영재교육연구 제24권 제3호
Journal of Gifted/Talented Education
2014. Vol 24. No 3, pp. 339~358
http://dx.doi.org/10.9722/JGTE.2014.24.3.339

나눗셈의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 분수의 나눗셈에 대한 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구

김 화 수

세한대학교 수학교육과

본 연구에서는 나눗셈의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년 영재아 3명을 대상으로 분수의 나눗셈을 내용으로 하였을 때, 정확한 개념의 인지와 개념의 연결로 스키마와 변형된 스키마를 어떻게 구성을 하는지에 대해 질적 사례연구를 통하여 알아보았다. 즉 나눗셈의 1차적 개념으로 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 분수의 나눗셈에 대한 관계적 이해를 하는지, 그리고 연구대상자들이 스스로 형성한 스키마와 변형된 스키마를 어떻게 이용하여 문제 해결에 접근을 하는지, 또한 연구대상자들의 개념구성과 문제해결력에서의 스키마는 어떻게 변형을 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다. 그 결과 나눗셈의 1차적 개념에 대한 학습이 분수의 나눗셈을 해결하는데 필요한 스키마와 변형된 스키마를 형성하는데 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었고 이 때, 나눗셈의 1차적 개념에 대한 인지로 인해서 만들어지는 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 형성이 분수의 나눗셈에 대한 문제 해결에 무엇보다도 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다.

주제어: 1차적 개념, 변형된 1차적 개념, 스키마, 변형된 스키마

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학을 스스로 구성하기 위해서는 1차적 개념을 알아야 한다. 1차적 개념이란 그 개념[1)]이 가지고 있는 본질적인 의미를 뜻한다. 하지만 1차적 개념에 대한 내용을 찾기는 쉽지 않다. 왜냐하면, 1차적 개념은 몸무게의 참값을 구하는 것과 같아서 참값에 가까운 값을 구할 수는

교신저자: 김화수(hskim@sehan.ac.kr)
*이 논문은 2014년도 세한대학교 교내 연구비 지원을 받아 쓰여진 것임.
1) 특정한 사물, 상징적인 대상들의 공통된 속성을 추상화하여 종합화한 보편적 관념(네이버 지식백과)

있지만 정확한 참 값은 구하기가 어렵기 때문이다. 아직도 몇몇 초등학생들은 자연수의 나눗셈을 할 때, 곱셈(곱셈 구구)을 이용해서 몫을 구한다. 하지만 `왜', 곱셈을 이용해서 몫을 구하는지 그 이유에 대해서는 알지 못한 채 답만 써내려 간다. 자연수의 나눗셈과 분수의 나눗셈은 수의 종류만 다를 뿐 그 본질은 서로 같다. 그러므로 나눗셈에 대한 1차적 개념과 분수의 1차적 개념을 학습자들이 알고 있다면, 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 연결하여 분수의 나눗셈을 스스로가 해결할 수 있는 능력을 가지게 된다.

NCTM(1989)은 수학적 추론이 학교수학의 중심이 되어야 한다고 주장하고 있다. 수학적 추론을 하기 위해서는 1차적 개념이 필요하다. 1차적 개념은 연결이 되어 있지 않은 그 자체의 블록과 같아서 여러 모양으로 여러 가지를 가지고 있으면, 수학적 추론을 통해 블록(1차적 개념)들을 하나하나 스스로가 연결시켜서 자신만의 스키마를 형성하여 문제를 해결할 수 있다. 일반적으로 수 감각은 수와 계산에 대한 기본적인 지식과 기능 이외에 수와 계산을 사용하는 과정에서 필요한 능력, 예를 들어 수학적 맥락에서 유연하고 창의적으로 사용하는 능력(Sowder, 1988; Reys, 1988; Reys, et al., 1999)이 있어야 한다고 하였다.

수학을 관계적으로 이해했을 때, 학습자들은 수학에 대한 흥미를 느끼며 수학을 스스로가 구성을 한다. 실제로 이러한 입장에서 적지 않은 연구자들이 수 감각을 일종의 이해력으로 정의하기도 하였다(Reys, 1988; Resnick, 1989; Markovits & Sowder, 1994; Mclntosh, et al., 1995). 수의 의미 이해는 수의 의미(NCTM, 1989; 2000), 수 사이의 다양한 관계이해(NCTM, 1989), 수의 분해·합성(Sowder, 1992; NCTM, 2000), 수의 순서에 대한 감각(Mclntosh ,et. al., 1995), 수의 다양한 표현(Mclntosh, et. al., 1995; Yang, et. al., 2004) 이해 등을 포함한다. 이해력은 특정개념이나 내용에 대한 지식의 소유뿐 아니라 그 개념이나 내용이 적절하게 사용되는 맥락을 파악하고, 그 개념이나 내용을 특정맥락에서 적절하고 합리적으로 사용하는 능력을 포함한다(Heymann, 2003). 그러므로 학습자가 수학을 관계적으로 이해하기 위해서는 제일 먼저 1차적 개념에 대한 이해와 학습이 이루어져야 한다. 1차적 개념이 학습 되었을 때, 학습자들은 1차적 개념을 서로 연결하여 새로운 스키마를 형성할 수 있을 뿐만 아니라 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양이 다른, 새로운 형태의 1차적 개념인 변형된 1차적 개념을 형성할 수 있다. 변형된 1차적 개념은 다른 1차적 개념이나 다른 변형된 1차적 개념과 연결되어 새로운 형태의 스키마인 변형된 스키마를 형성하여 기존의 스키마보다 더 다양하고 강력한 힘으로 수학의 관계적 이해에 도움을 준다.

이러한 초점을 바탕으로 본 논문에서는 스키마와 변형된 스키마를 구성하기 위해 필요한 1차적 개념에 대한 연구와 이로 인해 형성되는 스키마와 변형된 스키마를 분석하고 이것을 중심으로 수업을 실시할 때, 나타나는 여러 현상, 즉 학생들의 개념형성 과정상의 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전해 나갈 때, 나타나는 현상을 나눗셈과 분수의 나눗셈에 대한 수학적 내용을 중심으로 조사 연구하였다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제가 설정되었다.

1. 연구대상자(영재아)들은 나눗셈의 1차적 개념으로 어떠한 변형된 1차적 개념을 형성하는가?
2. 연구대상자(영재아)들은 나눗셈의 1차적 개념으로 형성한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 이용하여 어떠한 방법으로 분수의 나눗셈에 대한 관계적 이해를 하는가?

3. 용어의 정의

가. 1차적 개념

개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념. 즉, 그 개념이 가지고 있는 본질적인 의미를 뜻한다.

예를 들어, 덧셈의 1차적 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나 병합하는 계산법으로, 더해짐을 당하는 수는 피가수라 하고 더하는 수를 가수라고 하며, 그 결과를 합이라고 한다(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

나. 변형된 1차적 개념

1차적 개념에 대한 본질은 변하지 않으면서, 모양을 다르게 변화시킨 1차적 개념을 뜻한다.

예) 나눗셈의 1차적 개념,

피제수가 제수에 의해서 몇 등분이 되는지 아는 것(등분제).

피제수에 제수가 얼 만큼 포함이 되는지 아는 것(포함제).

나눗셈의 변형된 1차적 개념,

피제수에서 제수를 몇 번 뺄 수 있는지 아는 것.

제수가 몇 번 더해지면 피제수가 되는지 아는 것.

제수에 얼마를 곱하면(더해진 개수만큼) 피제수가 되는지 아는 것.

다. 2차적 개념

1차적 개념들의 연결이나, 1차적 개념과 변형된 1차적 개념의 연결, 그리고 변형된 1차적 개념들의 연결로 형성된 개념을 뜻한다(김화수, pp. 19-20).

라.변형된 스키마

Skemp가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 변형된 1차적 개념을 다른 1차적 개념이나 다른 변형된 1차적 개념과 연결하여 형성한 기존에 나와 있지 않은 새로운 형태의 스키마를 의미한다(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨)(김화수, pp. 20).

예를 들면, 약수는 나눗셈의 변형된 1차적 개념과 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 1차적 개념이 연결되어 만들어진 변형된 스키마이다. 그러므로 피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함되거나, 포함된 개수만큼 피제수에서 제수를 뺏을 때, 피제수의 나머지가 없으면[2)]그때의 제수는

약수가 된다. 그리고 제수를 한 번 또는 여러 번 더하거나, 더한 제수의 개수를 제수에 곱했을 때, 피제수가 나오면 이때의 제수와 곱해진 수(더한 제수의 개수)는 약수가 된다.

II. 이론적 배경

1. Schema

Skemp(1987)는 Piaget가 주장한 학습심리학의 기본적인 아이디어를 수학 학습 심리학의 입장에서 해석하여 수학적 개념의 이해를 위한 학습지도이론 곧 스키마의 형성을 위한 스키마 학습이론을 전개하고 있다. 어떤 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 적용되는지를 알지 못하고 문제해결에 적용하는 상태를 도구적 이해라고 하고 방법과 이유를 아는 상태 특정한 법칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 상태를 관계적 이해라고 한다.

대전을 알기 위해서는 대전의 전체 지리를 알아야한다. 하지만 전체를 다 안다는 것은 불가능하다. 왜냐하면 대전이라는 도시는 고정되어 있지 않고 길도 계속 뚫리고 다리도 놓아지고 건물도 많이 생기면서 자라고 있기 때문이다. 만일 새로운 동네가 형성되면 우리는 거기에서 자신의 인지지도를 확장해야한다. 수학도 마찬가지다. 수학 또한 멈추지 않고 계속 크고 새로운 것들이 발견되고 증명되어진다. 예전에 비해 보는 관점, 설명하는 방법 등이 달라지고 새로운 개념들이 머리속에 들어오게 된다. 우리는 이러한 개념들을 자신이 알고 있던 개념들과 함께 여러 가지 모양으로 구성해서 문제 해결에 도달하게 되는데, 이 개념들의 구성체가 바로 스키마(schema)이다.

라병소(1999)는 수학학습에서의 관계적 이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구에서 다음과 같이 언급하였다.

수학에서 지식을 구성하는 것은, 학습자의 입장에서 보면 아주 적극적인 노력이 필요한 작업이다. 새로운 아이디어를 구성하여 이해하는 것은 기존의 아이디어와 새로운 아이디어 사이에 연결을 만드는 것을 포함한다. 학습자는 학습과정에서 수동적인 역할보다는 능동적인 역할을 하지 않으면 안 된다. 이것이 바로 반영적 사고이다. 또한 학습자의 마음에 존재하고 있는 아이디어들의 네트워크는 기존의 지식을 구성하는 결과이며 새로운 지식이 구성되는 도구이기도하다. 이와 같은 통합된 네트워크는 기존의 스키마에 많이 연결되면 될수록 새로운 아이디어는 더욱 잘 이해될 것이다.

학습이 일어날수록 네트워크는 변하며 재배열된다. 반영적 사고를 통하여 새로운 아이디어는 우리가 알고 있는 것에 적절히 끼워지도록 스키마가 수정되거나 변하게 된다. 이와 같이 아이디어의 네트워크는 개념을 구체화한 것이다. 그러므로 개념이 의미를 가지기 위해서는 지식의 구조라는 아이디어 속에서 의미를 가져야한다(p. 41).

한편, 김응태 등(1993)은 Piaget의 지능이론과 Skemp의 스키마 학습이론을 비교하면서,

2) 6의 약수는 6을 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수이므로 이것을 뺄셈과 연결시키면, 피제수 6에서 제수 1을 6번(6÷1), 제수 2를 3번(6÷2), 제수 3을 2번(6÷3), 제수 6을 한 번(6÷6) 피제수의 나머지가 없이 뺄 수 있다. 그러므로 6의 약수는 1, 2, 3, 6이 된다.

스키마의 개념은 정적인 이미지라기보다는 행동이나 사고의 양식 내지 구조에 가까우므로 Piaget 이론에서의 scheme에 해당된다고 언급하면서 다음과 같이 설명하였다.

scheme이란 인간의 행동이나 사고를 반복 가능하게 하고 일반화 할 수 있게 하는 심적인 구조를 말한다. scheme에는 차를 운전하는 경우처럼 감각-운동적인 것, 수학처럼 인지적인 것, 외과 수술의 경우처럼 양면을 모두 갖고 있는 것이 있다. 새로운 지식을 현존하는 scheme에 합체시키는 것을 동화라고 부르고, 새로운 지식이 현존하는 scheme의 분화과정을 조절이라고 부른다.

우리가 배우는 가장 기본적인 수학적 scheme중의 하나는 자연수 체계이다. 그리고 두 자리 수의 덧셈이 습득되면, 세 자리수, 네 자리수의 덧셈이 습득이 쉬운 것은 동화 기능의 한 예이다. 그러나 정수, 유리수, 특히 무리수에로의 scheme의 조절 과정이 매우 힘들다는 것은 수학의 역사가 말해 주고 있다. 여기서 중요한 것은 학습에 있어서 이전의 scheme이 파기되는 것이 아니고 새로운 scheme의 특별한 경우로서 통합된다고 하는 것이며, 그로 인하여 지식의 통합이 가능해 진다는 것이다. scheme은 결코 완전하게 될 수 없으며 학습을 통하여 확장됨과 동시에, 그 새로운 가능성이 인식됨으로써 자발적인 학습과정을 계속적으로 가능하게 한다(김응태 외, pp. 178-179).

Wagner(1975)는 분수에 대한 일치된 정의는 없지만, 분수개념의 의미를 유리수와 동일한 수, 기호로서의 분수, 순서쌍, 몫, 비, 연산자, 단위분수의 배수인 곱 등 7가지 형태로 나누고 있다. 그러므로 분수에 대한 7가지 형태의 개념의 의미를 바탕으로 여러 가지 스키마를 형성한다면, 새로운 지식에 대한 관계적 이해를 하거나, 새로운 문제를 해결 할 때, 학습자들은 큰 어려움이 없을 뿐 만 아니라 수학에 대한 흥미 또한 가지게 될 것이다. 이와 같이 스키마는 직관적 사고가 아닌 반영적 사고를 하는데 중요한 역할을 하고 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

대전에 있는 D초등학교 3학년 학생 3(남학생 1명, 여학생 2명)명을 대상으로 실시하였다. 실시한 3명은 모두, 전교 석차 10% 안에 포함[3])되고 KAGE 영재학술원에서 지능검사(한국 웩슬러 지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 선발되어 교육을 받는 학생으로 수학적 문제 해결력이 비슷한 성향의 학생들이었다.

2. 연구 방법과 절차

가. 연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에

3) 학년 석차 10%안에 포함되는 학생은 송상헌(1998)이 언급한 것처럼 ‘이미 탁월한 성취를 나타내 보인 재능아는 물론, 아직 탁월한 성취를 보이지는 않았지만 그러한 성취를 보일 잠재적 가능성(영재성)을 가지고 있는 자’이기 때문에 영재아의 대상으로 선택하였다.

대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 개념을 습득하고 스키마와 변형된 스키마를 형성해 가면서 나타나는 수학적 사고 발달과정을 조사하는 것이므로 일반 연구 등에서 구할 수 있는 자료 이상으로 충분한 증거 자료, 예를 들면, 관찰 ,인터뷰, 학습자 노트, 관찰자 노트 등을 사용할 수 있는 디자인의 장점 때문에 사례연구를 택하였다.

본 연구의 사례는 초등학교 6학년에서 지도되는 분수의 나눗셈에 대한 내용을 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년인 세 명의 연구 대상자(영재아)들에게 제공했을 때, 나타나는 현상(변형된 스키마)을 중심으로 기록 원고를 작성하여 분석하였다.

나. 연구 절차

본 연구는 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전을 할 때, 어떠한 수학적 개념 구성과정을 거치고 어떠한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 형성하는지에 대해 알아보기 위해 연구를 하였다. 두 가지 연구 문제를 통해 연구 대상자(영재아)들에게 1차적 개념에 대한 숙지와 1차적 개념들을 연결하여 만들어 낼 수 있는 간단한 2차적 개념의 구성에 대한 내용과 학습 활동지를 경험하게 하여 연구 대상자(영재아)들에 의해서 발견되고 형성된 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 분석과 기존 개념들과의 연결성 그리고 확장 범위에 대하여 심도 깊은 연구를 하였다

본 연구자는 학생들에게 새로운 스키마를 형성 할 수 있도록 다음과 같은 지도 절차에 따라 학습을 전개하였다.

이와 같은 절차에 의해 학습을 수행한 후, 연구자는 연구 대상자(영재아)들과 토의한 내용과 연구 대상자(영재아)들이 형성한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 정리하고, 이를 통하여 연구문제를 해결한 분석 결과를 제시 하였다.

연구 대상자(영재아)들에게 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 형성할 수 있도록 다음과 같은 절차에 따라 학습을 전개하였다.

① 1차적 개념에 대한 설명을 해 주었다.
② 기존에 형성된 1차적 개념의 모델을 보여 주었다.
③ 연구대상자들이 구성한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마에 대해서 토의를 하였다.
④ 토의에 대한 내용을 분석하였다.
⑤ 토의를 통해 발견된 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 정리하였다.
⑥ 학습활동지에 제시한 문제를 해결하게 하였다.
⑦ 해결된 문제를 바탕으로 어떠한 형태의 변형된 스키마가 이루어졌는지에 대한 분석을 하였다.

예) 나눗셈을 예로 들면,

① 나눗셈의 1차적 개념에 대한 설명.
② 나눗셈에 대한 기존의 모델 제시.
③ 연구대상자들이 구성한, 나눗셈의 변형된 1차적 개념에 대해서 토의.
④ 토의된 내용 분석.
⑤ 토의를 통해 발견된 나눗셈의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 정리.
⑥ 학습활동지에 제시한 문제 해결.
⑦ 연구대상자들이 해결한 학습활동지의 내용 분석.

다. 연구 도구

연구 도구의 전체 구성은 사칙연산 각각의 1차적 개념과 스키마, 그리고 분수의 1차적 개념과 스키마에 관한 내용으로 이루어졌다.

연구 도구에 나타난 사칙연산 각각의 1차적 개념과 스키마, 그리고 분수의 1차적 개념과 스키마는 본 연구자의 주관적인 생각을 바탕으로 하고 있으므로 바라보는 시각이나 상황의 차이에 의해서 다시 바뀔 수 있다.

라. 자료 수집 방법

본 연구의 목적인 일차적 개념의 이해와 이로 인해 형성되는 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 여러 가지 모양으로 개발하기 위하여, 연구에 참여한 세 명의 D초등학교 영재아들의 토의 내용(비디오 촬영)과 학습활동지에 쓰여진 내용들을 중심으로 자료를 수집하였다.

마. 분석 방법

1차적 개념에 대한 이해로 형성된 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 구성능력은 사례 연구를 통하여 학생들에게서 나타난 현상 그 자체를 기술한 형식, 그 자체를 취한 상태에서 1) 1차적 개념의 숙지, 2) 위와 같은 내용을 가진, 연구대상자들의 변형된 1차적 개념의 형성, 3) 1차적 개념과 변형된 1차적 개념들의 연결, 변형된 1차적 개념들의 연결로 형성된 변형된 스키마에 대해서 분석을 하였다.

IV. 연구 결과 및 분석

본 연구자는 위의 연구도구를 학습한 연구 대상자(영재아)들이 스스로 형성한 변형된 스키마를 중심으로 다음의 연구 문제에 대한 접근을 하였다.

1. 연구대상자(영재아)들은 나눗셈의 1차적 개념으로 어떠한 변형된 1차적 개념을 형성하는가?

가. 나눗셈에 대한 개념 설명

(포함제) — 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 얼마만큼 포함되어있는가를

나타내는 것(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

(등분제) — 나눔을 당하는 수(피제수)는 나누는 수(제수)에 의해서 몇 등분이 되는가를 나타내는 수(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

$$15(\text{피제수}) \div 3(\text{제수}) = 5(\text{몫})$$

나. 1차적 개념 모델 제시

나눗셈의 1차적 개념 1.

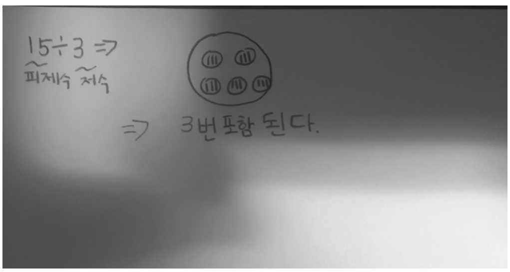
15÷3 ⇒ 15 나누기 3

⇒ 15를 3로 나눈다(15는 3에 의해서 나눔을 당한다).

⇒ 15는 나눔을 당하는 수(피제수), 3은 나누는 수(제수)를 뜻한다.

⇒ 피제수 15에 제수 3이 5번 포함된다.

⇒ 몫은 5가 된다.



[그림 1] 나눗셈의 1차적 개념 1

나눗셈의 1차적 개념 2.

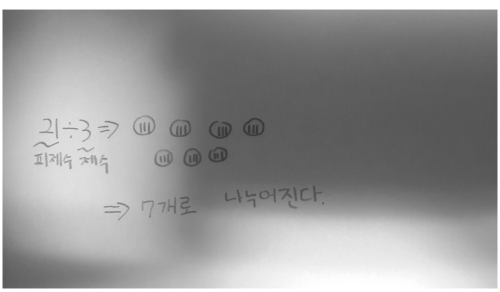
21÷3 ⇒ 21나누기 3

⇒ 21을 3으로 나눈다(21은 3에 의해서 나눔을 당한다).

⇒ 21은 나눔을 당하는 수(피제수), 3은 나누는 수(제수)를 뜻한다.

⇒ 피제수 21은 제수 3에 의해서 7등분이 된다.

⇒ 몫은 7이 된다.



[그림 2] 나눗셈의 1차적 개념 2

다. 학생과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 1】은 나눗셈의 1차적 개념에 대하여 학습한 후, 교사와 연구 대상자(영재아)들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 1】

ⓐ S1: 건기야, 피제수에 제수가 포함된 만큼 뺄 수 있으니까, 뺀 개수도 몫이 되지 않을까?
S2: 어, 나도 그렇게 생각했는데…
S1: 선생님, 나눗셈을 하는 방법을 하나 알아냈어요.
T: 어떤 방법인데?
ⓑ S1: 피제수에 제수가 얼 만큼 포함되는지 아는 것이 나눗셈이잖아요, 그리고 포함된 만큼 다시 뺄 수 있잖아요, 그러니까 뺀 횟수도 몫이 될 것 같아요.
T: 아! 그렇구나! 오늘 선생님이 준우한테 하나 배웠는걸.
S2: 나도 그렇게 생각했었는데…
S3: 나도…
T: 하하하, 그래, 그래 다들 잘했어.
ⓒ S2: 선생님, 저는 더하기로 해볼래요?
T: 더하기로?
ⓓ S2: 네. 준우가 아까 뺀 회수도 몫이 된다고 했잖아요, 그런데 뺀 제수를 하나하나 더하면, 피제수가 되잖아요, 그러니까 제수가 더해진 개수도 몫이 될 것 같아요.
T: 그래, 더하기와 빼기는 서로 반대의 뜻을 가지고 있지만 이렇게 서로 공통되는 점도 있으니까 개념들을 따로 따로 생각하지 말고 항상 같이 놓게 생각해야 돼 알았지?
S1, S2, S3: 네~
S3: 선생님, 애들 얘기 듣다 보니까 맞는지 틀리는지 모르지만, 하나 알아낸 게 있어요.
T: 뭔데?
ⓔ S3: 건기가 얘기 한 것을 써서 계산해보니까 같은 수의 덧셈이 돼서, 그러니까 곱셈으로 바꾸어서 계산 할 수 있을 것 같은데…
ⓕ S1: 아~ 윤서야! 우리 나눗셈을 구구단을 사용해서 하잖아.
S2: 그래서 구구단으로 나눗셈을 했구나.
T: 그럼, 윤서가 아까 써서 계산한 것을 자세하게 얘기해 볼래?
ⓖ S3: 28나누기 7이 있으면요, 7을 네 번 더하면 28이 되니까 몫이 4가 되구요, 7이 네 번 더해진 것을 7×4로 나타낼 수 있잖아요.

라. 토의된 내용 분석

【프로토콜 1】에서는 연구 대상자(영재아)들이 나눗셈의 1차적 개념 안에 나눗셈의 변형된 1차적 개념을 형성해 나갔고(ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ)자신이 습득하고 형성한 변형된 1차적 개념의 개수만큼 문제해결 방법(ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ)도 늘어나면서, 속도도 빨라졌다(문제 해결 속도). 위에서 발견된 변형된 1차적 개념을 정리해 보면, 다음과 같다.

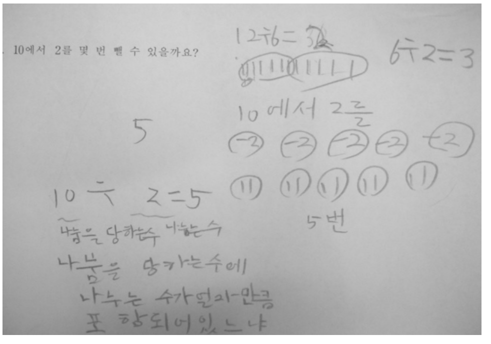
마. 발견된 변형된 1차적 개념 정리

ⓐ, ⓑ의 내용을 바탕으로 한, 나눗셈의 변형된 1차적 개념 1.

① 의 포함제로부터 새로운 사실을 유추해 보면,

예) 10÷2은 피제수 10에 제수 2가 5번 포함되므로 몫은 5가 된다.

피제수 10에 제수 2가 5번 포함된 만큼, 피제수 10에서 제수 2를 5번 뺄 수 있으므로 (10-2-2-2-2-2=0), 몫은 5가 된다. 즉, 피제수에 포함된 제수의 개수만큼, 피제수에서 제수를 뺄 수 있으므로 포함된 개수와 뺀 개수는 몫이 된다.

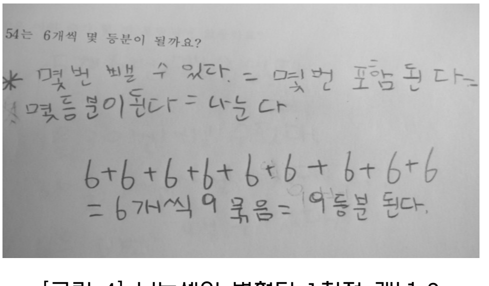


[그림 3] 나눗셈의 변형된 1차적 개념 1

ⓒ, ⓓ의 내용을 바탕으로 한, 나눗셈의 변형된 1차적 개념 2.

위 ①의 포함제와 ②의 등분제로부터 새로운 사실을 유추해 보면,

예) 54÷6은 피제수 54에 제수 6이 9번 포함되고, 피제수 54가 제수 6에 의해서 9등분되므로 몫은 9가 된다. 이 때, [그림 4]와 같이 피제수 54에 제수 6이 포함된 개수(피제수가 등분된 개수) 만큼 제수 6을 더하면 피제수 54가 되므로 제수가 피제수에 포함된 개수(피제수가 등분된 개수)와 제수가 더해진 개수는 일치한다. 즉, 6+6+6+6+6+6+6+6+6=54와 같이 피제수 54에 제수 6이 포함된 개수(54가 6에 의해서 등분된 개수)와 제수6인 더해진 개수가 일치하므로 제수가 더해진 개수 또한 몫이 될 수 있다.

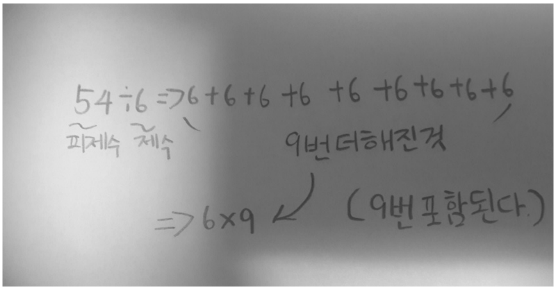


[그림 4] 나눗셈의 변형된 1차적 개념 2

ⓔ, ⓕ, ⓖ의 내용을 바탕으로 한, 나눗셈의 변형된 1차적 개념 3.

위의 나눗셈의 변형된 1차적 개념 2로부터 새로운 사실을 유추해 보면,

6+6+6+6+6+6+6+6+6은 같은 수의 덧셈이므로 곱셈형태로 바꿀 수 있다. 즉, [그림 5]와 같이 6+6+6+6+6+6+6+6+6=6×9=54가 된다. 이때, 피제수 54는 제수 6의 9배이고 9배는 제수가 더해진 개수(포함되고 등분된 개수)를 뜻하므로 곱해진 수 또한 몫이 될 수 있다. 그러므로 나눗셈은 덧셈, 뺄셈, 곱셈 그리고 포함제와 등분제로 몫을 구할 수 있다.



[그림 5] 나눗셈의 변형된 1차적 개념 3.

2. 연구대상자(영재아)들은 나눗셈의 1차적 개념으로 형성한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 이용하여 어떠한 방법으로 분수의 나눗셈에 대한 관계적 이해를 하는가?

가. 학생과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 2】는 나눗셈의 1차적 개념과 나눗셈의 변형된 1차적 개념에 대하여 학습한 후, 교사와 연구 대상자(영재아)들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

T: 그럼, 이번에는 분수의 나눗셈을 해보자!

S1, S2, S3: 네~

T: $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 는 어떤 뜻을 가지고 있을까?

S1: 저요!

T: 그래, 준우~

ⓗ S1: $\frac{2}{3}$ 에 $\frac{4}{5}$ 가 몇 번 포함되어 있는지 아는 것이요~

S2: $\frac{2}{3}$ 가 $\frac{4}{5}$ 씩 몇 개로 나누어지는지 아는 것이요~

T: 건기가 급했나 보구나~ 이름도 부르지 않았는데, 발표하는 것을 보니~ 하하하~

S3: 저요!

T: 그래, 윤서~

ⓘ S3: $\frac{2}{3}$ 에서 $\frac{4}{5}$ 를 몇 번 뺄 수 있는지 아는 것이요~

S1: 저요!

T: 준우~

ⓙ S1: $\frac{4}{5}$ 를 몇 번 더하면 $\frac{2}{3}$ 가 나오는지 아는 것이요~

S3: 저요!

T: 윤서~

ⓚ S3: $\frac{4}{5}$ 에 얼마를 곱하면 $\frac{2}{3}$ 가 나오는지 아는 것이요~

T: 그래, 모두 잘했다. 다들 나눗셈의 개념을 이용했구나?

S1, S2, S3: 네~

T: 그럼, $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 를 계산하려면 뭘 먼저 해야 하지?

S2: 저요!

T: 건기~

S2: 통분이요~

T: 왜지?

ⓛ S2: 포함이 되려면 요, 크기가 같아야 하잖아요~

S1: 저요!

T: 준우~

ⓜ S1: 조각의 개수를 같게 해야 돼요~

S3: 저요!

T: 윤서~

ⓝ S3: 분모를 같게 해야 돼요~ 그러니까, 조각의 크기를 같게 해야 돼요~

T: 그럼 조각의 개수가 몇 개 일 때, 크기가 같아질까?

S1, S2, S3: 15개요~

T: 그래~ 왜 그렇게 나왔는지 안 물어봐도 돼지?

S1, S2, S3: 네~

T: 그럼, $\frac{2}{3}$ 와 $\frac{4}{5}$ 은 어떻게 바뀔까?

S2: 저요!

T: 그래, 건기~

ⓞ S2: $\frac{2}{3}$ 는 $\frac{10}{15}$ 이 되고, $\frac{4}{5}$ 은 $\frac{12}{15}$ 가 돼요~

ⓟS1: 그럼요~ $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 대신에요~ $\frac{10}{15} \div \frac{12}{15}$ 로 하면 더 편할 것 같아요~

T: 음! 좋아~ 그럼 하나 물어볼께, $\frac{10}{15}$ 의 한 조각의 크기는 얼마지?

S3: $\frac{1}{15}$ 이요~

T: 하하하~ 내가 너무 쉬운 걸 물어봤구나~ 그럼 하나 더~ 조각의 크기가 같으니까~

S2: 저요!

T: 어! 선생님이 뭘 물어 보려는지 아니?

S2: 네~ 분자끼리만 나누면 돼요~

T: 하하하~ 그래 맞아! 다른 사람도 무슨 말인지 아니?

S1, S3: 네~

T: 그래? 그럼 윤서가 얘기해 볼래?

ⓠ S1: 분수의 덧셈처럼요~ 크기가 같으니까요~ 분자끼리만 나누면 돼요~

T: 그래 맞았다~ 그래서 분자끼리만 나누면 얼마가 될까?

ⓡ S1: 10나누기 12니까… $\frac{10}{12}$이 돼요~ 제수 분의 피제수~ 그리고 선생님처럼 가분수~ 하하하~

S3: 선생님! 학원에서는 요~ 뒤에 있는 분수를 역수로 바꾸고 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어서 계산을 하는데 왜 그래요?

T: 그거 이미 다 얘기 한 거나 다름없는데~

S3: 네?

T: 지금 너희들이란 한 얘기 속에 다 들어 있는데… 혹시 아는 사람?

S1, S2, S3: 풀어보고 말씀드릴께요.

T: 그래~

S2: 저요!

T: 그래, 건기~ 나와서 칠판에 해 봐라~

ⓢ S2: 분모를 통분하면요~ $\frac{2}{3}$는 $\frac{2\times5}{3\times5}$, $\frac{4}{5}$는 $\frac{4\times3}{5\times3}$이 되구요, 분자끼리 나누면 $(2\times5)\div(4\times3)$이 되고 이것을 분수로 바꾸면, $\frac{2\times5}{4\times3}$가 되는데요~ 분모 4×3은 3×4와 같아서 바꾸면 $\frac{2\times5}{3\times4}$가 돼서, $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$와 같게 돼요.

T: 이제 분수에 대해서는 너희들한테 더 이상 할 말이 없구나~

나. 토의된 내용 분석

【프로토콜 2】에서는 연구 대상자(영재아)들이 나눗셈의 변형된 1차적 개념(ⓗ, ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓡ, ⓢ)을 바탕으로 통분의 변형된 스키마(ⓛ, ⓜ, ⓝ, ⓞ, ⓟ, ⓠ, ⓢ)를 형성하여 분수의 나눗셈에 대한 문제를 해결하였다. 통분의 변형된 스키마를 바탕으로 형성된 분수의 나눗셈에 대한 변형된 스키마를 정리해 보면, 다음과 같다.

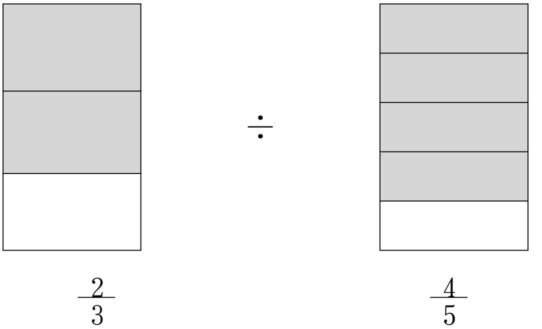
다. 발견된 변형된 스키마 정리

나눗셈의 변형된 1차적 개념(ⓗ, ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓡ, ⓢ)와 통분의 변형된 스키마(ⓛ, ⓜ, ⓝ,

ⓞ, ⓟ, ⓠ, ⓢ)를 바탕으로 한, 분수의 나눗셈에 대한 변형된 스키마

$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 를 알기 위하여 우리는 나눗셈의 개념을 중심으로 생각하게 된다. 나눗셈이란 앞에서 언급한 것처럼 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 얼마만큼 포함되어 있는가를 알아내는 것이다. 즉, $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ 는 피제수 $\frac{2}{3}$ 에 제수 $\frac{4}{5}$ 가 얼마만큼 포함되어 있는가의 의미를 가지고 있다. 그러므로 나눗셈 또한 분수의 덧셈과 마찬가지로 나누어진 조각의 크기가(나누어진 조각의 개수 즉, 분모) 같아야 피제수에 제수가 얼마만큼 포함되어 있는가를 알 수 있다.

그림으로 나타내 보면,

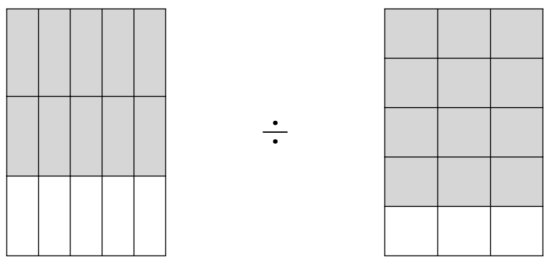


[그림 6] 분수의 크기

나누어진 조각의 크기(나누어진 조각의 개수, 즉 분모)가 달라서 $\frac{2}{3}$ 는 $\frac{4}{5}$ 로 직접 나누기가 힘들다(포함관계를 알기 힘들다). 분모를 통분(분모를 같은 크기 나 양으로 나누는 것)하여 크기(기준, 단위, 양)를 같게 한 후에 나누면 나누기가 쉬워진다(포함관계를 알기 쉬워진다). $\frac{2}{3}$ 에서 전체 나누어진 3조각과 $\frac{4}{5}$ 에서 전체 나누어진 5조각을 같은 크기의 조각이 되도록 다시 자르면, $\frac{2}{3}$ 에서 나누어진 전체 3조각은 자를 때 마다 3, 6, 9, 12, 15, …와 같이 3의 배수 형태로 늘어나고, $\frac{4}{5}$ 에서 나누어진 전체 5조각은 자를 때 마다 5, 10, 15, 20, 25, …와 같이 5의 배수 형태로 늘어난다. 이 때 나누어진 조각의 개수가 같아지는 15 조각은 같은 비율로 나누어진 조각이므로 조각의 크기가 같아져서 통분을 할 수 있다. 그리고 아래 그림과 같이 전체 나누어진 개수가 늘어난 비율만큼 색칠된 부분의 개수도 같은 비율도 늘어난다는 것을 알 수가 있다. 즉, 분모가 늘어난 비율만큼 분자도 같은 비율로 늘어난다는 것을 알 수가 있다. 그러므로 $\frac{2}{3}$ 의 분모 3은 5배로 늘어났기에 분자 또한 5배가

늘어나서 $\frac{2}{3}$ 는 $\frac{10}{15}$ 으로 $\frac{4}{5}$ 의 분모 5는 3배가 늘어났기에 분자 또한 3배가 늘어나서 $\frac{12}{15}$ 가 되어 $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \div \frac{12}{15}$ 로 변형이 된다. 그리고 나누어진 조각의 크기가 같아져서(분모가 같아져서) 계산은 분자끼리 나누기만 하면 된다. 그래서 $\frac{10}{15} \div \frac{12}{15}$ 은 10÷12가 되어 $\frac{10}{12}$ 이 된다.

그림으로 나타내보면,



$\frac{10}{15}$ $\qquad\qquad$ $\frac{12}{15}$

[그림 7] 분수의 나눗셈

나누어진 조각의 모양은 달라도 같은 개수로 나누어졌으므로, 즉 같은 비율로 나누어졌으므로 각각의 조각의 크기는 서로 같다.

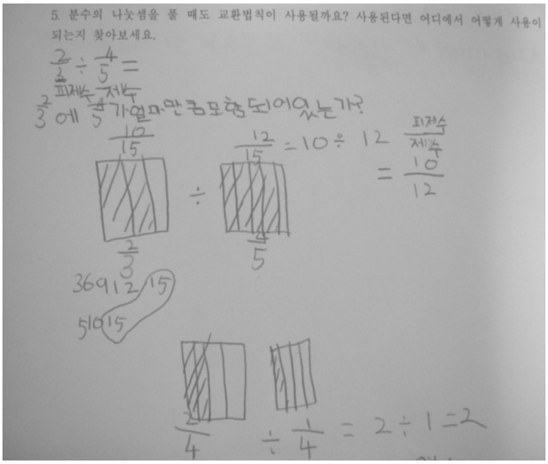
위의 내용들을 수식으로 다시 표현해 보면,

$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2\times5}{3\times5} \div \frac{4\times3}{5\times3}$ 이 되고,

$\frac{2\times5}{3\times5} \div \frac{4\times3}{5\times3} = (2\times5)\div(4\times3) = \frac{2\times5}{4\times3}$ 이 된다.

이 때, $\frac{2\times5}{4\times3}$는 $\frac{2\times5}{3\times4} = \frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$ 로 나타낼 수 있으므로 $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$ 는 나눗셈이 곱셈으로 바뀌고 제수($\frac{4}{5}$)가 역수[4]($\frac{5}{4}$)로 바뀌는 것을 알 수 있다. 그래서 분수의 나눗셈에서 나눗셈은 곱셈으로 바꾸고 피제수에 제수의 역수를 곱하면 답을 구할 수 있는 것이다).

4) 0이 아닌 어떤 수 a에 대하여 1을 그 수로 나눈 수 1/a을 a의 역수라 한다. 즉, 두 수의 곱이 1이 될 때 그 수들은 서로 역수가 된다.



[그림 8] 분수의 나눗셈에 대한 변형된 스키마

V. 결 론

본 연구는 나눗셈의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년 영재아들이 나눗셈의 1차적 개념을 바탕으로 어떠한 형태의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 구성 하는지 그리고 초등학교 6학년에서 배우는 분수의 나눗셈에 대한 학습 내용에 대하여 스스로가 구성한 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 어떻게 문제 해결에 접근을 하는지에 대하여 연구 분석 하였다.

본 연구자는 초등학교에서 다루는 나눗셈과 분수 그리고 분수의 나눗셈에 대해서 1차적 개념을 바탕으로 연구대상자(영재아)들을 가르쳐 왔다. 연구 초반에 연구대상자(영재아)들은 나눗셈과 분수에 대한 개념을 개념 그 자체의 내용이 아닌, 나눗셈과 분수에 대한 문제를 예로 들어가면서 설명하는 것을 볼 수 있었고, 연구대상자(영재아) 스스로도 개념을 설명할 때, 문제를 예로 들어가면서 설명하는 것을 당연하게 생각하고 있었다. 또한 “나눗셈을 어떠한 개념의 구성으로 해결할 수 있을까”?란 질문에 연구대상자(영재아)들은 어리둥절해 하였고, 연구대상자(영재아)들 모두 개념의 구성 과정에 대해서는 아무 대답도 하지 못 하는 것을 볼 수 있었다. 이들은 개념의 본질에 대한 내용과 문제를 해결하는 방법을 동일시 해왔고, 자신의 생각이 담긴 수학보다는 외적인 다른 영향에 의해서 수동적으로 이루어진 수학을 보여주었다. 그러나 1차적 개념을 바탕으로 한 연구가 진행되면서 연구대상자(영재아)들의 수학에 대한 태도가 달라지기 시작하였고, 한 가지 방법만을 외치고 멈추어 버리는 수학이 아닌, 계속해서 자신의 생각을 여러 가지 변형된 스키마의 구성으로 이야기하는 능동적인 수학 시간이 되어 가는 것을 볼 수 있었다. 연구 대상자(영재아)들은 나눗셈의 1차적 개념을 바탕으로 3가지의 변형된 1차적 개념을 형성하였고, 이 나눗셈에 대한 변형된 1차적 개념은 분수

의 나눗셈에 대한 변형된 스키마를 형성하여 분수의 나눗셈에 대한 문제를 해결하는데 중요한 역할을 하였다.

수학은 추상적인 학문이다. '추상'은 몇 개 또는 무한히 많은 사물의 공통성이나 본질을 추출하여 파악하는 사고 작용이다. 그리고 분류된 사물들의 공통적인 속성을 추상화하고 그 다음에 분류된 것들에 이름을 붙인다. 이러한 일련의 과정이 바로 개념(concept)이 형성되는 과정이다. 이러한 과정을 통하여 학습자들이 경험하고 개념을 발견 했을 때, 학습자들은 스스로 구성하고, 스스로 문제를 해결할 수 있는 능력을 가진다.

수학 문제해결은 세계적으로 학교수학의 초점이다.(Yeap et al, 2006: Arcavi & Friedlander, 2007에서 재인용). 문제해결을 위해서는 문제에 대한 정확한 이해가 필요하고, 문제에 대한 정확한 이해가 이루어지기 위해서는 1차적 개념에 대한 학습이 필요하다. 1차적 개념에 대한 학습이 이루어졌을 때, 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 학습자 스스로가 다양하게 구성할 수 있으므로 수학적 문제해결에 도움을 줄 수 있기 때문이다. Van de Walle (2004)에 의하면 분수의 나눗셈에서 제수를 뒤집어서 곱하는 방볍은 초등학생이 학교 수학에서 가장 이해할 수 없는 규칙들 중의 하나이다. 하지만 본 연구의 연구 대상자(영재아)들은 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 바탕으로 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 형성하여 분수의 나눗셈에서 제수를 뒤집어서 곱하는 방볍을 스스로가 찾아내고 설명하는 것을 볼 수 있었다. 그리고 이들은 변형된 1차적 개념이나 변형된 스키마를 형성할 때, 연결 고리가 끊어진 부분을 연구대상자(영재아)들 간의 의사소통을 통하여 자신의 생각과 느낌을 말하고 다른 사람의 의견을 듣고 이해하며, 자신의 생각을 수정하는 과정을 거치면서 끊어진 부분에 대한 연결을 시켰다. 그리고 수학적 문제를 해결할 때, 처음에는 문제의 내용을 파악하면서 언어적 대수로써 문제 해결에 접근해 나갔고, 그런 다음 형성된 변형된 스키마를 식(생략적 대수, 기호적 대수)으로써 표현하며 문제를 해결해 나가는 것을 볼 수 있었다. 위의 연구 결과와 같이 1차적 개념의 학습은 학습자들에게 사고를 하는데 있어서 매우 중요한 역할을 한다. 무엇보다도 다양한 형태의 개념의 구성으로 문제를 창의적으로 해결해 나갈 수 있을 뿐만 아니라, 상위학년의 수학적 내용 또한 스스로 이해할 수 있는 능력을 가진다. 그러므로 교사는 정확한 1차적 개념을 학생들에게 제공해 주어야 하며, 이로 인해 형성된 학생들의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 연구하여 다시 학생들에게 피드백을 주어 수학에 대한 관계적 이해를 할 수 있도록 하는 것이 무엇보다도 중요하다고 하겠다.

참 고 문 헌

고정일외 백과사전 편찬부(2003). **파스칼 세계대백과사전.** 서울: 동서문화사.

김응태, 박한식, 우정호(1993). **수학교육학개론.** 서울대학교 출판부.

김화수(2014). 수학의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 수학적 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구: 분수의 덧셈과 곱셈을 중심으로. **영재교육연구, 24**(1), 17-43.

라병소(1999). **수학 학습에서의 관계적 이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구.** 단국대학교 박사학위 논문.

송상헌(1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구.** 서울대학교 박사학위 논문.

Heymann, H. W. (2003). *Why teach mathematics? : A focus on general education.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Markovits, Z. & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), pp.4–29.

Mclntosh, A., Reys. B. J. & Reys, R. E. (1995). A Proposed framework for examining basic number sense. In P. Murphy, M. Selinger, J. Bourbe, & M. Briggs (Eds.), *Subject learning in the primary curriculum : A Proposed framework for examining basic number sense.* (pp.218-231). New York: The Open University.

NCTM(1989). *Curriculum standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM(2000). P*rinciples and standards for school mathematics.* Reston, VA : The Author.

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. Soeder, & B. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics:Report of a conference* (pp.35-39). San Diego, CA: San Diego State University.

Reys, R. (1988). Computation versus number sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(2), pp.110-112.

Reys, R., Reys, B., Mclntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B. & Yang, D. C.(1999). Assessing number sense a students in Australia, Sweden, Taiwan, and The United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), pp.61-70.

Skemp, R. R.(1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey. 황우형 역(1998). 수학학습심리학. 서울: 민음사.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Number concepts and operations in the middle grades* (pp.182-197). Hillsdale.

Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1–p 51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Van de Walle, J. A. (2004). Elementary and middleschool mathmatics: Teaching developmentally(5th Ed.). Boston: Pearson Education, Inc.

Wagner, H. A.(1975). *An analysis of the fraction concept.* UMI Dissertation Services.

Yang, D., Hsu, C. & Huang, M. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth Yagrade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* pp.407–430.

= Abstract =

A Case Study on the Effects of Primary Concept of Division upon the Concept Composition Process as to Division of Fraction for 3-rd grade Child Prodigies of Elementary Schools

Hwa Soo Kim

Sehan University, Korea

On the subjects of elementary 3-rd grade three child prodigies who learned primary concept of division, this study explored how they could compose schema and transformed schema through recognition of precise concepts and linking with the contents of division of fraction. That is to say, this study examined in depth what schema and transformed schema as primary concept of division they composed to get relational understanding of division of fraction, and how they used the schema and transformed schema composed by themselves to approach problem solving as well as how they transformed the schema in their concept composition and problem solving competence. As a result, it was found that learning of primary concept of division played a key role of composing schema and transformed schema needed for coping with division of fraction, and that at this time, composition of the transformed schema and transformed schema derived from the recognition of primary concept of division could play the inevitable role of problem solving for division of fraction.

Key Words: Primary concepts, Transformed Primary concepts, Schema, Transformed schema

1차 원고접수: 2014년 5월 5일
수정원고접수: 2014년 6월 20일
최종게재결정: 2014년 6월 20일

<부록>

학습내용(1)

나눗셈

1. 나눗셈은 어떠한 의미를 가지고 있을까요?
2. 나눗셈과 덧셈은 어떠한 관계가 있을까요?
3. 나눗셈과 빼셈은 어떠한 관계가 있을까요?
4. 나눗셈과 곱셈은 어떠한 관계가 있을까요?
5. 나눔을 당하는 수와 나누는 수를 각각 무엇이라고 부를까요?
6. 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 포함이 되지 않을 때는 어떻게 해야 할까요?

학습내용(2)

분수

1. 분수란 무엇일까요?
2. 분수는 무엇이 발전이 되어서 만들어 졌을까요?
3. 분수를 계산하기 위해서는 제일 처음 해야 할 일은 무엇일까요?
4. 분수와 자연수는 무엇이 다를 까요?
5. 분수에서 분모는 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?
6. 분수의 덧셈을 할 때, 분모의 수를 같게 만드는 것은 왜일까요
7. 분수에서 분모를 같게 만드는 과정을 무엇이라고 할까요?
8. 분수의 분모를 같게 만든다는 것은 수학적으로 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?

학습내용(3)

분수의 나눗셈

1. $\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} =$ 는 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?
2. $\frac{1}{3} \div \frac{2}{7} =$ 를 그림을 그려 가며 답을 구해 보세요.
3. 자연수의 나눗셈과 분수의 나눗셈의 차이는 무엇일까요?
4. 분수의 나눗셈은 어떤 원리를 이용하면 될까요?
5. 분수의 나눗셈을 해결할 때도 통분을 사용해도 될까요? 사용이 된다면 어디에서 어떻게 사용이 되는지 이야기해 보세요.
6. 분수의 분모 분자의 위치가 바뀌는 것을 무엇이라고 할까요?
7. 원래의 수와 그 수의 역수와의 곱셈은 어떤 결과가 나올까요?