 다음을 얻을 수 있다.

$$Z = Bh + \tilde{W}. \quad (5)$$

이때  $\tilde{W} = P^H W$  이다.

### III. MMSE 기반 채널 추정 방식

채널 상관 정보가  $C_h = E\{hh^H\}$ 로 주어질 때, 가용 부반송파 위치에서의 CFR는 선형 MMSE 추정기를 기반으로 Z를 사용해서 추정할 수 있다. 노이즈의 영향을 무시한다면 Z는  $N_p$ 개의 파일럿들 위치에서 주

파수 채널들을 나타낸다. 이어지는 장에서는 두 가지 변형된 MMSE 추정 방식들을 소개하고 그 방식들에 대한 MSE를 유도한 후 성능을 비교한다.

#### 3.1 MMSE 기반 디자인 I (MMSE-OPT)

CIR는 선형 추정기  $K_1$ 을 사용하여  $\hat{h}_1 = K_1 Z$ 와 같이 구할 수 있다. 원하는 부반송파 위치에서의 CFR는  $\hat{H}_1 = G\hat{h}_1 = GK_1 Z$ 에 의해 추정된다. 선형 추정기  $K_1$ 은 다음과 같이 설계된다.

$$\min_{K_1} MSE_1 = \frac{1}{N_{us}} E\{\|GK_1 Z - Gh\|^2\}. \quad (6)$$

여기에서 G는 행렬이며 다음과 같이 정의된다.

$$[G]_{k,n} = e^{-j2\pi kn / N}, k_{start} \leq k \leq k_{end}, 0 \leq n \leq L - 1. \quad (7)$$

$k_{start}$ 와  $k_{end}$ 는 각각 처음과 끝 부분의 (원하는) 부반송파 위치를 의미한다. 위 MMSE 문제에 대한 최적화된 해결책은 다음과 같이 찾을 수 있다. 먼저,  $tr\{\Phi X\} = tr\{X\Phi\}$ 라는 행렬의 특성<sup>[7,p.10]</sup>을 이용하면 MSE는

$$MSE_1 = \frac{1}{N_{us}} \left( \begin{array}{l} tr\{QK_1^H G^H GK_1\} \\ -tr\{BC_h G^H GK_1\} - tr\{GC_h B^H K_1^H G^H\} \\ +tr\{GC_h G^H\} \end{array} \right) \quad (8)$$

와 같이 정리할 수 있다. 그리고 위에서 보이는 Q는 다음과 같이 정의된다.

$$Q = BC_h B^H + \sigma^2 I_{N_p}. \quad (9)$$

또한  $\partial tr\{\Phi X\} / \partial X = \Phi^H$ 라는 행렬의 특성<sup>[7,p.178]</sup>을 이용하면 다음과 같다.

$$\partial MSE_1 / \partial K_1 = \frac{1}{N_{us}} G^H G(K_1 Q - C_h B^H). \quad (10)$$

Appendix 1에서 볼 수 있듯이  $MSE_1$ 은  $K_1$ 의 convex function이다. 따라서  $\partial MSE / \partial K_1 = 0_{N_p}$ 로부터 최적의 선형 추정기를 구할 수 있으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$K_1 = C_h B^H (BC_h B^H + \sigma^2 I_{N_p})^{-1}. \quad (11)$$

$\hat{H}_1 = GK_1Z$  이므로 CFR는 다음과 같이 구한다.

$$\hat{H}_1 = GC_h B^H (BC_h B^H + \sigma^2 I_{N_p})^{-1} Z. \quad (12)$$

따라서 식 (6)의  $MSE_1$ 를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$MSE_1 = \frac{1}{N_{us}} \text{tr} \{ G(C_h - C_h B^H Q^{-1} BC_h) G^H \}. \quad (13)$$

### 3.2 MMSE 기반 디자인 II (LEAK-SUPP)

[6]에서 누설현상을 억제하는 선형 추정기를 제시하였다. 그 선형 추정기는 다음과 같은 MMSE 방법을 통해 설계되었다.

$$\min_{K_2} MSE_2 = \frac{1}{N_{us}} E \left\{ \left\| \frac{1}{M} G(B_v^H K_2 + B^H) Z - Gh \right\|^2 \right\}, \quad (14)$$

위에 보이는  $B_v$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$[B_v]_{k,n} = e^{-j2\pi b_2 n / N}, \quad 0 \leq k \leq N_v - 1, \quad 0 \leq n \leq L - 1. \quad (15)$$

[6]에서 CIR에 대한 추정은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{h}_2 = \frac{1}{M} (B_v^H K_2 + B^H) Z. \quad (16)$$

또한 [6]에 따르면,  $M \geq L$ 이고  $N/M$ 이 정수일 때, 최적의  $K_2$ 는 다음과 같다.

$$K_2 = B_v C_h B^H (BC_h B^H + \sigma^2 I_{N_p})^{-1}, \quad (17)$$

$K_2 = B_v K_1$ 이기 때문에 원하는 부반송파 위치에서 CFR 추정은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{M} G(B_v^H B_v K_1 + B^H) Z. \quad (18)$$

Appendix 2에 따르면 MSE는 다음과 같이 표현할 수 있는데,

$$MSE_2 = \frac{1}{N_{us}} \text{tr} \{ G(C_h - C_h B^H Q^{-1} BC_h) G^H \} + \frac{\sigma^4}{N_{us} M^2} \text{tr} \{ GB^H Q^{-1} BG^H \}. \quad (19)$$

(13)과 (19)를 비교해보면 제안된 CE 방식과 누설현상 억제 기반 CE 방식 간의 차이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$MSE_2 - MSE_1 = \frac{\sigma^4}{N_{us} M^2} \text{tr} \{ GB^H Q^{-1} BG^H \}. \quad (20)$$

$GB^H Q^{-1} BG^H$ 가 positive definite 행렬이고, positive definite 행렬의 대각합이 양수이기 때문에<sup>[8,p.398-399]</sup>, (20)의 오른쪽 부분은 양수가 된다. 따라서  $MSE_2 > MSE_1$ 이다. 그러므로 3.1장에서 기술한 MMSE 기반 채널 추정 방식은 누설현상 억제가 목적인 MMSE 기반 채널 추정 방식보다 더 좋은 성능을 보이는 것을 알 수 있다.

## IV. LS 기반 채널 추정 방식

채널 상관 정보  $C_h$ 를 구할 수 없을 때, LS<sup>[9]</sup>방법을 CIR 추정에 적용할 수 있다.  $BB^H$ 의 full rank 행렬 여부에 따라 두 개의 변형된 LS 기반 채널 추정 방식을 고려해 볼 수 있다.

### 4.1 LS 기반 디자인 I (LS)

$N_p \geq L$ 일 때 선형 추정기  $K_3$ 은 LS를 기반으로 설계할 수 있으며, CIR를  $\hat{h}_3 = K_3 Z$ 와 같이 추정할 수 있다. LS를 기반으로 얻을 수 있는 선형 추정기  $K_3$ 은 다음과 같다.

$$K_3 = (B^H B)^{-1} B^H Z. \quad (21)$$

이때 CFR는  $\hat{H}_3 = G\hat{h}_3$ 로 주어지며, MSE는  $MSE_3 = E \{ \|\hat{H}_3 - Gh\|^2 \} / N_{us}$ 에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.

$$MSE_3 = \frac{1}{N_{us}} \left( \text{tr} \{ QK_3^H G^H GK_3 \} - \text{tr} \{ BC_v G^H GK_3 \} - \text{tr} \{ GC_v B^H K_3^H G^H \} + \text{tr} \{ GC_v G^H \} \right). \quad (22)$$

만약 OFDM 블록에서 가상 부반송파가 존재하지 않는다면  $N_v = 0$  (또는  $M = N_p$ ) 이므로  $B^H B = N_p I_L$ 가 성립한다. 이 경우, 식 (21)은 DFT 기반 채널 추정 방식<sup>[10]</sup>과 동일하게 되며 선형 추정기는 다음과 같이 주어진다.

$$K_3 = \frac{1}{N_p} B^H. \quad (23)$$

따라서 식 (22)의  $MSE_3$ 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$MSE_3 = \frac{1}{N_{us}} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{N_p^2} tr\{GB^HQB^H\} \\ + tr\{GC_hG^H\} - \frac{1}{N_p} tr\{GB^HBC_hG^H\} \\ - \frac{1}{N_p} tr\{GC_hB^HBG^H\} \end{array} \right). \quad (24)$$

현재 DFT 기반 CE 방식의 성능은 파일럿이 전체 주파수 범위에 균일하게 할당되어 있을 때 최대화 될 수 있는 것으로 알려져 있다. 그러나 DFT 기반 채널 추정 방식은 MMSE 기반 채널 추정 방식보다 성능이 떨어지는데, 이는 후자가  $C_h$  정보를 사용하는 반면 전자는 사용하지 않기 때문이다. Appendix 3에서 유도한 것처럼  $N_v = 0$ 이고  $N_p = M$ 인 경우 3.1절에서 기술한 MMSE 기반 채널 추정 방식의 MSE와 DFT 기반 채널 추정 방식의 MSE 사이에는 다음과 같은 차이점이 있다.

$$MSE_3 - MSE_1 = \frac{\sigma^4}{N_{us}M} tr\{G(\sigma^2 I_L + MC_h)^{-1} G^H\}. \quad (25)$$

대각합(=trace) 연산자 안의 행렬은 positive definite 행렬이다. 그리고 positive definite 행렬의 대각합이 양수이기 때문에 (25)의 오른쪽 부분은 양수가 되며 따라서  $MSE_3 > MSE_1$ 이다. 그러므로 3.1절에서 기술한 MMSE 기반 채널 추정 방식은 DFT 기반 채널 추정 방식보다 더 우수한 성능을 보임을 알 수 있다.

#### 4.2 LS 기반 디자인 II (LS-REGUL)

CIR는 Regularized LS를 기반으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{h}_4 = \arg \min_h \|Z - Bh\|^2 + \epsilon^2 \|h - h_0\|^2. \quad (26)$$

여기에서  $\epsilon^2$ 은 Regularization 인자이고  $h_0$ 은  $h$ 의 초기 추정치이다. Regularization 인자는 주어진 벡터  $h_0$ 에 대해서  $\hat{h}_4$ 의 최적 값에 얼마나 근접하는지를 의미한다. 다시 말해, 큰  $\epsilon^2$ 값은  $h_0$ 이  $\hat{h}_4$ 를 추정하기 위한 좋은 초기치가 됨을 의미하며 작은  $\epsilon^2$ 값은  $h_0$ 이  $\hat{h}_4$ 를 추정하는데 있어 신뢰성이 낮은 초기치 임을 의미한다<sup>9)</sup>.  $h_0 = 0_L$ 일 때 식 (26)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{h}_4 = \arg \min_h \left\| \begin{bmatrix} Z \\ 0_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ \epsilon I_L \end{bmatrix} h \right\|^2. \quad (27)$$

식 (27)의 우변을 최소화하는  $h$ 를 구하기 위해 벡터 공간에서 성립하는 직교성을 이용한다. 먼저 열 벡터  $[Z^T 0_L^T]^T$ 를 열 벡터 공간  $[B^T \epsilon I_L]^T$ 에 투영하여  $[B^T \epsilon I_L]^T h$ 를 얻었다면,  $[Z^T 0_L^T]^T - [B^T \epsilon I_L]^T h$ 는 열 벡터 공간  $[B^T \epsilon I_L]^T$ 에 속하는 각 열 벡터와 수직이 된다. 따라서 직교성 조건에 의해

$$\begin{bmatrix} B \\ \epsilon I \end{bmatrix}^H \left( \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ \epsilon I_L \end{bmatrix} \hat{h}_4 \right) = 0_L \quad (28)$$

를 얻을 수 있다. 식 (28)을 풀면  $\hat{h}_4$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{h}_4 = (B^H B + \epsilon^2 I_L)^{-1} B^H Z. \quad (29)$$

따라서 CIR를 추정하기 위한 Regularized LS 기반의 선형 추정기를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$K_4 = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{L} B^H B + 0.01 I_L \right)^{-1} B^H. \quad (30)$$

그러므로 원하는 부반송파 위치에서 CFR는 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\hat{H}_4 = \hat{G} \hat{h}_4 = G K_4 Z. \quad (31)$$

만약  $\epsilon^2$ 이 매우 작다면  $\hat{h}_4$ 의 요소들은  $Z$ 의 작은 변화에도 큰 영향을 받아 기복이 심한 성능을 보일 것이고 반대로  $\epsilon^2$ 이 매우 크다면 추정된  $\hat{h}_4$ 의 정확도는 낮아질 것이다. Regularized LS 기반 채널추정 방식에 대한 MSE가 MMSE 기반 채널 추정 방식에 대한 MSE보다 항상 크다는 것을 논리적으로 유도하기는 쉽지 않다. 그러나 MMSE 기반 채널 추정 방식이  $C_h$  정보를 활용하는 반면, Regularized LS 기반 채널추정 방식은  $C_h$  정보를 활용하지 않는다는 점에서 전자가 후자보다 더 좋은 성능을 보일 것임을 예측할 수 있고, 이를 시뮬레이션을 통해 입증할 수 있다.

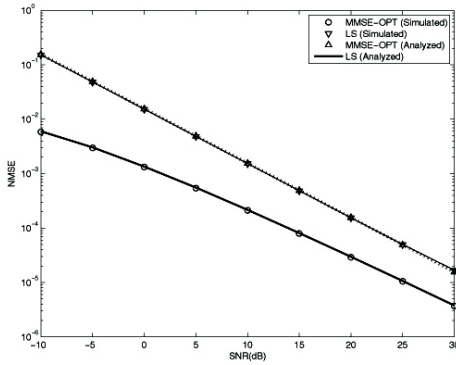


그림 1. N=512, L=64,  $N_p=64$ ,  $N_v=0$ 인 경우 SNR에 따른 NMSE 성능  
 Fig. 1. NMSE performance according to SNR when N=512, L=64,  $N_p=64$ , and  $N_v=0$

### V. 분석

이 장에서는 3장, 4장에서 제시하였던 파일럿 기반 채널 추정 방식의 채널 추정 성능을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 도출하였다. 표기상의 편의를 위하여 3.1절, 3.2절, 4.1절, 그리고 4.2절의 방식들을 각각 MMSE-OPT, LEAK-SUPP, LS, 그리고 LS-REGUL 이라고 명명하였다. 그림 1-4 모두 성능의 측정 기준은 다음과 같이 주어지는 NMSE로 선택하였다.

$$\eta = \frac{E\{\|\hat{H} - Bh\|^2\}}{E\{\|Bh\|^2\}}. \quad (32)$$

시뮬레이션을 위하여  $SNR=1/\sigma^2$ 로 설정하고  $C_h$ 는 다음과 같이 설정한다.

$$[C_h]_{m,n} = \begin{cases} \alpha(0.5)^m & \text{if } m=n, 0 \leq m, n \leq L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (33)$$

위 식의  $\alpha$ 는  $C_h$ 가 Euclidean (or Frobenius) norm을 갖도록 하기 위해 선택된 상수이다<sup>[8,p.291]</sup>. LS-REGUL 방식에서 Regularization 인자  $\epsilon^2$ 은 임의로  $\epsilon^2=0.01$ 라 설정하였다.

그림 1에서는 N=512, L=64,  $N_p=64$ ,  $N_v=0$ 인 경우에 한하여 SNR에 따른 NMSE 성능을 시뮬레이션 하였다. 이것은 가상의 부반송파가 존재하지 않는 파일럿 간격  $N/M=8$ 인 OFDM 블록이며, 충분한 숫자의 물리적 파일럿이 존재하는 경우 (즉,  $N_p=L$ )에 해당한다. 이를 살펴보면 MMSE-OPT는 모든 SNR 영역에서 LS-REGUL 및 LS의 성능을 능가한다. 이는

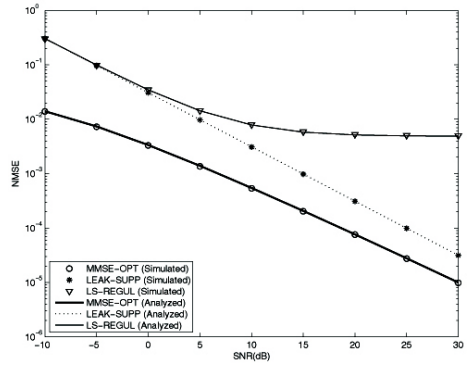


그림 2. N=512, L=64,  $N_p=32$ ,  $N_v=32$ 인 경우 SNR에 따른 NMSE 성능  
 Fig. 2. NMSE performance according to SNR when N=512, L=64,  $N_p=32$ , and  $N_v=32$

MMSE-OPT가 LS-REGUL 및 LS와는 달리 CFR를 추정함에 있어 채널간의 상관 정보를 이용하기 때문이다. 충분한 개수의 파일럿이 존재하는 경우 LS-REGUL와 LS는 거의 동등한 성능을 보여준다.

그림 2에서는 N=512, L=64,  $N_p=32$ ,  $N_v=32$ 인 경우에 대해 SNR에 따른 NMSE 성능을 시뮬레이션 하였다. 이것은 가상의 부반송파가 존재하는 파일럿 간격  $N/M=8$ 인 OFDM 블록에 해당하고, 충분하지 못한 숫자의 물리적 파일럿이 존재하는 경우 (즉,  $N_p < L$ )에 해당한다. 시뮬레이션 결과 MMSE-OPT는 모든 SNR 영역에서 LEAK-SUPP 및 LS-REGUL의 성능을 능가하였다.

LS-REGUL는 높은 SNR 구간에서 NMSE floor를 보였지만, MMSE-OPT와 LEAK-SUPP는 NMSE floor를 보이지 않았다. 이는 LS-REGUL와 달리 MMSE-OPT가 채널 상관 정보를 이용함으로써 비교적 정확한 추정이 가능하기 때문이다.

그림 3은 SNR이 20dB이고 N=512, L=64,  $N_v=32$ 인 경우, 물리적 파일럿의 개수가 NMSE 성능에 미치는 영향을 보여준다.  $N_p$ 가 감소함에 따라 LEAK-SUPP의 기울기는 MMSE-OPT와 LS-REGUL에 비해 완만함을 보여준다. 이는 LEAK-SUPP 모델이 누설현상을 효과적으로 완화시킨다는 것을 의미한다. 그러나 전체 성능 면에서는 모든  $N_p$  구간에서 MMSE-OPT 모델이 LEAK-SUPP 모델보다 좋은 성능을 보이고 있다.

그림 4는 SNR이 20dB이고 N=512, L=64,  $N_p=N_v=M/2$ 인 경우, 가상파일럿과 물리적 파일럿의 전체 개수인 M이 NMSE 성능에 미치는 영향을 보여준다. M이 클수록 파일럿간의 간격은 좁아진다.

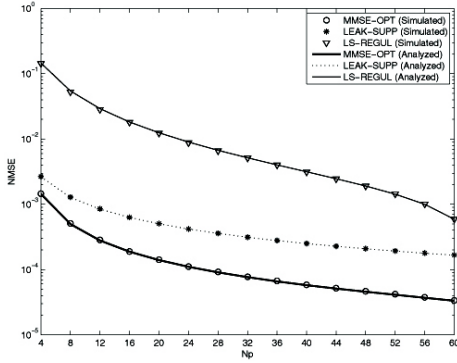


그림 3.  $N=512$ ,  $L=64$ ,  $N_p=32$ ,  $\text{SNR}=20\text{dB}$  인 경우 물리적 파일럿의 개수에 따른 NMSE 성능  
 Fig. 3. NMSE performance according to physical pilot number when  $N = 512$ ,  $L = 64$ ,  $N_p = 32$ , and  $\text{SNR} = 20\text{dB}$

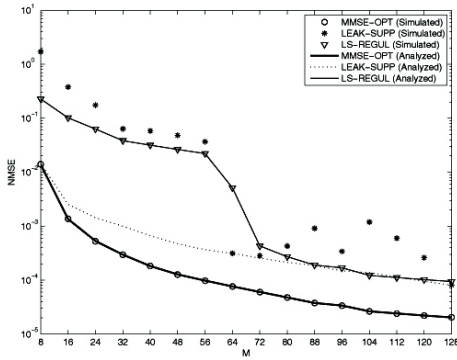


그림 4.  $N=512$ ,  $L=64$ ,  $N_p = M/2$ ,  $N_v = M/2$ ,  $\text{SNR}=20\text{dB}$ , 일 때 파일럿 수 M에 따른 NMSE 성능  
 Fig. 4. NMSE performance according to total pilot number M when  $N = 512$ ,  $L = 64$ ,  $N_p = M/2$ ,  $N_v = M/2$ , and  $\text{SNR} = 20\text{dB}$

LEAK-SUPP의 경우 시뮬레이션 결과는 규칙성을 보이지 않았는데, 그 이유는 3.2절에서 제시한 바와 같이 LEAK-SUPP의 NMSE 성능은  $N/M$ 이 정수인 경우일 때만 성립하기 때문이다. 따라서  $N/M$ 이 정수가 되지 않는 경우에는 시뮬레이션 결과가 임의의 값을 나타내게 되어 규칙성을 보이지 않는다. 한 가지 주목할 점은 M이 특정 값을 갖는 구간에서 LS-REGUL의 NMSE 성능은 급격히 변화한다는 점이다. 시뮬레이션을 통해 M이  $LN_p/(N_p - L)$  근처일 때 LS-REGUL가 급격히 변화하는 것을 발견할 수 있었다. 그림 4에서도 LS-REGUL의 성능이 M이  $LN_p/(N_p - L) = 68$  근처일 때 급격히 변화함을 확인할 수 있다.

그림 5에서는  $N=512$ ,  $L=64$ ,  $N_p=64$ ,  $N_v=0$  인 조건 하에 SER 성능을 구하였다. 그림 6에서는  $N=512$ ,

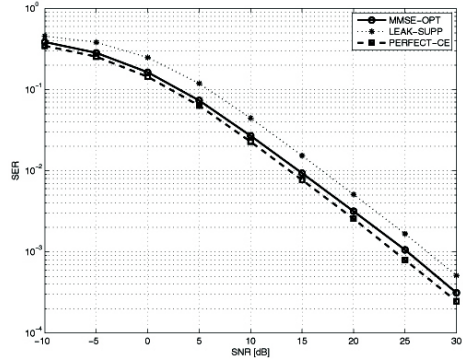


그림 5.  $N=512$ ,  $L=64$ ,  $N_p=64$ ,  $N_v=0$  일 때 SNR에 따른 SER 성능  
 Fig. 5. SER performance according to SNR when  $N = 512$ ,  $L = 64$ ,  $N_p = 64$ , and  $N_v = 0$

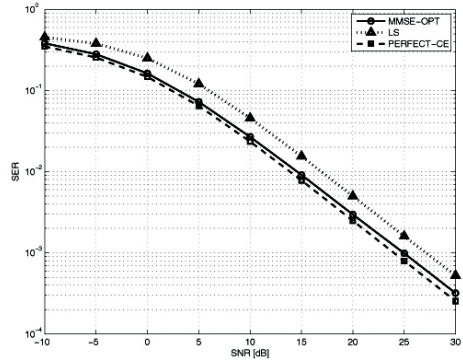


그림 6.  $N=512$ ,  $L=64$ ,  $N_p=32$ ,  $N_v=32$  일 때 SNR에 따른 SER 성능  
 Fig. 6. SER performance according to SNR when  $N = 512$ ,  $L = 64$ ,  $N_p = 32$ , and  $N_v = 32$

$L=64$ ,  $N_p=32$ ,  $N_v=32$  인 조건 하에 SER 성능을 구하였다. 두 조건 모두 데이터 전송에 2진 PSK 심볼들을 사용하였다. 그림 1과 그림 2가 서로 유사한 NMSE 곡선의 형태를 보여준 것과 유사하게 그림 5와 그림 6은 서로 유사한 형태의 SER 곡선들을 보여준다. MMSE-OPT는 모든 조건에서 LS와 LS-REGUL를 능가한다. MMSE-OPT는  $\text{SER}=10^{-2}$ 에서 LS와 LS-REGUL에 비해 2dB 이상의 SNR이득을 보여준다.

## VI. 결론

본 논문에서는 OFDM 시스템에서 빗 형태의 패턴을 가지는 파일럿 기반 채널 추정 방식들의 성능을 비교하였다. 특히 CIR를 먼저 예측하는 것이 목적인 MMSE 기반의 채널 추정 방식은 누설 현상 억제가 목적인 MMSE 기반의 채널 추정 방식보다 우수한 성

능을 가짐을 증명하였다. CIR를 먼저 예측하는 것이 목적인 MMSE 기반의 채널 추정 방식은 두 종류의 LS 기반 채널 측정 방식들보다 더 우수한 성능을 나타내었고, 이를 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 아울러 파일럿이 충분하지 못한 상황에서 LS 기반의 채널 추정방식이 크게 열화된 성능을 보이는 것과는 달리, MMSE 기반의 채널 추정기는 비교적 좋은 성능을 보인다는 것을 시뮬레이션을 통해 확인하였다.

### VII. 부 록

(13)에서  $MSE_1$ 의 Convexity 증명 다음과 같은  $X$ 의 함수를 가정한다.

$$f(X) = \text{tr}\{(AXa-b)(AXa-b)^H\}. \quad (34)$$

위에서  $A$ 와  $X$ 는 행렬이고,  $a$ 와  $b$ 는 적절한 크기를 가지는 벡터이다. 행렬 분석을 통하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(X) = \sum_n \left| \sum_j \sum_i A_{n,i} X_{i,j} a_j + b_n \right|^2 \quad (35)$$

위에서  $A_{i,j}$ 와  $X_{i,j}$ 는 각각  $A$ 와  $X$ 에서  $i$ 번째 행과  $j$ 번째 열에서의 요소를 나타내고,  $a_j$ 와  $b_i$ 는 각각  $a$ 와  $b$ 에서  $i$ 번째 요소를 나타낸다. 정의에 따라  $f(X)$ 의 convexity는  $0 \leq \lambda \leq 1$ 에 대해 다음과 같다.

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y). \quad (36)$$

위 부등식이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \sum_n \left| \lambda \left( \sum_j \sum_i A_{n,i} X_{i,j} a_j + b_n \right) + (1-\lambda) \left( \sum_j \sum_i A_{n,i} Y_{i,j} a_j + b_n \right) \right|^2 \quad (37)$$

$$\leq \lambda^2 \sum_n \left| \left( \sum_j \sum_i A_{n,i} X_{i,j} a_j + b_n \right) \right|^2 + (1-\lambda)^2 \sum_n \left| \left( \sum_j \sum_i A_{n,i} Y_{i,j} a_j + b_n \right) \right|^2 \quad (38)$$

$$\leq \lambda \sum_n \left| \sum_j \sum_i A_{n,i} X_{i,j} a_j + b_n \right|^2 + (1-\lambda) \sum_n \left| \sum_j \sum_i A_{n,i} Y_{i,j} a_j + b_n \right|^2 \quad (39)$$

$$= \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y). \quad (40)$$

(37)에서 (38)까지는 Cauchy-Schwartz 부등식이 사용되었고, (38)에서 (39)까지는  $\lambda^2 \leq \lambda$ 와  $(1-\lambda)^2 \leq (1-\lambda)$ 라는 부등식이 사용되었다. 그러므로 (34)에서 정의된  $f(X)$ 는  $X$ 에 대하여 convex이다.  $X = K_1$ ,  $A = G$ ,  $a = Z$ ,  $b = Gh$ 로 변수를 바꾸면, (13)에서의 MSE 표현은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$MSE_1(K_1) = E\{f(K_1)\}/N_{us}. \quad (41)$$

기대치가 선형 연산자이고  $f(K_1)$ 이  $K_1$ 의 convex 함수이기 때문에  $MSE_1$ 은  $K_1$ 에 대해 convex이다.

식 (19)의 유도

[6]에서 누설현상 억제 기반 CE 방식의 MSE는 다음과 같이 주어진다.

$$MSE_2 = \frac{1}{N_{us}} E \left\{ \left\| \frac{1}{M} G(B_v^H K_2 + B^H) Z - Gh \right\|^2 \right\}. \quad (42)$$

$E\{ZZ^H\} = BC_h B^H + \sigma^2 I_{N_p} = Q$ 와  $K_2 = B_v K_1$ 를 사용하면  $MSE_2$ 는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$MSE_2 = \frac{1}{N_{us} M^2} \text{tr} \left\{ \begin{aligned} & G(B_v^H B_v K_1 Q K_1^H B_v^H B_v \\ & + B_v^H B_v K_1 Q B + B^H Q K_1^H B^H B_v \\ & + B^H Q B - M B_v^H B_v K_1 B C_h \\ & - M B^H B C_h - M C_h B^H K_1^H B_v^H B_v \\ & - M C_h B^H B + M^2 C_h) G^H \end{aligned} \right\}. \quad (43)$$

$M \geq L$ 이고  $N/M \gg 1$  정수일 때,  $B_v^H B_v + B^H B = M I_L$ 이 성립한다. 따라서 위의 표현식 중  $B_v^H B_v$ 의 위치에  $M I_L - B^H B$ 를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$MSE_2 = \frac{1}{N_{us}} \text{tr} \left\{ G \left( T_1 + \frac{1}{M} T_2 + \frac{1}{M^2} T_3 \right) G^H \right\}. \quad (44)$$

위 수식의 행렬  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ 는 다음과 같이 정의되는데,

$$T_1 = C_h + K_1 Q K_1^H - K_1 B C_h - C_h B^H K_1^H, \quad (45)$$

$$T_2 = K_1 Q B + B^H B K_1^H B C_h + B^H Q K_1^H - K_1 Q K_1^H B^H B - B^H B K_1^H Q K_1^H - B^H B C_h, \\ + C_h B^H K_1^H B^H B - C_h B^H B \quad (46)$$

$$T_3 = B^H B K_1^H Q K_1^H B^H B + B^H Q B - B^H B K_1^H Q B - B^H Q K_1^H B^H B \quad (47)$$



$C_h B^H = K_1 Q$ 이고  $BC_h = QK_1^H$ 이기 때문에,  $T_1$ 을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$T_1 = C_h - C_h B^H Q^{-1} BC_h. \quad (48)$$

마찬가지로  $T_2$ 를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} T_2 = & K_1 QB + B^H BK_1 QK_1^H + B^H QK_1^H \\ & - K_1 QK_1^H B^H B - B^H BK_1 QK_1^H - B^H QK_1^H \\ & + K_1 QK_1^H B^H B - K_1 QB = 0_L \end{aligned} \quad (49)$$

아울러,  $T_3$ 도 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$T_3 = B^H(Q - BK_1 Q)(I_{N_p} - (BK_1)^H)B. \quad (50)$$

식(50)에  $Q - BK_1 Q = \sigma^2 I_{N_p}$ 와  $I_{N_p} - (BK_1)^H = \sigma^2 Q^{-1}$ 를 적용하면,  $T_3$ 을 다음과 같이 축약할 수 있다.

$$T_3 = \sigma^4 B^H Q^{-1} B. \quad (51)$$

위에서 구한 행렬  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ 을 식 (44)에 대입하여 정리하면 다음과 같은  $MSE_2$ 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} MSE_2 = & \frac{1}{N_{us}} \text{tr}\{G(C_h - C_h B^H Q^{-1} BC_h)G^H\} \\ & + \frac{\sigma^4}{N_{us} M^2} \text{tr}\{GB^H Q^{-1} BG^H\} \end{aligned} \quad (52)$$

(25)의 표현식 유도

(13)과 (24)로부터 제안된 채널추정 방식의 MSE 값과 DFT 기반의 채널추정 방식에서 얻어진 MSE값의 차이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$MSE_3 - MSE_1 = \text{tr}\{GFG^H\}/N_{us} \quad (53)$$

위 식의  $F$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{M^2} B^H QB - \frac{1}{M} B^H BC_h - \frac{1}{M} C_h B^H B \\ & + C_h B^H Q^{-1} BC_h \end{aligned} \quad (54)$$

이 논문의 본문에서 정의하였던  $Q = BC_h B^H + \sigma^2 I_M$ ,  $C_h B^H Q^{-1} = (\sigma^2 C_h^{-1} + B^H B)^{-1} B^H$ ,  $B^H B = M I_L (\because M = N_p)$  수식을 식 (54)에 적용하면,  $F$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F = \frac{\sigma^2}{M} I_L - C_h + M(\sigma^2 C_h^{-1} + M I_L)^{-1} C_h. \quad (55)$$

이를 다시 축약하면,

$$\begin{aligned} F = & (\sigma^2 C_h^{-1} + M I_L)^{-1} \\ & \times \left( (\sigma^2 C_h^{-1} + M I_L) \left( \frac{\sigma^2}{M} I_L - C_h \right) + M C_h \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$= \frac{\sigma^4}{M} (\sigma^2 C_h^{-1} + M I_L)^{-1} C_h^{-1} \quad (57)$$

$$= \frac{\sigma^4}{M} (\sigma^2 I_L + M C_h)^{-1} \quad (58)$$

그러므로 제안된 채널추정 방식과 DFT 기반의 채널 추정 방식에서 얻어진 MSE값들의 차이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$MSE_3 - MSE_1 = \frac{\sigma^4}{N_{us} M} \text{tr}\{G(\sigma^2 I_L + M C_h)^{-1} G^H\}. \quad (59)$$

## References

- [1] Y. S. Kim and J. G. Bae, "Performance improvement of PSAM channel estimation method for OFDM systems over frequency-selective channel," *J. KIEES*, vol. 23, no. 2, pp. 235-243, 2012.
- [2] J. W. Wee and Y. S. Cho, "A modified pilot symbol based channel estimation technique using cross-correlation for OFDM systems," *J. KICS*, vol. 36, no. 7, pp. 467-474, 2011.
- [3] S. H. Kim, "Channel estimation for scattered pilot based OFDM systems," *J. IKEEE*, vol. 15, no. 3, pp. 235-240, 2011.
- [4] R. Negi and J. Cioffi, "Pilot tone selection for channel estimation in a mobile OFDM system," *IEEE Trans. Consumer Electron.*, vol. 44, no. 3, pp. 1122-1128, Aug. 1998.
- [5] K. Kwak, S. Lee, J. Kim, and D. Hong, "A new DFT-based channel estimation approach for OFDM with virtual subcarriers by leakage estimation," *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, vol. 7, no. 6, pp. 2004-2008, Jun. 2008.
- [6] J. Seo, S. Jang, J. Yang, W. Jeon, and D.

Kim, "Analysis of pilot-aided channel estimation with optimal leakage suppression for OFDM systems," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 14, no. 9, pp. 809-811, Sept. 2010.

- [7] J. R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix differential calculus with applications in statistics and economics*, NY: John Wiley & Sons, 2002.
- [8] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1999.
- [9] A. H. S. Thomas Kailath and B. Hassibi, *Linear estimation*, Prentice Hall, 2000.

김 영 웅 (Youngwoong Kim)



2007년 3월~현재 : 건국대학교 전자공학부 학사과정  
<관심분야> 이동통신 시스템, 통신시스템 설계

김 남 훈 (Namhoon Kim)



2007년 3월~현재 : 건국대학교 전자공학부 학사과정  
<관심분야> 이동통신 시스템, 통신시스템 설계

윤 은 철 (Eunchul Yoon)



1993년 2월 : 연세대학교 공학 학사  
1995년 2월 : 연세대학교 공학 석사  
1995년~2000년 : 삼성전자 네트워크사업부 책임연구원  
2006년 : 미국 스탠포드대학 전기공학과 공학박사

2006년~2008년 : 삼성전자 통신연구소 책임연구원  
2008년~현재 : 건국대학교 전자공학부 교수  
<관심분야> 이동통신, 무선통신시스템 설계, 홈 네트워크, 협력 다이버시티, Time-Reversal