

## 경기주기와 베이저안 학습(Bayesian learning) 기법을 고려한 개인의 자산관리 연구\*

박세영<sup>1</sup> · 이현탁<sup>1\*</sup> · 이유나<sup>2</sup> · 장봉규<sup>1</sup>

<sup>1</sup>포항공과대학교 산업경영공학과, <sup>2</sup>한국산업은행 리스크관리부

### Portfolio Management with the Business Cycle and Bayesian Learning

Seyoung Park<sup>1</sup> · Hyun-Tak Lee<sup>1\*</sup> · Yuna Rhee<sup>2</sup> · Bong-Gyu Jang<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Industrial and Management Engineering, POSTECH

<sup>2</sup>Risk Management Department, Korea Development Bank

#### ■ Abstract ■

This paper studies optimal consumption and investment behaviors of an individual when risky asset returns and her income are affected by the business cycle. The investor considers the incomplete information risk of unobservable macroeconomic conditions and updates her belief of expected risky asset returns through Bayesian learning. We find that the optimal investment strategy, certainty equivalent wealth, and portfolio hedging demand significantly depend on the belief about the macroeconomic conditions.

Keywords : Business Cycle, Bayesian Learning, Portfolio Management, Unobservable Markov Chain, Incomplete Information

## 1. 서 론

자산관리모형은 Markowitz[21]부터 이산 시간

(discrete-time)에서의 개인이나 기업의 최적투자 전략에 대한 연구가 시작되었다. 그 후 Merton[22, 23]의 논문을 활용하여 현재 수많은 학자들이 연속

논문접수일 : 2013년 11월 29일 논문게재확정일 : 2014년 03월 06일

논문수정일(1차) : 2014년 02월 25일)

\* 본 연구는 교육과학기술부 주관의 한국연구재단(National Research Foundation)을 통해 기초과학연구프로그램(Basic Science Research Program)의 후원을 받아 진행되었습니다(NRF-2013R1A2A2A03068890).

본 논문은 2013년도 한국경영과학회 추계학술대회 경쟁부분에 제출하여 최우수논문상을 수상한 논문으로 논문 내용의 일부를 수정·보완한 논문이며, 소정의 심사과정을 거쳐 게재 추천되었음.

† 교신저자 lht1107@postech.ac.kr

시간(continuous-time)에서의 다양한 재무관리 문제를 다루고 있다. 대표적으로 Bodie et al.[3]은 Merton의 방법을 확장하여 한 개인의 인생 주기 동안에 노동과 여가의 선택이 최적소비, 투자전략에 어떠한 영향을 미치는지 연구하였다. 여기에 Farhi and Panageas[10]는 고정된 임금을 받고 있는 개인의 자발적 은퇴를 고려한 최적소비 및 자산관리 문제를 다루었다.

그러나 대부분의 자산관리모형은 경기주기(business cycle)를 반영하지 못하는 치명적인 한계를 지닌다. 경기불황기에서 금융시장을 제대로 반영하지 못하는 모형을 그대로 사용할 경우 개인이나 기업에 막대한 손실을 초래할 수 있다. 예를 들어, 2008년 글로벌 금융 위기 당시 국내 은행들이 투자했던 높은 신용등급의 부채담보부증권(collateralized debt obligation, CDO)의 가치가 급락하여 개인 투자자들이 엄청난 손실을 보았으며, 환율의 급등으로 인해 키코(knock-in and knock-out, KIKO)에 투자했던 많은 중소기업들이 부도 위기에 처하는 상황이 발생하였다. 이러한 상황을 미연에 방지하기 위해 경기호황기(bull market)와 경기 불황기(bear market)로 대변되는 경기주기를 고려한 마코프 국면전환모형(Markov regime-switching model)을 도입하여 현재의 금융시장을 보다 합리적으로 반영한 자산관리모형을 개발이 매우 중요하다.

Jang et al.[14]은 자산 운용 문제에 있어서 국면 전환모형을 활용하여 거래비용 수수료가 있을 때의 문제를 고려하였으며, 실제 금융시장에서 발생하는 비합리성(anomalies, 예 : liquidity premium puzzle)을 설명하였다. Koo[17]와 Viceira[24] 등은 소득의 불확실성을 반영한 개인의 자산관리모형을 다루었으며, Dybvig and Liu[9]는 여기에 개인의 자발적인 은퇴 상황을 함께 고려하였다. 이 외에도 많은 문헌에서 국면전환모형을 이용하여 경기순환을 고려한 자산관리모형을 개발하고 있는 추세이다.

한편, 기존 자산관리모형이 경기주기를 반영하지 못한다는 점 외에 추가로 고려해야 할 사항은 불완전한 정보위험(incomplete information risk; Liu[20])이다. 예를 들어, 경기주기를 고려한 자산관리모형은

일반적으로 두 가지 국면(경기호황기와 경기불황기)에서 주식 프로세스의 모수(parameter)가 고정되고 있다고 가정한다.<sup>1)</sup> 이는 개인이 경기주기에 대한 완벽한 정보(complete information)를 가지고 있다는 것을 의미하며, 두 가지 국면에서 고정된 투자기회(constant investment opportunity)를 가지고 있다는 말과 동일하다. 그러나 Campbell and Viceira[6]는 개인의 투자기회가 시변성(time-varying investment opportunity)을 가지고 있으며, Campbell and Cochrane[5]은 주식의 기대수익률(expected returns)이 이러한 투자기회를 반영하고 있다고 한다.<sup>2)</sup>

이렇게 시변하는 투자기회는 직·간접적으로 거시경제의 경기변동과 밀접한 관련이 있다. 다시 말해서, 일반적으로 개인에게 좋은(나쁜) 투자기회는 경기호황(불황)기와 연관이 있다. 그래서 개인은 오직 관측 가능한 주가 정보를 통해 현 거시경제에 대한 불완전한 정보(incomplete information)를 지속적으로 학습(learning)하게 되며, 이는 최적투자 전략에도 큰 영향을 미치게 된다. Brennan[4]은 시변성을 가지는 모수의 측정위험(estimation risk)이 위험자산의 자산배분(asset allocation)에 최대 50%까지 영향을 준다고 분석하였다.<sup>3)</sup> 결론적으로 실제 시변하는 투자기회를 반영한 자산관리(즉, 불완전한 정보를 가정)는 기존 고정된 투자기회를 가정한 자산관리(즉, 완전한 정보를 가정)와 비교했을 때 개인의 최적투자전략에 상당한 영향을 미친다.

본 연구에서는 현재 경제상황의 호황기와 불황기를 결정함에 있어서 불확실성이 존재한다고 가정한다. 개인은 현재의 경기가 호황인지 불황인지에 대해서

- 1) 주식 프로세스의 모수는 과거 수익률의 평균(first moment)과 표준편차(standard deviation or second moment)가 있다. 본 연구에서는 수익률의 평균에 초점을 맞추고 진행하기로 한다.
- 2) 실질수익률( $R_{t+1}$ )을 조건부 기대수익률( $E_t[R_{t+1}]$ )의 잡음대리변수(noisy proxy variable)로 가정한다면, [그림 1] 위는 수익률의 시변성을 보여주며, 이는 투자 기회 또한 시간에 따라 변화함을 암시한다.
- 3) 그 밖에도 많은 문헌에서 모수의 측정위험이 최적투자 전략에 상당한 영향을 미치고 있음을 보여준다[8, 11, 16, 26].

매 시간마다 사전믿음(prior belief)을 가진다. 또한, 개인은 Liptser and Shiryaev[18, 19]가 제안한 베이지안 학습 기법(Bayesian learning)을 따라 과거의 주가 정보를 통해 경기가 호황인지에 대한 사후믿음(posterior belief)을 지속적으로 갱신한다.

본 연구는 주식의 기대수익률이 경기주기에 영향을 받고, 경기주기는 마코프 프로세스를 따른다는 가정하에 주가수익률 프로세스의 모수 추정을 실시하였다. 구체적으로 본 연구는 한국 종합주가지수(KOSPI) 시계열 데이터를 기반으로 Hamilton[12]에서 제안한 필터링(filtering) 기법을 적용하여 경제상황을 반영한 KOSPI 주가수익률 모수를 추정하고, 이를 개인의 최적소비와 최적투자 분석에 이용하였다.

본 연구는 Wang[25]의 연구와 관련이 있다. Wang[25]은 개인이 미래 소득증가율(income growth rate)에 대한 사전믿음을 가지고 있으며, 시간이 지남에 따라 실현된 소득을 통해 미래 소득증가율에 대한 사후믿음을 갱신한다고 가정하였다. 이렇게 갱신된 사후믿음을 통해 소득증가율 프로세스의 모수는 시변성을 지닌다. Wang[25]은 이러한 학습 효과가 예비적 저축(precautionary saving) 수요를 만들어서 개인의 소비와 자산배분에 영향을 준다고 설명하였다.

본 연구와 Wang[25]의 연구는 다음과 같은 차이점이 있다. 첫째, 본 연구는 소득이 아닌 관찰된 주가를 통해 호황기와 불황기의 주식의 기대수익률을 학습한다. 효율적시장가설(efficient market hypothesis)에 따르면, 주식의 기대수익률이 경기주기에 민감하게 반응하기 때문에 거시경제에 대한 선행지수의 성격을 가지게 된다.<sup>4)</sup> 다시 말해서, 개인은 소득이 아닌 주가를 통해 경기주기에 대한 정보를 갱신한다. 둘째, 본 연구는 개인의 소득이 주가로부터 학습한 호황기와 불황기의 주식의 기대수익률에 대한 사후믿음에 의해 결정된다고 가정한다. 구체적으로 현재의 소득은 호황기와 불황기의 소득에 대한 사후믿음에 의해 가중평균(weighted aver-

age)의 형태로 주어진다.

본 연구의 학문 및 실용적 중요성은 다음 세 가지로 요약될 수 있다. 첫째, 경제학적으로 학습 효과를 통해 갱신되는 호황기와 불황기의 주식의 기대수익률에 대한 사후믿음이 거시경제에 대한 불확실성을 나타내므로, 이를 통해 시변하는 투자기회를 반영할 수 있다. 둘째, 기술적으로 Liptser and Shiryaev[18, 19]가 제시한 확률미분방정식(stochastic differential equation)의 형태로 주어진 베이지안 학습 기법을 따라 사전믿음으로부터 사후믿음을 지속적으로 갱신하기 때문에 현재의 경제상황을 합리적으로 반영한 개인의 투자전략을 유도할 수 있다. 셋째, 경기변동위험(regime risk)으로 인해 실업률이 증가하고 고용불안이 계속되는 현 노동시장의 상황을 반영하여 미래 소득의 불확실성을 고려할 수 있다.

본 연구의 수치적 결과는 다음과 같다.

- (1) 개인의 최적소비량은 경기가 호황인지에 대한 믿음 보다는 개인이 보유하고 있는 부에 큰 영향을 받는 반면, 최적투자전략은 경기가 호황인지에 대한 믿음에 따라 크게 달라졌다.
- (2) 경기가 호황일 때보다 경기가 불황일 때 베이지안 학습 기법은 더 큰 가치를 가지고, 현재의 경기가 호황인지 불황인지에 대한 판단이 어려울 때 베이지안 학습 효과가 가장 크다.
- (3) 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요는 경기가 호황인지에 대한 믿음이 커짐에 따라 감소한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 경기주기와 베이지안 학습 기법을 반영한 자산관리의 중요성에서는 미국의 S&P500 지수(Standard and Poor's 500 index)와 근로소득(labor income) 데이터를 이용하여 본 연구의 가정을 검증하도록 한다.<sup>5)</sup>

5) 한국 데이터로 실증분석 하는데 다음과 같은 한계점이 존재한다. 첫째, 한국은행 경제통계시스템에서는 한국 종합주가지수(KOSPI : Korea Composite Stock Price Index) 시장 지수를 1995년부터 제공하고 있다. KOSPI 지수는 한국거래소에서 1975년부터 제공을 하고 있지만, 1970~1980년대 적은 거래량, 지수 산식의 변화 등으로 경제의 선행지수로서 역할이 다소 불분명하다.

4) 효율적 시장 가설에 따르면, 금융시장에서 주가는 이용 가능한 모든 정보를 즉각적으로 충분히 반영하고 있다.

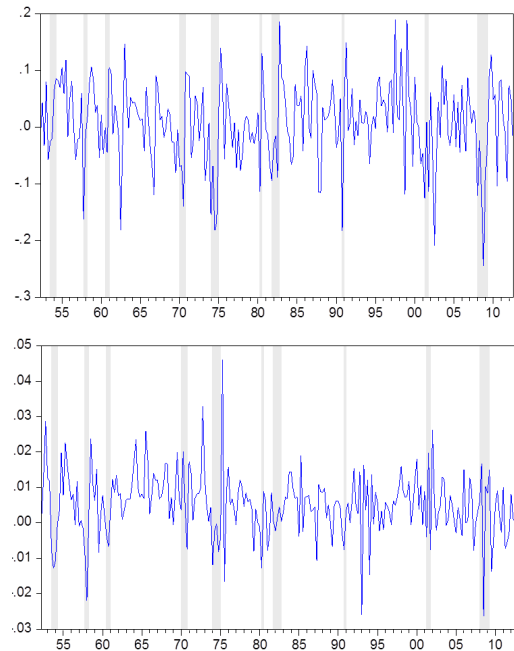
제 3장에서는 경기주기와 베이지안 학습 기법을 반영한 자산관리모형에서는 본 연구의 가정을 수학적으로 모형화한다. 제 4장에서는 경기주기를 반영한 주가수익률 프로세스의 모수 추정에서는 관측 불가능한 경기주기를 고려한 주가수익률 프로세스의 모수 추정 방법을 소개하고, KOSPI 지수 데이터를 통해 모수를 추정한다. 제 5장 수치적 결과에서는 추정된 모수를 사용하여 개인의 최적소비 및 최적투자 전략을 제시하고, 확실성등가부(certainty equivalent wealth) 및 포트폴리오 헤지 수요(hedging demand)에 대한 분석을 실시하여 베이지안 학습 효과의 가치를 알아본다. 제 6장 결론에서는 본 연구의 주된 결과를 정리한다.

## 2. 경기주기와 베이지안 학습 기법을 반영한 자산관리의 중요성

본 장에서는 “주가수익률과 근로소득이 경기주기에 따라 변한다.”는 가설을 검증하고, 학습 효과의 당위성에 대해 논의한다. 실증분석은 1952년 2분기부터 2012년 3분기까지 미국의 분기별 S&P500 지수와 근로소득을 이용하였다. 주가수익률은 분포가 시간에 의존하지 않은 정상성(stationary)을 따르지만, 근로소득 데이터는 비정상성(non-stationary)을 가지므로 차분하여 소득증가율로 표현한다.<sup>6)</sup>

둘째, 근로소득(월평균 가계수지) 데이터는 분기별로 공표된다. KOSPI 지수를 1995년부터 사용하더라도, 경기순환을 분석하기에는 분기별 샘플 수가 다소 부족할 수 있다. 그래서 본 연구에서는 미국 데이터를 통해 모형의 신빙성을 입증하기로 한다. S&P500 지수는 Shiller의 홈페이지 “<http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>”에서 다운이 가능하며, (로그) 근로소득 데이터는 Lettau의 홈페이지 “[http://faculty.haas.berkeley.edu/lettau/data/cay\\_q\\_12Q3.txt](http://faculty.haas.berkeley.edu/lettau/data/cay_q_12Q3.txt)”에서 다운이 가능하다. 모든 명목 데이터(nominal data)는 미국의 소비자 물가지수(Consumer Price Index-Urban consumers)를 통해 인플레이션(inflation)을 감안하여 실질 데이터(real data)로 변경하였다.

6) 정상성을 가지는 변수의 분포는 “Covariance-stationary principle”을 따른다. 구체적으로 변수의 비조건부평균(unconditional mean)이 시간에 의존하지 않고



[그림 1] S&P500 지수의 주가수익률(위)과 소득증가율(아래)

[그림 1]은 S&P500 지수의 주가수익률<sup>7)</sup>과 소득증가율을 보여준다. 음양으로 표시된 구역은 미국국립 경제조사국(NBER : National Bureau of Economic Research)에서 제공하는 NBER 불황지표(NBER based Recession Indicators for the U.S. from the Period following the Peak through the Trough)이다.

[그림 1]은 대략적으로 불황기에 주가수익률과 소득증가율이 떨어짐을 보여준다. 경기순환에 대해 통계적인 차이가 있는지 알아보기 위해 다음과 같은 선형회귀분석을 실시하였다:

일정하며, 공분산(unconditional covariance)이 시간 단위가 아닌 시간 간격에만 의존하는 법칙을 말한다. 비정상 변수 같이 분포가 시간에 의존한다면 시간이 지남에 따라 분산이 무한대로 증가 또는 감소할 수 있으므로, 일반적인 월드 검정(Wald test)이 불가능하다. 그래서 모든 시계열 분석에는 정상 변수를 사용해야 의미 있는 경제적 해석이 가능하다. 비정상 변수를 정상 변수로 바꾸는 가장 대표적인 방법으로 차분법이 있다.

7) 여기에서 주가수익률이란 분기별 평균수익률을 의미한다.

$$y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 NBER_t,$$

여기에서  $y_t$ 는 종속변수(S&P500 지수의 주가수익률과 소득증가율),  $\hat{\beta}_0$ 와  $\hat{\beta}_1$ 는 추정된 절편(intercept)과 상수,  $NBER_t$ 은 NBER 불황지표(불황 = 1 or 확장 = 0)를 의미한다. 위의 회귀분석을 통해 경기불황기 때 비대칭적(asymmetric)인 영향에 대해 분석이 가능하다.

<표 1> 선형회귀분석 결과

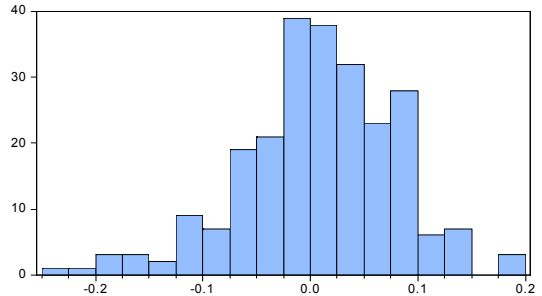
종속변수	$\hat{\beta}_0$ (t-stat)	$\hat{\beta}_1$ (t-stat)	$\overline{R^2}$
S&P500 주가수익률	0.018 (3.863)	-0.064 (-3.853)	0.100
소득증가율	0.006 (10.059)	-0.007 (-4.219)	0.086

<표 1>은 추정된  $\hat{\beta}_0$ 와  $\hat{\beta}_1$ ,  $\overline{R^2}$ (Adjusted  $R^2$ )와 함께 자기상관성(autocorrelation)과 이분산성(heteroscedasticity)을 보정한 t-statistic을 보여준다. 두 종속변수 모두에서 추정된  $\hat{\beta}_0$ 와  $\hat{\beta}_1$ 은 1% 수준에서 통계적으로 유의하였다. 또한, 두 종속변수는 경기호황기 때( $\hat{\beta}_0$ ) 양의 값을 가지지만, 경기불황기 때( $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1$ )는 음의 값을 가지는 것으로 나왔다. 결론적으로 <표 1>은 주가수익률과 소득이 경기순환에 영향을 받음을 보여준다.

학습 효과의 당위성은 기존 국면전환모형 문헌의 비현실적 가정에서 찾아볼 수 있다. 기존 국면전환모형을 활용한 자산관리모형은 개인 투자자가 현재 국면에 대해서 정확히 관측할 수 있다는 비현실적인 가정에 기반을 두고 있다. 즉, 기존 문헌들은 두 가지 국면 내에서 고정된 투자기회만 가정한다.<sup>8)</sup>

[그림 2]는 1952년 3분기부터 2012년 3분기까지 S&P500 지수의 기대수익률의 히스토그램이다. x축은 분기별 평균수익률, y축은 도수를 나타낸다. 실제

금융시장은 [그림 2]와 같이 두 국면 내에서 고정된 수익률을 가지지 않으며, 경제상황에 따라 시변하는 수익률을 보인다.



[그림 2] S&P500 지수의 기대수익률 히스토그램 (1952Q3~2012Q3)

본 연구에서 개인은 오직 과거 주가의 관측을 통해 현재 “관측 불가능한 거시경제” 또는 “시변하는 투자기회”에 대해 학습하게 된다. 이렇게 경기순환과 시변하는 투자기회를 동시에 반영한 자산관리모형 개발은 현 금융시장 상황을 더 잘 반영함으로써 개인의 최적소비 및 최적투자전략에도 많은 영향을 끼치게 될 것으로 기대된다.

### 3. 경기주기와 베이지안 학습 기법을 반영한 자산관리모형

본 연구에서는 관측 불가능한 마코프 국면전환모형(unobservable two-state Markov chain)을 이용하여 주식 프로세스 모수의 시변성을 고려한다. 개인은 현재의 경기가 호황인지 불황인지에 대한 매 시간마다의 사전믿음을 갖는다. 구체적으로 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음을  $p(t) (0 \leq p(t) \leq 1)$ 라는 확률 변수로 나타내면, 주식( $S_t$ )와 소득( $\epsilon_t$ )은 다음의 확률미분방정식을 따른다:

$$dS_t = [p(t)\mu_1 + (1-p(t))\mu_2]S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

$$\epsilon(p(t)) \equiv p(t)\epsilon_1 + (1-p(t))\epsilon_2,$$

여기에서  $\mu_1, \mu_2$ 는 각각 경기가 호황일 때와 불황일

8) 기존 국면전환모형은 개인 투자자가 두 가지 경제주기에 대한 완전한 정보를 가정하고 있지만 (즉, 고정된 모수), 본 연구는 현실적으로 투자자는 거시경제에 대한 불완전한 정보를 가지고 있다고 가정한다.

때의 주식의 기대수익률,  $\sigma$ 는 주식 변동성,  $B_t$ 는 1차원 표준브라운운동,  $\epsilon_1, \epsilon_2$ 는 각각 경기가 호황일 때와 불황일 때의 소득을 의미한다. 본 연구에서 사용되는 각 국면(1 : 호황, 2 : 불황)은 강도(intensity)  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 가지는 서로 독립(independent)인 포아송(poisson) 프로세스를 따른다. 다시 말해서,  $t$ 시간의 경기가 호황인 국면 1이  $t+dt$ 시간의 경기가 불황인 국면 2로 바뀔 확률은  $\lambda_1 dt$ 이며, 국면 1이 그대로 유지될 확률은  $(1-\lambda_1 dt)$ 이다.

Liptser and Shirayayev[18, 19]에 따르면, 관측 불가능한 주식의 기대수익률  $\mu_1, \mu_2$ 에 대하여 개인은 다음의 확률미분방정식을 따르는 베이지안 학습 기법을 통해 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 를 갱신한다:

$$dp(t) = [\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)p(t)]dt + \sigma^{-1}\delta p(t)(1-p(t))dB_t,$$

여기에서  $\delta$ 는 경기가 호황일 때와 불황일 때 주식의 기대수익률간의 차이, 즉  $\mu_1 - \mu_2$ 를 의미한다. 이때 개인은 과거의 주가 정보( $dS_t$ )와 호황과 불황의 국면을 결정하는 강도( $\lambda_1, \lambda_2$ )를 통해 베이지안 학습 기법( $dp(t)$ )를 따라  $p(t)$ 를 갱신한다.

구체적으로 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음이 장기적으로 현재의 경기가 호황에 머무를 확률  $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ <sup>9)</sup>보다 크다면, 베이지안 학습 기법의 추세(drift,  $dt$  부분) 부분이 음수가 되어 개인은 시간이 지남에 따라 평균적으로 경기가 더 나빠질 것이라고 자신의 사후믿음을 갱신한다. 이는 베이지안 학습 과정의 평균회귀(mean reversion)특성

9) 본 연구에서 고려하는 두 국면은 독립인 포아송 프로세스를 따르기 때문에 국면이 바뀌는 데까지 걸리는 시간인 지수분포(exponential distribution)를 따른다. 따라서 국면 1이 국면 2로 바뀌는 데까지 걸리는 평균 시간은  $1/\lambda_1$ 이고, 국면 2가 국면 1로 바뀌는 데까지 걸리는 평균 시간은  $1/\lambda_2$ 이다. 따라서 장기적으로 현재의 경기가 호황에 머무를 확률은  $(1/\lambda_1)/(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2) = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ 이다.

을 반영한 결과이다. 베이지안 학습 과정의 변동성 부분( $dB_t$  부분)을 살펴보면, 주식 시장의 변동성이 클수록 또는 경기가 호황일 때와 불황일 때 주식의 기대수익률간의 차이가 작을수록, 변동성 부분이 작아지므로, 베이지안 학습 효과가 둔화된다. 이런 결과는 변동성이 큰 시장일수록 같은 주가 정보에도 개인의 사후믿음 변화가 적음을 의미한다. 또한, 경기가 호황일 때와 불황일 때 주식의 기대수익률간의 차이가 작을수록, 개인은 과거의 주가 정보를 통해 그 차이가 클 때보다 더 정확하게 주식의 기대수익률을 예측할 수 있다.

본 연구에서 개인은 죽을 때까지<sup>10)</sup>  $\epsilon(p(t))$ 의 소득을 받는다. 또한, 개인은 소비  $c_t$ 에 대한 CARA(constant absolute risk aversion) 효용함수를 갖는다고 가정한다. 그러면 베이지안 학습 기법을 활용한 개인의 자산관리 문제는 다음의 최적화 문제로써 정의될 수 있다:

$$V(x, p) \equiv \text{Max}_{c_t, \pi_t} E \left[ \int_0^\infty e^{-(\beta + \nu)t} \left( -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma c_t} \right) dt \right], \quad (1)$$

여기에서  $\pi_t$ 는 개인의 부(wealth) 중에서 주식에 투자한 달러 양,  $\beta$ 는 개인의 주관적 할인율(subjective discount factor),  $\nu$ 는 사망 강도,  $\gamma$ 는 절대적 위험회피도(absolute risk-aversion)를 의미한다.<sup>11)</sup>

개인의 부  $X_t$ 는 다음의 확률미분방정식을 따른다:

$$dX_t = \{rX_t - c_t + \epsilon(p(t))\}dt + \pi_t \sigma \{dB_t + \theta(p(t))dt\}, \quad \text{for } 0 \leq t < \tau,$$

여기에서  $r$ 은 무위험이자율,  $\tau$ 는 개인의 사망시점을 의미하며, belief-adjusted Sharpe ratio  $\theta(p(t))$ 는  $\{\mu_2 + \delta p(t) - r\}/\sigma$ 로 정의한다. 본 연구의 최적화 문제 (1)은 동적 프로그래밍(dynamic programming) 방법을 활용하면 다음의 HJB(Hamilton-

10) 본 연구에서는 사망 위험(mortality risk)을 상수인 강도를 가지는 지수분포를 따른다고 가정한다.

11) 본 연구에서는 개인의 사망 후 유산(bequest)은 고려하지 않는다.

Jacobi-Bellman) 미분방정식의 해를 구하는 문제와 동일하다:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{c,\pi} [ & -(\beta+\nu)V(x, p) - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma c} \\ & + (rx - c + \epsilon(p))V_x + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 V_{xx} \\ & + \pi\sigma\theta(p)V_x + \{\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)p\}V_p \\ & + \frac{1}{2}(\sigma^{-1})^2\delta^2 p^2(1-p)^2 V_{pp} \\ & + \delta p(1-p)\pi V_{xp}] = 0, 0 < p < 1, \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서  $V_x, V_{xx}, V_p, V_{pp}, V_{xp}$  는  $x, p$ 에 대한 편미분(partial derivative)을 의미한다. 미분방정식 (2)에 대한 해를 다음과 같이 추측(guess)한 후

$$V(x, p) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(rx + f(p))}, 12)$$

소비  $c$ 와 주식에 투자하는 달러 양  $\pi$ 에 대한 FOC(first order conditions)를 식 (2)에 대입하면,  $p$ 에 대한 미분방정식을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 p^2 (1-p)^2}{2\sigma^2} f''(p) + (\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)p) \\ - \frac{\theta(p)\delta p(1-p)}{\sigma} f'(p) - rf(p) + r\epsilon(p) \\ + \frac{\beta + \nu - r}{\gamma} + \frac{r}{\gamma} \ln r + \frac{\theta(p)^2}{2\gamma} = 0, 0 < p < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

$p=0$ 과  $p=1$ 을 식 (3)에 대입하면, 경계 조건 (boundary conditions)은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} rf(0) &= \lambda_2 f'(0) + r\epsilon_2 + \frac{\beta + \nu - r}{\gamma} + \frac{r}{\gamma} \ln r + \frac{\theta(0)^2}{2\gamma}, \quad (4) \\ rf(1) &= -\lambda_1 f'(1) + r\epsilon_1 + \frac{\beta + \nu - r}{\gamma} + \frac{r}{\gamma} \ln r + \frac{\theta(1)^2}{2\gamma}, \end{aligned}$$

여기에서  $\ln$ 은 자연로그(natural logarithm)를 의

12) 여기에서  $f(p)$ 는 제 5장에서 베이저안 학습 기법에 대한 확실성등가부(certainty equivalent wealth)를 계산할 때 이용된다.

미한다. 경계 조건 (4)를 포함한 미분방정식 (3)을 풀기 위해, 본 연구는 Judd[15]의 프로젝션 방법 (projection method)을 활용한다.  $g(p) \equiv f'(p)$ 라 하면, 식 (3)은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 p^2 (1-p)^2}{2\sigma^2} g'(p) + (\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)p) \\ - \frac{\theta(p)\delta p(1-p)}{\sigma} g(p) - rf(p) + r\epsilon(p) \\ + \frac{\beta + \nu - r}{\gamma} + \frac{r}{\gamma} \ln r + \frac{\theta(p)^2}{2\gamma} = 0, 0 < p < 1. \end{aligned} \quad (5)$$

그리고 Chebyshev 다항함수를 이용하여  $f$ 와  $g$ 를 다음과 같이 근사한다:

$$f(p) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(p), g(p) = \sum_{i=0}^n b_i T_i(p), \quad (6)$$

여기에서  $T_i(p)$ 는  $0 \leq p \leq 1$ 에서 정의된 Chebyshev 다항함수이며,  $a_i, b_i (i=0, 1, \dots, n)$ 는 결정되어야 할 상수들이다. 식 (6)을 식 (3)~식 (5)에 대입한 후,  $T_i(p)$ 의 근을 차례로 대입하면 미지수들  $a_i, b_i (i=0, 1, \dots, n)$ 에 대한  $2n+2$ 개의 방정식을 얻는다. 따라서  $2n+2$ 개의 연립방정식의 해를 구하면  $p$ 에 대한 미분방정식 (3)을 풀게 된다.

## 4. 경기주기를 반영한 주가수익률 프로세스의 모수 추정

### 4.1 모수 추정 방법

본 연구에서는 Hamilton[12]에서 제안한 필터링 기법을 적용하여 주가수익률 모수를 추정하였다.<sup>13)</sup> 구체적으로 본 장에서는  $T$ 개의 관측 가능한 주가 수익률 데이터( $R_1, \dots, R_T$ )가 있을 때, 수익률이 관

13) Hamilton[12]은 관측되지 않는 경기주기를 반영하여 관측되는 미국 GNP(Gross National Product) 프로세스의 모수 추정 알고리즘을 제안하였다. Hamilton[12]의 기법은 Ang and Bekaert[2], Das et al.[7], Alexander and Kaeck[1] 등 국면전환을 고려한 다양한 금융 분야의 연구에서 활용되고 있다.

측 불가능한 경기주기  $k_t$ 에 영향을 받는 경우를 고려하여 주가수익률 프로세스의 모수 추정 방법을 논의하고자 한다. 본 연구에서 경기주기  $k_t$ 는 두 국면을 갖는 마코프 프로세스를 따른다고 가정한다. 본 연구에서 추정하고자 하는 주가수익률 프로세스는 다음과 같이 기술할 수 있다:

$$dR_t = \overline{\mu}_{k_t} + \Omega_{k_t}^{1/2} dB_t, \quad (k_t = 1, 2), \quad (7)$$

여기에서  $\overline{\mu}_{k_t} = \mu_{k_t} - \Omega_{k_t}/2$ 이며,  $\Omega_{k_t}$ 는 두 경기주기의 변동성을 의미한다.<sup>14)</sup> 식 (7)은 ito's lemma를 활용한 제 3장 주식의 기하브라운운동(geometric Brownian motion)에서 유도된다.

$T$ 개의 ( $R_1, \dots, R_T$ ) 수익률 관측치가 관측 불가능한 경기주기에 영향을 받는다고 할 때, 현재 경기주기( $k_t = 1$  : 경기호황,  $k_t = 2$  : 경기불황)에 따라 주가수익률 프로세스의 기대수익률( $\overline{\mu}_{k_t}$ )과 변동성( $\Omega_{k_t}^{1/2}$ )을 결정해야 된다. 구체적으로 모수벡터(parameter vector)  $\theta$ 를  $\theta = (\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \Omega_1, \Omega_2)$ 로 정의할 때,  $f(R_t|k_t)$ 는 경기주기  $k_t$ 를 조건부로 하는  $R_t$ 의 확률밀도함수(probability density function)이며 정규분포를 따른다고 가정한다. 또한,  $t-1$ 시점에  $i$ 번째 경기주기에서  $t$ 시점에  $j$ 번째 경기주기로 변화하는 전이확률(transition probability)은  $p_{ij,t} = \text{prob}(k_t = j | k_{t-1} = i) = p_{ij}$ 로 표현될 수 있으며,  $\sum_j p_{ij} = 1$ 의 관계가 성립한다:

$$\begin{aligned} \text{prob}(k_t = 1 | k_{t-1} = 1) &= p_{11}, \\ \text{prob}(k_t = 2 | k_{t-1} = 1) &= p_{12} = 1 - p_{11}, \\ \text{prob}(k_t = 2 | k_{t-1} = 2) &= p_{22}, \\ \text{prob}(k_t = 1 | k_{t-1} = 2) &= p_{21} = 1 - p_{22}. \end{aligned}$$

본 장에서는 두 가지 경기주기를 반영한 전이확률

14) 본 연구에서 고려한 주식 프로세스의 변동성  $\sigma$ 는 각 경기주기의 듀레이션(duration)을 고려하여 구하였다:

$$\sigma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \Omega_1^{1/2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \Omega_2^{1/2}.$$

$Q = (p_{11}, p_{12}, p_{22}, p_{21})$ 와 주가수익률 프로세스의 모수인 기대수익률( $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2$ ) 및 분산( $\Omega_1, \Omega_2$ )을 함께 추정한다. 이러한 모수들은 수익률 관측치들의 우도함수(likelihood function)  $f(R_T, \dots, R_1; \theta, Q)$ 을 최대화함으로써 추정된다. 마지막으로 추정된 주가수익률 결과를 토대로 실제 주식의 기대수익률( $\mu_1, \mu_2$ )를 구한다.<sup>15)</sup>

## 4.2 모수 추정 결과

본 장에서는 앞서 설명한 마코프 국면전환을 반영한 주가수익률 프로세스의 모수 추정 방식에 KOSPI 지수 데이터를 적용하여 도출한 모수 추정 결과를 분석하고자 한다. 분석에 이용한 데이터는 2003년에서 2012년 기간 동안 KOSPI 지수의 주간 수익률 데이터다. KOSPI 지수의 주간수익률 기초통계량은 <표 2>와 같으며 연간화(annualized)된 값으로 표기하였다.

<표 2> KOSPI 지수의 주가수익률 기초통계량

평균	0.1156
표준편차	0.2367
최소값	-11.9230
0.25 quantile	-0.7301
0.5 quantile	0.3245
0.75 quantile	1.0364
최대값	8.8566

<표 3>은 2003년에서 2012년 기간 동안 KOSPI 지수의 주간 주가수익률 데이터를 기반으로 식 (7)의 모수 추정 결과와 표준오차를 나타낸다. 경기호

15)  $t$ 시점까지의 정보를  $\Psi_t$ 라고 정의할 때, 최종적으로 다음의 우도함수를 최대화 시키는  $\theta$ 와  $Q$ 를 찾는 것이 목표이다:

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln \sum_{j=1}^2 (f(R_t | k_t = j, \theta, Q) \text{prob}(k_t = j | \Psi_t)),$$

여기에서  $L$ 은  $f(R_T, \dots, R_1; \theta, Q)$ 을 의미하며, 우변의 두 항목은 Bayes' rule에 의해서  $t$ 시점의 새로운 정보에 의해 갱신되게 된다(참고 : [13]).



황으로 대변되는  $k_t = 1$ 의 경우에는 상대적으로 기대수익률( $\mu_1 = \bar{\mu}_1 + \Omega_1^{1/2}$ )은 높고 변동성( $\Omega_1^{1/2}$ )은 낮게 관찰된다. 반대로 경기불황으로 대변되는  $k_t = 2$ 의 경우에는 상대적으로 기대수익률( $\mu_2 = \bar{\mu}_2 + \Omega_2^{1/2}$ )은 낮고 변동성( $\Omega_2^{1/2}$ )은 높게 추정되는 것을 알 수 있다.<sup>16)</sup> 한편, 모수  $p_{11}$ 과  $p_{22}$ 는 각 경기주기에 머무르는 확률을 의미한다. 일반적으로 경기주기 내에서 경기호황기가 경기불황기에 비해 긴 것을 감안할 때, 경기호황에 대한 전이확률인  $p_{11}$ 이 불황에 대한 전이확률  $p_{22}$ 보다 큰 값을 가지는 것이 타당하다고 해석할 수 있다. 추정된 전이확률로부터 마코프 국면전환을 고려한 주식 프로세스의 두 국면의 강도( $\lambda_{k_t}$ )를 계산하면  $\lambda_1 = 2.5815$ 와  $\lambda_2 = 5.7459$ 를 얻게 된다. 본 연구에서 고려하는 주식 프로세스는 기대수익률이 변화하고 변동성은 경기순환에 따라 일정한 경유이므로, 모형에서 변동성은 <표 3>에서 추정한 변동성  $\Omega_1^{1/2}$ 와  $\Omega_2^{1/2}$ 의 경기주기당 평균 값인 0.2092를 이용하게 된다.

<표 3> KOSPI 지수의 추가수익률 프로세스 모수 추정 결과

모수	추정치	표준오차
$\bar{\mu}_1$	0.3364	0.0341
$\bar{\mu}_2$	-0.3728	0.0330
$\Omega_1^{1/2}$	0.1425	0.0943
$\Omega_2^{1/2}$	0.3578	0.0162
$p_{11}$	0.9504	0.0095
$p_{22}$	0.8895	0.0093
log likelihood	1104.1395	

<부록 [그림 1]>은 KOSPI 지수의 추가수익률의 시계열, 모수 추정 과정에서 계산되는 평활화확률(smoothed probability), 그리고 국면 분류(regime classification)<sup>17)</sup>를 보여준다.  $t$ 시점의 평활화확률

$\kappa(t)$ 는 전체 수익률 관측치를 조건으로 할 때,  $t$ 시점이 경기불황일 확률,  $\kappa(t) = \text{prob}\{k_t = 2 | R_1, \dots, R_T\}$ 로 정의된다.

Hamilton[12]에 따르면, 평활화확률이 0.5보다 클 경우 ( $\kappa(t) > 0.5$ )  $t$ 시점을 경기호황으로 분류할 수 있다고 언급되어있다. 경기주기 내 경기호황과 경기불황은 일정 기간 동안 해당 국면을 유지하는 성향을 가지는 점을 고려할 때 1분기 이하 경기불황 구간을 무시하면, <부록 [그림 1]>에서 경기불황 구간은 2003년 1월~2004년 6월, 2007년 6월~2009년 3월, 2011년 7월~2011년 12월의 세 구간으로 판단할 수 있다. 통계청에서 발표한 한국 경기주기를 공표하는 기준순환일 중 해당 구간 동안 경기불황 기간은 신용 및 투신사 유동성 위기로 촉발된 2002년 12월~2005년 4월, 글로벌 금융위기가 원인이 된 2008년 1월~2009년 2월의 두 구간이었다. 기간 상 다소 차이가 보이지만, 2011년 말 단기의 경기불황 구간을 제외하고, 본 연구에서 구분한 국면구분은 실제 발표된 기준순환일과 유사하다고 볼 수 있다.

추가적인 분석으로 KOSPI 지수와 동일한 분석 기간(2003년~2012년)동안 S&P500 지수의 국면전환을 고려한 추가수익률의 모수 추정<sup>18)</sup>을 통한 국면 분류를 부록 [그림 2]에 나타내었다.

앞서 KOSPI 지수 데이터를 이용한 국면 분류와 비슷한 가정 하에서 <부록 [그림 2]>의 경기불황 기간은 2008년 9월~2009년 7월, 2011년 6월~2011년 12월로 판단할 수 있다. 미국 국립경제조사국에서는 미국 경기주기를 주기적으로 공표하고 있으며, 이는 경제·금융 관련 많은 연구에서 기준치로 이용되고 있다. 미국 국립경제조사국에서 공표한 해당 분석기간 중의 경기불황기는 미국 서브프라임 모기지론으로 촉발된 2007년 12월~2009년 6

18) S&P500 지수의 모수추정치와 표준오차(괄호) 다음과 같다:

$\bar{\mu}_1 = 0.1295 (0.0119)$ ,  $\bar{\mu}_2 = -0.2149 (0.0362)$ ,  
 $\Omega_1^{1/2} = 0.1156 (0.0864)$ ,  $\Omega_2^{1/2} = 0.3140 (0.0202)$ ,  
 $p_{11} = 0.9867 (0.0014)$ ,  $p_{22} = 0.9589 (0.0193)$ ,  
 log likelihood = 1263.7853.

16) 보정된 모수의 값은  $\mu_1 = 0.3466$ ,  $\mu_2 = -0.3088$ 이다.

17) 표기의 편의상 국면을 분류한 그림에서 경기호황기( $k_t = 1$ )는 0, 경기불황기( $k_t = 2$ )는 1로 나타내었다.

월의 글로벌 금융위기 기간이었다. 금융위기의 과정은 아직까지 미국은 물론 전 세계 경기에 영향을 미치고 있다는 점을 감안할 때, 본 연구에서 제시한 금융위기 이후의 기간 역시 경기불황으로 분류한 점은 가능할 수도 있다고 생각된다. 따라서 2003년 초반 3개월 정도를 제외하고, 본 모형에서는 금융위기 기간을 타당하게 분류해 낸 것을 확인 할 수 있다.

## 5. 수치적 결과

### 5.1 개인의 최적소비와 최적투자전략

개인의 최적소비와 최적투자전략의 해는 다음 [이론 1]과 같이 표현된다.<sup>19)</sup>

#### [이론 1] 베이지안 학습 기법을 활용한 개인의 최적소비와 최적투자전략

베이지안 학습 기법을 활용한 개인의 최적소비  $c$ 와 최적투자전략  $\pi$ 는 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 에 대한 함수로써 다음과 같다:

$$c = -\frac{1}{\gamma} \ln r + rx + f(p(t)), \quad (8)$$

$$\pi = \frac{\theta(p(t))}{\sigma\gamma r} - \frac{\delta p(t)(1-p(t))}{\sigma^2 r} f'(p(t)),$$

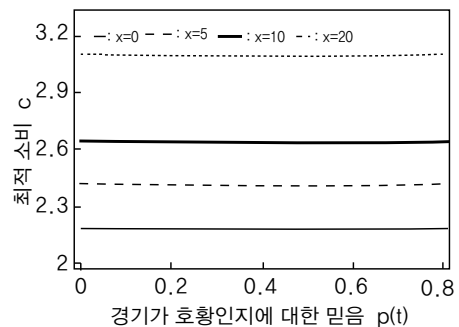
여기에서  $f(p(t))$ 는 미분방정식 (3)의 해이다.

[증명] HJB 미분방정식 (2)에서 최적소비  $c$ 와 최적투자전략  $\pi$ 에 대한 FOC를 구하면 [이론 1]에서 제시한  $c$ 와  $\pi$ 를 얻을 수 있다.□

[이론 1]의 식 (8)에서 제시된 개인의 최적소비  $c$ 와 최적투자전략  $\pi$ 는 현재의 경기가 호황인 정도  $p(t)$ 에 따라 달라진다. 참고로 개인은 자신이 보유한 부에 비례하여 소비량을 증가시키는 반면, 동일

한  $p(t)$ 에 대하여 부에 상관없이 같은 양을 주식에 투자한다. 이는 본 연구에서 사용한 CARA 효용함수가 개인의 주식 투자량에 있어서 부의 효과(wealth effect)를 없애는 특성을 반영한 결과이다.<sup>20)</sup>

[그림 3]은 다양한 부에 대하여 개인이 생각하는 경기가 호황인 정도  $p(t)$ 에 따라 최적소비량이 어떤 식으로 이루어지는지를 보여준다. [그림 3]에 따르면, 개인의 최적소비량은 경기가 호황인지 불황인지에 대한 믿음과는 상관없이 개인이 보유하고 있는 부에 큰 영향을 받는다. 다시 말해서, 베이지안 학습 기법을 활용한 개인의 최적소비량은 Merton[22, 23]을 비롯한 다수 학자들의 연구 결과와 마찬가지로 부에 대하여 증가하는 경향성을 보인다.



[그림 3] 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 에 대한 개인의 최적소비  $c$

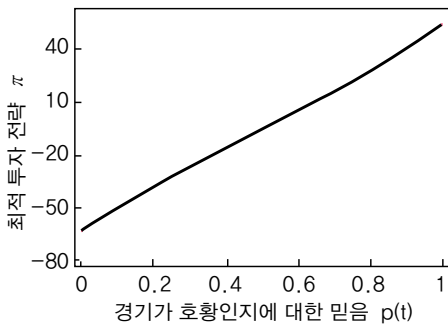
한편, 개인의 최적투자전략  $\pi$ 가 경기가 호황인 정도  $p(t)$ 에 대하여 어떻게 달라지는가에 대하여는 [그림 4]를 보면 알 수 있다. 여기서 [그림 4]의 세로축은 개인이 주식에 투자하는 양을 의미한다. 예를 들어 주식 투자량이 +40인 경우, 자신의 소득 수준을 1로 생각했을 때 무위험 이자율  $r=4.55\%$ 로 계산한 소득의 현재 가치는 약 +22(=1/0.0455)가 된다. 이때 개인은 자신의 총 소득 대비 약 1.82(=40/22)배에 해당되는 만큼을 주식에 투자한다. [그림 4]에서는

19) 제 5장에서는 제 4장에서 추정한 모수 이외에 다음의 모수들을 사용하여 수치적 결과를 도출하였다:

$r = 4.55\%$ ,  $\beta = 5.55\%$ ,  $\nu = 0$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 0.5$ .

20) Merton[22]을 비롯하여 CARA 효용함수를 사용한 기존의 자산관리모형의 결과와 동일하다. 단, 본 연구의 모형과 기존 문헌과는 달리 현재의 경기가 호황인지 불황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 를 고려한 최적투자전략을 제시한다.

개인이 주식에 투자하는 양이 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음에 따라 크게 달라진다. 만약 현재의 경기가 불황기에 있다고 판단할 경우( $p(t)=0$ ), 개인은 많은 양의 공매도(short selling)를 하는 것이 최적이다. 이는 현재의 경기가 불황일 경우, 주식의 기대수익률  $\mu_2 = -30.88\%$ 이 무위험이자율  $r = 4.55\%$ 보다 현저히 낮은 금융시장 상황을 잘 반영한 투자전략이다. 또한, 개인은 경기가 불황기에 있다고 판단할 경우, 자신의 소득 수준을  $\epsilon_2 (< \epsilon_1)$ 로 생각하기 때문에 유동성 확보 차원에서 주식을 매도하는 것이 합리적이다.



[그림 4] 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 에 대한 개인의 최적투자전략  $\pi$

반면, 경기 회복에 대한 낙관론이 지배적일수록(즉, 현재의 경기가 호황기에 있다고 생각할 경우;  $p(t)=1$ ), 개인은 많은 양의 주식을 매수 하는 것이 최적이다. 경기가 호황기인 경우, 주식의 기대수익률  $\mu_1 = 34.66\%$ 이 무위험이자율  $r = 4.55\%$ 보다 월등히 높기 때문에, 개인은 주식 매수를 통해 큰 리스크 프리미엄(risk premium)을 기대할 수 있다. 게다가 개인은 현재의 경제상황이 호황 국면에 접어들었다고 생각하기 때문에 자신의 소득 수준을  $\epsilon_1 (> \epsilon_2)$ 으로 기대하며 풍부한 유동성을 활용하여 적극적인 주식 매입 전략을 구사할 수 있다.

2008년 글로벌 금융위기 이후 현재의 경제상황이 호황기인지 불황기인지에 대해서는 전문가들 사이에서 의견이 분분하다. 대부분의 기존 문헌에서는 경기변동위험을 고려하지 않았을 뿐만 아니라,

경기변동위험을 고려한 몇몇 문헌에서는 현재 경제 상황을 정확하게 진단할 수 있다는 비현실적인 가정을 포함하고 있다. 따라서 현재의 금융시장 상황을 보다 잘 반영한 자산관리모형은 본 연구에서 제시한 것처럼 현재의 경제상황이 호황인지 불황인지에 대한 믿음에 따라 다른 투자전략을 제시하게 된다. 예를 들어, 현재 경제상황에 대한 정확한 진단이 어려운 경우( $p(t) \approx 0.5$ ), 본 연구에서 제시하는 최적투자전략은 적정량(-5.5102)의 공매도 포지션을 취하는 것이다([그림 4] 참조). 그러나 현재의 경제 상황을 정확하게 판단할 수 있다고 가정한 기존의 연구에서는 경기를 불황으로 관측한 경우 너무 많은 양의 공매도 포지션을 제시할 수 있으며, 경기를 호황으로 관측한 경우 무리한 주식 매입 전략을 제안할 수 있다[14]. 경기불황만 고려한 경우, 주식 시장이 조금만 상승 국면에 접어들어도 너무 많은 양의 공매도 포지션으로 인하여 막대한 양의 손실을 초래할 수 있으며, 경기호황만 고려한 경우 주식 시장이 조금만 하락하여도 무리한 주식 매입 전략으로 인해 개인에게 큰 손실을 입힐 수 있다.

## 5.2 베이지안 학습 기법에 대한 확실성등가부 (Certainty Equivalent Wealth)

본 연구에서 개인은 경기가 호황일 때의 기대수익률( $\mu_1$ )과 경기가 불황일 때의 기대수익률( $\mu_2$ )에 대하여 베이지안 학습 기법을 따라 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 를 갱신한다. 현재의 경제상황에 대한 정확한 진단이 불가능하다는 현실적인 가정으로부터 도입한 관측 불가능한 국면전환모형에 대하여, 과거의 주가 정보로부터 베이지안 학습 기법을 통해 현재의 경제상황을 예측해가는 것이 경기변동위험을 보다 현실적으로 반영한다고 할 수 있다. 이 때 베이지안 학습 기법이 개인의 자산관리 시 어느 정도의 가치를 가지는지를 분석하는 것은 모형의 실용화 및 정합성 검증의 차원에서 의미 있는 일이다. 베이지안 학습 기법에 대한 가치를 개인의 부로 환산하기 위해 다음의 확실성등가부의 개념을 도입한다.

### [정의 1] 베이지안 학습 기법에 대한 확실성등가부

$\Delta_{1(2)}(p)$ 를 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 에 따른 경기가 호황(불황)으로 관측되었을 때 베이지안 학습 기법의 확실성등가부라 하면,  $\Delta_{1(2)}(p)$ 는 다음의 식을 만족한다:

$$V_1(x - \Delta_1(p)) = V(x, p),$$

$$V_2(x - \Delta_2(p)) = V(x, p),$$

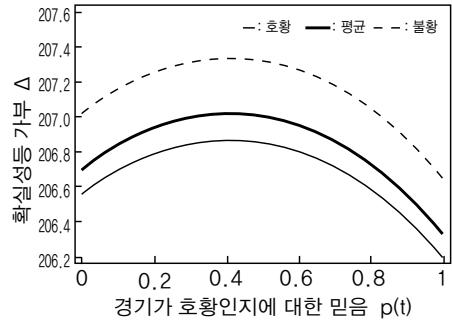
여기에서  $V_{1(2)}$ <sup>21)</sup>는 베이지안 학습 기법을 고려하지 않고, 현재의 경기가 호황(불황)으로 관측되었을 때 경기변동위험만을 고려한 목적 함수를,  $V(x, p)$ 는 관측 불가능한 국면전환모형에 대한 베이지안 학습 기법을 고려한 목적 함수를 의미한다. 본 연구는 두 가지 경기주기에 대한 주식의 변동성  $\sigma$ 를 고정시키고 기대수익률  $\mu_1, \mu_2$ 만 변화시켰으므로  $\Delta_{1(2)}(p)$ 를 통해 각 경기주기당 순수 베이지안 학습 효과를 알아볼 수 있다. 또한, 베이지안 학습 기법의 평균적인 확실성등가부  $\Delta$ <sup>22)</sup>는 다음과 같다:

$$\Delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \Delta_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \Delta_2.$$

[그림 5]는 경기가 호황인 정도  $p(t)$ 에 따른 확실성등가부  $\Delta$ 를 나타낸다. 현재의 경기가 호황인지 불황인지와 상관없이 확실성등가부  $\Delta$ 는  $p(t)$ 가 0에서부터 시작하여 점점 증가함에 따라 함께 증가하는 경향성을 보이다가,  $p(t)$ 가 약 0.4 이상이면 다시 감소한다.

$p(t)$ 가 0이거나 1일 때 베이지안 학습 기법의 가치가 낮은 이유는, 현재의 경기가 확실히 호황이거나 불황이라고 믿을 경우, 경기가 호황일 때의 기대수익률( $\mu_1$ )과 경기가 불황일 때의 기대수익률( $\mu_2$ )에 대한 베이지안 학습 효과가 가장 작기 때문이다. 만약  $p(t)$ 가 약 0.4라면, 다시 말해, 현재의 경기가

호황인지 불황인지에 대한 판단이 어려울 경우, 베이지안 학습 기법을 통한 학습 효과가 가장 크다. 이는 [그림 5]에서  $p(t)$ 가 0.4근처에서 가장 큰 확실성등가부를 가지는 것과 동일하다.



[그림 5] 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 에 대한 확실성등가부  $\Delta$

한편, [그림 5]를 보면 경기가 불황으로 관측되었을 때의 확실성등가부  $\Delta$ 가 경기가 호황으로 관측되었을 때보다 더 큰 값을 가진다. 다시 말해서, 불황기일 때 개인의 부의 변화가 호황기 때보다 더 큰 것을 의미한다. 이 결과는 개인이 불황기의 나쁜 소식(bad news)에 과잉 반응하는 현상과 관련이 있을 것이다. 따라서 경기가 호황일 때보다 경기가 불황일 때 베이지안 학습 효과가 더 두드러진다.

### 5.3 베이지안 학습 기법에 대한 포트폴리오

#### 헤지 수요(hedging demand)

앞서 제 5.1절에서 기술한바와 같이 개인의 최적 투자전략은 현재의 경기가 호황인지에 대한 믿음의 정도  $p(t)$ 에 따라 크게 달라진다. 이는 개인이 자산 관리 시 관측 불가능한 경기주기에 대한 학습 효과에 따른 포트폴리오 헤지 수요를 가짐을 의미한다. 베이지안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요는 다음과 같이 정의된다.

### [정의 2] 베이지안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요

현재의 경기가 호황(불황)으로 관측되었을 때 베

21)  $V_{1(2)}$ 의 유도과정은 <부록 1>을 참고한다.

22) 베이지안 학습 기법의 평균적인 확실성등가부  $\Delta$ 에 대한 정의는 Jang et al.[14]을 참고하였다.

이지안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요를  $\xi_{1(2)}(p)$ <sup>23)</sup>라 하면, 다음의 식으로 표현된다:

$$\xi_1(p) = \frac{\mu_1 - r}{\sigma^2 \gamma r} - \pi,$$

$$\xi_2(p) = \frac{\mu_2 - r}{\sigma^2 \gamma r} - \pi,$$

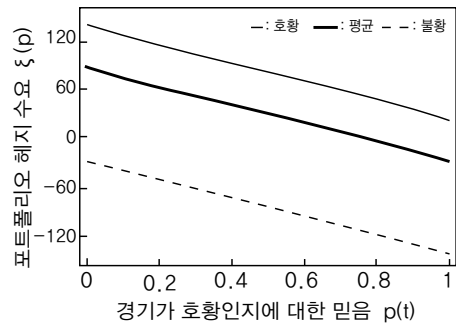
여기에서  $\mu_1, \mu_2$ 는 각각 경기가 호황, 불황일 때의 주식의 기대수익률,  $\sigma$ 는 주식의 변동성을 나타낸다. 또한, 베이지안 학습 기법의 평균적인 포트폴리오 헤지 수요  $\xi(p)$ <sup>24)</sup>는 다음과 같이 표현된다:

$$\xi(p) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \xi_1(p) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \xi_2(p).$$

[그림 6]은 경기가 호황인 정도  $p(t)$ 에 따른 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요  $\xi(p)$ 를 나타낸다. 먼저 현재의 경기가 호황인지 불황인지에 관계없이 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요는  $p(t)$ 가 커짐에 따라 감소한다. 경기가 호황기에 있다고 생각할수록 개인은 적극적인 주식 매수를 통해 큰 리스크 프리미엄을 기대할 수 있으며, 이에 따라 현재 경제상황의 불확실성에 대한 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요는 줄어든다.

현재의 경기가 호황(실선)으로 관측되었을 때 개인이 현재의 경기가 불황 국면에 있다고 판단할 경우 ( $p(t)=0$ ), 호황기와 불황기의 주식 기대수익률에 대한 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요는 가장 큰 양의 값을 가진다. 현재의 경제상황이 관측 가능하다는 비현실적인 가정을 포함한 기존의 연구 결과[14]와 비교했을 때, 본 연구에서는 현재의 경기가 호황으로 관측한 기존의 자산관리모형이 제시한 주식의 투자량( $(\mu_1 - r)/\sigma^2 \gamma r$ )보다 약 120이 넘는 양의

헤지 수요( $p(t)=0$ )를 제시한다. 개인의 소득 수준을 1로 생각했을 때, 무위험 이자율  $r=4.55\%$ 로 계산한 소득의 현재 가치는 약 +22가 되며, 이 경우 본 연구에서 제시하는 최적투자전략은 기존의 자산관리모형보다 개인의 소득 대비 약 5.45(=120/22)배에 달하는 만큼의 주식을 매도하여 주식 투자량을 줄여야 한다. 다시 말해서, 경기가 불황 국면에 있다고 확실히 믿는 개인에게 현재의 경기가 호황이라고 관측한 기존의 자산관리모형이 제시하는 주식 투자량은 너무 클 수 있으며, 현재의 경기가 호황이라는 관측이 틀릴 경우 개인에게 금전적인 손실을 입힐 수 있다.



[그림 6] 경기가 호황인지에 대한 믿음  $p(t)$ 에 대한 포트폴리오 헤지 수요  $\xi(p)$

또한, 경기가 호황으로 관측되고 개인이 현재의 경기가 호황 국면에 있다고 판단할 경우( $p(t)=1$ ), 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요도 0보다 크게 된다. 다시 말해서, 기존의 자산관리모형은 학습 효과를 고려한 본 연구의 모형보다 더 큰 주식 투자량을 제시한다. 현재의 경기가 호황이라는 관측이 맞다고 할지라도, 이후의 관측 불가능한 경기주기에 대한 베이지안 학습 기법을 고려할 경우( $0 < p(t) < 1$ ), 본 연구에서는 보수적인 주식 투자량을 제시한다. 따라서 경기가 호황일 때 관측 불가능한 경기주기를 고려하지 않은 기존의 자산관리모형의 주식 투자량은 과대 계상되었을 가능성이 있다.

[그림 6]에서 현재의 경기가 불황(점선)으로 관측되었을 때, 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요는 음의 값을 갖는다. 이는 현재의 경제상

23) 베이지안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요  $\xi(p)$ 의 정의에 대한 자세한 내용은 <부록 2>를 참고한다.

24) 평균적인 확실성등가부  $\Delta$ 를 정의할 때와 마찬가지로 베이지안 학습 기법의 평균적인 포트폴리오 헤지 수요  $\xi(p)$ 를 정의하였다.

황을 불황으로 관측한 기존의 자산관리모형이 제시한 주식 투자량( $(\mu_2 - r)/\sigma^2 \gamma r$ )보다 더 많은 양의 주식을 매수해야 하는 것으로 해석될 수 있다. 그러므로 경기가 불황일 때 현재의 경제상황에 대한 관측이 가능하다는 비현실적인 가정을 포함한 기존의 자산관리모형이 제시하는 주식 투자량은 과소 계상되었을 가능성이 있다.

베이지안 학습 기법의 평균적인 포트폴리오 헤지 수요(굵은선)는 현재의 경제상황이 호황이라는 믿음이 커질수록 감소하다가, 현재의 경제상황에 대한 낙관적인 전망을 가질 경우 ( $0.77 < p(t)$ ) 음의 값을 갖는다. 따라서 현재의 경기가 호황인지 불황인지에 대한 의견인 분분한 경우 ( $0 \leq p(t) \leq 0.77$ ), 기존의 자산관리모형이 제시한 주식 투자량과 비교했을 때, 보수적인 주식 투자를 통해 경기변동위험 및 경기주기에 대한 불완전한 정보위험에 대비하는 것이 합리적이다.

## 6. 결 론

본 연구는 관측 불가능한 경기주기에 대하여 베이지안 학습 기법을 고려한 개인의 자산관리모형을 제시한다. 구체적으로 개인은 현재의 경제상황이 호황기인지 불황기인지 정확하게 진단할 수 없기 때문에 현재의 경기가 호황인지에 대한 사전믿음을 가지고 있다. 개인은 자신의 사전믿음과 베이지안 학습 기법을 따라 과거의 주가 정보를 통해 사후 믿음을 갱신한다. 본 연구에서 제시하는 자산관리모형은 경기변동위험과 경기주기에 대한 불완전한 정보위험을 고려하지 않은 기존의 자산관리모형에 비해 보다 현실적인 대안이 될 수 있다. 본 연구의 수치적 결과에 따르면, 소득을 고려한 개인의 최적 투자전략은 경기가 호황인지에 대한 믿음에 따라 크게 달라졌다. 또한, 경기가 불황으로 관측되었을 때의 확실성등가부가 경기가 호황으로 관측되었을 때보다 더 큰 값을 가지며, 베이지안 학습 기법의 포트폴리오 헤지 수요는 경기가 호황인지에 대한 믿음이 커짐에 따라 감소한다는 사실을 확인하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] Alexander, C. and A. Kaeck, "Regime dependent determinants of credit default swap spreads," *Journal of Banking and Finance*, Vol.32, No.6(2008), pp.1008-1021.
- [2] Ang, A. and G. Bekaert, "International Asset Allocation With Regime Shifts," *Review of Financial Studies*, Vol.15, No.4(2002), pp.1137-1187.
- [3] Bodie, Z., R.C. Merton, and W.F. Samuelson, "Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.16, No.34(1992), pp.427-449.
- [4] Brennan, M.J., "The Role of Learning in Dynamic Portfolio Decisions," *European Finance Review*, Vol.1, No.3(1998), pp.295-306.
- [5] Campbell, J.Y. and J.H. Cochrane, "By Force of Habit : A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior," *Journal of Political Economy*, Vol.107, No.2 (1999), pp.205-251.
- [6] Campbell, J.Y. and L.M. Viceira, "Consumption and Portfolio Decisions when Expected Returns are Time Varying," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.114, No.2(1999), pp.433-495.
- [7] Das, S.R., L. Freed, G. Geng, and N. Kapadia, "Correlated Default Risk," *The Journal of Fixed Income*, Vol.16, No.2(2006), pp.7-32.
- [8] Detemple, J.B., "Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information," *The Journal of Finance*, Vol.41, No.2(1986), pp.383-391.
- [9] Dybvig, P.H. and H. Liu, "Lifetime consumption and investment : Retirement and constrained borrowing," *Journal of Economic*

- Theory*, Vol.145, No.3(2010), pp.885-907.
- [10] Farhi, E. and S. Panageas, "Saving and investing for early retirement : A theoretical analysis," *Journal of Financial Economics*, Vol.83, No.1(2007), pp.87-121.
- [11] Feldman, D., "The Term Structure of Interest Rates in a Partially Observable Economy," *The Journal of Finance*, Vol.44, No.3(1989), pp.789-812.
- [12] Hamilton, J.D., "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, Vol.57, No.2(1989), pp.357-384.
- [13] Hamilton, James D., "Regime-switching models," *The new palgrave dictionary of economics* 2, 2008.
- [14] Jang, B.-G., H.K. Koo, H. Liu, and M. Loewenstein, "Liquidity Premia and Transaction Costs," *The Journal of Finance*, Vol.62, No.5(2007), pp.2329-2366.
- [15] Judd, K.L., *Numerical methods in economics*, The MIT press, 1998.
- [16] Karatzas, I. and X.-X. Xue, "A Note On Utility Maximization Under Partial Observations1," *Mathematical Finance*, Vol.1, No.2(1991), pp.57-70.
- [17] Koo, H.K., "Consumption and Portfolio Selection with Labor Income : A Continuous Time Approach," *Mathematical Finance*, Vol.8, No.1(1998), pp.49-65.
- [18] Liptser, R.S., *A. Shiriyayev, Statistics of Random Processes*, Vol.1, General Theory, Springer-Verlag, 1977.
- [19] Liptser, R.S., *A. Shiriyayev, Statistics of Random Processes*, Vol.2, Applications, Springer-Verlag, 1978.
- [20] Liu, H., "Dynamic portfolio choice under ambiguity and regime switching mean returns," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.35, No.4(2011), pp.623-640.
- [21] Markowitz, H., "PORTFOLIO SELECTION," *The Journal of Finance*, Vol.7, No.1(1952), pp.77-91.
- [22] Merton, R.C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : The Continuous-Time Case," *The Review of Economics and Statistics*, Vol.51, No.3(1969), pp.247-257.
- [23] Merton, R.C., "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of Economic Theory*, Vol.3, No.4 (1971), pp.373-413.
- [24] Viceira, L.M., "Optimal Portfolio Choice for Long-Horizon Investors with Nontradable Labor Income," *The Journal of Finance*, Vol.56, No.2(2001), pp.433-470.
- [25] Wang, N., "Optimal consumption and asset allocation with unknown income growth," *Journal of Monetary Economics*, Vol.56, No.4(2009), pp.524-534.
- [26] Xia, Y., "Learning about Predictability : The Effects of Parameter Uncertainty on Dynamic Asset Allocation," *The Journal of Finance*, Vol.56, No.1(2001), pp.205-246.

## 〈부록 1〉 베이지안 학습 기법을 고려하지 않고, 현재의 경기가 호황(불황)일 때 경기변동위험만을 고려한 목적 함수 $V_{1(2)}$ 의 유도과정

현재의 경기가 호황으로 관측되었을 때 경기변동위험만을 고려한 개인의 자산관리 문제는 다음의 최적화 문제로 정의된다:

$$V_1(x) \equiv \text{Max}_{c, \pi} E \left[ \int_0^{T_1} e^{-(\beta+\nu)t} \left( -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma c} \right) dt \right] + e^{-\beta T_2} V_2(X_{T_2}),$$

여기에서  $T_1(T_2)$ 는 경기가 호황(불황)에서 불황(호황)으로 바뀌는 데까지 걸리는 시간을 의미한다. 경기가 호황으로 관측되었을 때 개인의 부  $X_t$ 는 다음의 확률미분방정식을 따른다:

$$dX_t = \{rX_t - c + \epsilon_1\}dt + \pi_t \sigma \{dB_t + \theta_1 dt\}, \text{ for } 0 \leq t < T_1,$$

여기에서  $\mu_1$ 을 경기가 호황일 때의 주식의 기대수익률,  $\sigma$ 를 주식의 변동성,  $\theta_1 = (\mu_1 - r)/\sigma$ 은 경기가 호황일 때의 Sharpe ratio를 나타낸다. 위의 최적화 문제는 동적 프로그래밍을 통해 다음의 HJB 미분방정식 계(system)를 푸는 문제와 동일하다:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{c, \pi} \left[ -(\beta+\nu) V_1(x) - \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma c} \right. \\ & \left. + (rx - c + \epsilon_1) V_1'(x) + \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 V_1''(x) \right. \\ & \left. + \pi \sigma \theta_1 V_1'(x) + \lambda_1 (V_2(x) - V_1(x)) \right] = 0, \\ & \text{Max}_{c, \pi} \left[ -(\beta+\nu) V_2(x) - \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma c} \right. \\ & \left. + (rx - c + \epsilon_2) V_2'(x) + \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 V_2''(x) \right. \\ & \left. + \pi \sigma \theta_2 V_2'(x) + \lambda_2 (V_1(x) - V_2(x)) \right] = 0, \end{aligned}$$

여기에서  $\theta_2 = (\mu_2 - r)/\sigma$ 는 경기가 불황일 때의 Sharpe ratio를 나타낸다. 위의 미분방정식에 대한 해를 다음과 같이 추측한 후

$$V_1(x) = -\frac{M_1}{\gamma r} e^{-\gamma(rx + \epsilon_1)}, \quad V_2(x) = -\frac{M_2}{\gamma r} e^{-\gamma(rx + \epsilon_2)},$$

소비  $c$ 와 주식에 투자하는 달러 양  $\pi$ 에 대한 FOC를 대입하면,  $M_1, M_2$ 에 대한 다음의 비선형방정식 계를 얻는다:

$$\begin{aligned} & \left( -\beta - \nu - \lambda_1 + r - \frac{\theta_1^2}{2} \right) M_1 - r M_1 \ln M_1 \\ & + \lambda_1 e^{-\gamma(\epsilon_2 - \epsilon_1)} M_2 = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &(-\beta - \nu - \lambda_2 + r - \frac{\theta_2^2}{2})M_2 - rM_2 \ln M_2 \\ &+ \lambda_2 e^{-\gamma(\epsilon_1 - \epsilon_2)} M_1 = 0. \end{aligned}$$

따라서  $M_1, M_2$ 에 대한 위의 대수방정식 계를 수치적으로 풀면 목적 함수  $V_{1(2)}$ 를 구할 수 있다.

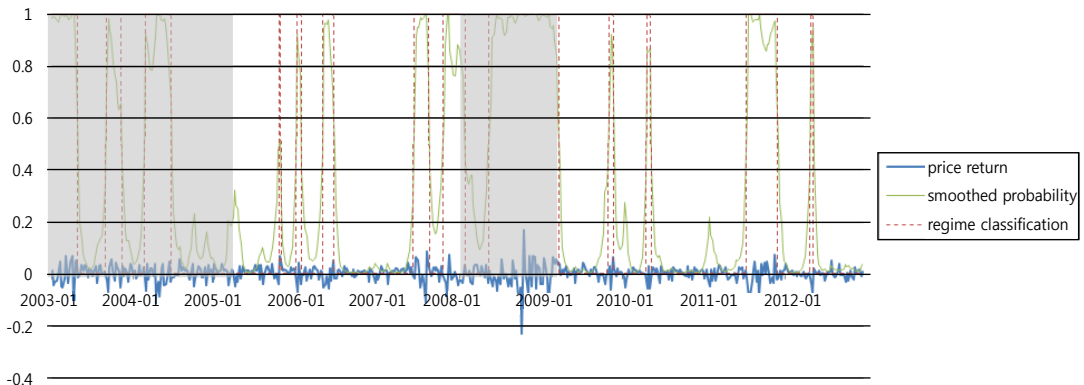
### <부록 2> 베이저안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요 $\xi(p)$ 의 정의

본 연구에서는 현재의 경기가 호황(불황)으로 관측되었을 때 베이저안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요  $\xi_{1(2)}(p)$ 를 다음과 같이 정의하였다:

$$\begin{aligned} \xi_1(p) &= \frac{\mu_1 - r}{\sigma^2 \gamma r} - \pi, \\ \xi_2(p) &= \frac{\mu_2 - r}{\sigma^2 \gamma r} - \pi. \end{aligned}$$

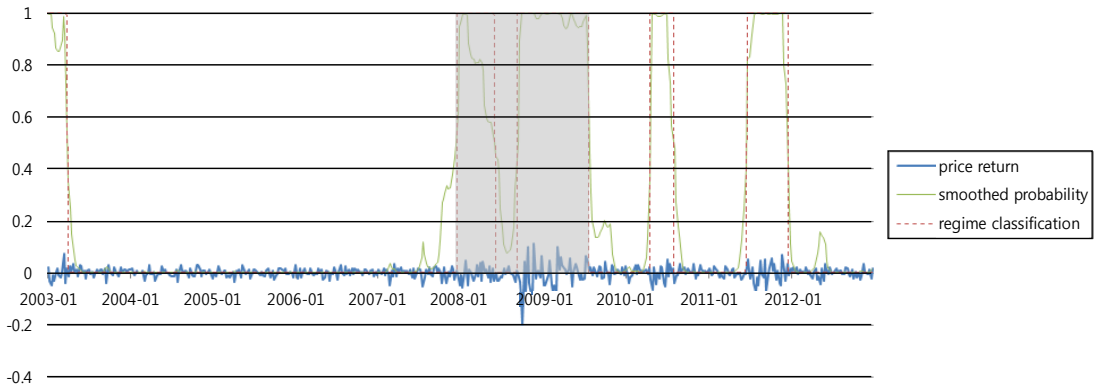
먼저  $\xi_1(p)$ 의  $(\mu_1 - r)/\sigma^2 \gamma r$ 은 현재의 경기가 호황으로 관측되었을 때 경기변동위험만을 고려한 기존의 자산관리모형이 제시하는 주식의 투자량을 의미한다. 이는 <부록 1>에서 목적 함수  $V_{1(2)}$ 의 유도과정에 따라  $V_1$ 과 HJB 미분방정식을 유도할 때 사용되었던 최적투자전략  $\pi$ 에 대한 FOC에 의해 주어진다. 따라서 베이저안 학습 기법에 대한 포트폴리오 헤지 수요  $\xi_1(p)$ 는 관측 불가능한 경기주기를 고려했을 때 기존의 자산관리모형이 제시하는 주식의 투자량보다 얼마만큼의 주식을 더 사야하는지 또는 더 팔아야하는지를 말해준다.  $\xi_2(p)$ 에 대해서도  $\xi_1(p)$ 에서와 유사한 해석이 가능하다.

### <부록 3> 그림



주) 회색 음영은 통계청에서 공표한 한국 기준순환일 중 경기불황기를 나타냄. 경기불황기에 대한 regime classification은 평활화확률이 0.5 초과인 경우(1을 의미)를 의미하며, 경기호황기는 그 밖에 평활화확률이 0.5 이하인 경우(0을 의미)를 의미함.

[그림 1] KOSPI 지수 평활화확률



주) 회색 음영은 NBER에서 공표한 미국 경기주기 중 경기불황기를 나타냄. 경기불황기에 대한 regime classification은 평활화확률이 0.5 초과인 경우를 의미하며, 경기호황기는 그 밖에 평활화확률이 0.5 이하인 경우를 의미함.

[그림 2] S&P500 지수 평활화확률