Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2014) 20(7):750-755
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2014.14.0033 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

역주문을 고려한 공정-저장조 망구조의 최적설계

Optimal Design of Process-Inventory Network Considering Backordering Costs

이 경 범*
(Gyeongbeom Yi[1,*])
[1]Department of Chemical Engineering, Pukyong National University

Abstract: Product shortage which causes backordering and/or lost sales cost is very popular in chemical industries, especially in commodity polymer business. This study deals with backordering cost in the supply chain optimization model under the framework of process-inventory network. Classical economic order quantity model with backordering cost suggested optimal time delay and lot size of the final product delivery. Backordering can be compensated by advancing production/transportation of it or purchasing substitute product from third party as well as product delivery delay in supply chain network. Optimal solutions considering all means to recover shortage are more complicated than the classical one. We found three different solutions depending on parametric range and variable bounds. Optimal capacity of production/transportation processes associated with the product in backordering can be different from that when the product is not in backordering. The product shipping cycle time computed in this study was smaller than that optimized by the classical EOQ model.

Keywords: optimal lot size, process-inventory network, backordering cost

I. 서론

본 연구는 공정-저장조 망구조의 토대 아래 공급 사슬망 최적화에 있어서 재고부족 비용문제를 다룬다. 재고부족 현상은 화학산업에서 매우 흔하다. 특히 한 개의 생산라인이 다수의 제품을 생산할 때 제품간 재고량의 불균형으로 인해 일부 제품의 재고부족과 다른 제품의 과다재고는 피할 수 없다. 예를 들어, HDPE, PP, LDPE와 LLDPE 같은 범용 고분자 공장들은 순서 의존적인 제품변환 비용을 줄이기 위하여 제품변환 횟수가 감소되는 방향으로 생산계획을 작성하여야 한다. 반응단계에서 제품변환 횟수를 줄이는 것은 최종 충전단계에서 일부 제품의 과다재고와 다른 제품들의 재고부족 현상을 일으킬 수 있다. 이러한 결과는 과다재고 물량의 재고유지 비용과 재고부족 물량의 역주문 또는 판매유실비용을 동시에 증가시킨다. 재고부족은 공정과 저장조의 용량을 충분히 늘림으로써 해소될 수 있다. 그러나 공정과 저장조의 용량을 늘리는 것은 매우 비용이 많이 든다. 만약 재고부족 비용을 적절히 관리할 수 있다면 수익성이 떨어지는 제품의 재고부족을 용인하는 것이 비용면에서 더 효과적일 수 있다.

화학공학에서 공급 사슬망 최적화에 관한 많은 연구가 재고부족 비용을 고려하고 있다[1]. 화학공학 연구에서 재고부족 비용은 각 고객의 상황을 고려하지 않아서 최근의 고객지향적인 사업환경을 모형화하기엔 부족한 면이 있다. 재고부족 비용은 각 고객의 상황에 따라 매우 달라지고, 따라서 공급 사슬망에 대한 최적해도 달라진다. 운영과학 분야에서는 재고부족 비용을 다루는 두 개의 이론이 있다[2]. 그 중 하나는 역주문 모형인데 재고부족의 경우 고객이 수요를 만족시킬 수 있는 다음 주문의 배달을 기다려 준다는 가정하에 성립되는 모형이다. 다른 경우는 판매유실모형인데 재고부족이 발생할 경우 고객이 주문을 취소한다는 가정하에 성립되는 모형이다. 역주문 비용은 고객선호도의 유실을 고려하고 판매유실 비용은 수요감소를 고려한다. 최근에 만족되지 못한 주문의 일부는 역주문되고 나머지는 유실되는 경우를 다루는 150 여편의 논문을 검토한 회고논문이 발표되었다[3]. 수많은 논문목록 가운데 다단계공정에 대한 역주문 비용을 다루는 논문은 찾아보기 어렵다.

역주문을 포함하는 고전적인 경제적 생산량 모형(EOQ)은 최종제품 배달에 대한 최적의 시간지연과 물량을 제시한다[2]. 재고부족현상은 공급사슬망구조에서 단지 시간지연뿐만 아니라 해당제품의 생산 또는 수송을 앞당기거나 제 3 자로부터 대체제품을 구입함으로써 보상될 수 있다. 이 모든 활동은 비용을 수반하고 적용범위에 제한이 있다. 만약 공급사슬망에서 재고부족을 회복하기 위한 모든 수단을 고려하면, 역주문을 고려한 고적적인 경제적 생산량모형뿐만 아니라 다른 최적해가 있을 수 있다. 우리는 역주문을 포함하는 고전적인 경제적 생산량모형의 유도에 필요한 가정만 사용하여 공정-저장조 망구조의 구도아래 역주문 비용을 포함하는 최적화모형을 개발하고자 한다. 본 연구의 동기는 운영과학분야에서 연구된 재고부족비용에 관한 미묘한 개념과 공정-저장조 망구조 이론을 결합함으로써 고객의 행동양식을 고려한 공급 사슬망 최적화의 새로운 연구기회를 열고자 한다.

본 연구에서, 공급 사슬망의 복잡한 구조는 원료구매, 생산, 수송과 제품수요와 같은 대부분의 공급사슬망 구성요소의 특성을 표현할 수 있는 공정-저장조 망구조로 나타낸다. 망구조에서 생산공정은 모든 저장조와 연결되어 있다. 생산

* Corresponding Author
Manuscript received April 1, 2014 / revised April 10, 2014 / accepted April 24, 2014
이경범: 부경대학교 화학공학과(gbyi@pknu.ac.kr)
※ 이 논문은 부경대학교 자율창의 학술연구비(2014년)에 의하여 연구되었음.

Copyright© ICROS 2014

공정은 주어진 원료조성에 따라 원료저장조로부터 원료를 받아 소모하고, 주어진 제품수율에 따라 제품저장조에 물질을 공급한다. 저장조도 모든 공정에 연결되어 있는데 일부 공정들은 연결된 저장조에 물질을 공급하고 일부 공정들은 연결된 저장조로부터 물질을 받아 소모한다. 한 저장조는 한 가지 물질만 저장한다. 만약 공정과 저장조 사이에 물질의 흐름이 없으면 해당되는 원료조성이나 제품수율이 0 이다. 원료구매나 제품수요는 저장조에 연결된 특별한 공정으로 고려된다. 공정의 상부와 하부의 구분이 없고 다단계 또는 역류흐름은 망구조의 자연스러운 일부분이다. 공정과 저장조 사이의 물질흐름 유형은 주기적인 사각파형으로 표현된다. 사각파 모형은 여러가지 망구조에 적용되어 해석적인 해를 구하는데 성공적으로 사용되었다[4,5]. 공정-저장조 망구조를 설계하는 사각파 모형의 가장 큰 장점은 복잡한 망구조에도 불구하고 해석적인 최적해가 가능하다는 것이다. 간단한 해석적인 해는 다양한 경제상황을 직면하여 초기 공급사슬망 설계에 있어서 적절하고 빠른 의사결정을 가능하게 한다는 점이다. 해석적인 해는 또한 최적성에 관한 좋은 통찰력을 주는데 이는 수치해로는 쉽지 않은 일이다. 예를 들어, 최적 공정용량은 공정 준비비와 평균유속의 제곱근에 비례한다. 재고부족 비용을 고려한 공정-저장조 망구조에 관한 연구는 과거 전혀 다른 방법으로 연구된 적이 있다[6]. [6]에서는 납기지연 비용을 정의하여 이론을 전개하였다. 본 연구에서는 전통적인 역주문 비용의 정의를 그대로 도입하여 이론을 전개하고, 그 차이를 비교하고자 한다.

II. 변수와 매개변수의 정의

그림 1에 나타난 것처럼, 원료물질을 다수의 물리화학적 공정단계를 거쳐 최종제품으로 전환한 다음 고객에게 수송하는 공급사슬망 시스템은 통화 저장조 (*R*, 타원), 물질 저장조 (*J*, 원), 그리고 회분식 생산공정 (*I*, 사각형)으로 구성되어 있다. 생산공정 $i \in I$ 은 원료 저장조 $j \in J$ 로부터 원료를 공급받고 제품을 생산한다. 각 저장조는 한 개의 물질만 저장하므로 저장조 목록 $j \in J$ 는 물질목록도 된다. 각 작업은 다른 원료물질을 사용하고 다른 제품을 생산한다. 생산공정 i 에서 원료 j 의 조성은 f_i^j 이고 생산된 제품 j 의 수율은 g_i^j 이다. 여기서 $\sum_{j=1}^{|J|} f_i^j = \sum_{j=1}^{|J|} g_i^j = 1$ 이다. B_i 과 ω_i 은 생산공정 i 에서 공정용량과 생산시간이다. 각 생산공정은 생산주기 ω_i 와 가동시작시간 t_i 를 가진다. 생산공정 i 에서 평균유속은 $D_i \equiv \frac{B_i}{\omega_i}$ 이다. 생산공정 i 에서 원료주입 시작시간은 t_i 이고, 제품배출 시작시간은 t_i' 이다. 그러면 다음 조건이 성립한다.

$$t_i' = t_i + \Delta t_i \tag{1}$$

여기서 Δt_i 은 생산공정 i 에서 원료주입과 제품배출 시작시간 차이이다. x_i 과 x_i' 는 원료주입과 제품배출을 위한 저장조 운전시간을 생산주기 ω_i 로 나눈 값으로서, 저장조 운전시간 분율 (SOTF)로 불린다. 저장조 j 에 대한 물질수지식은 다음과 같다:

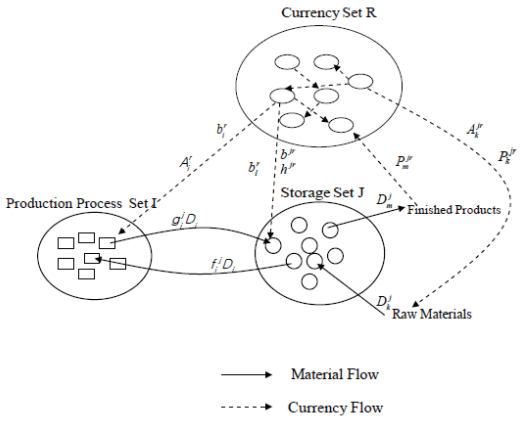

그림 1. 공정-저장조 망구조.
Fig. 1. Structure of Process-Inventory Network.

$$\sum_{i=1}^{|I|} g_i^j D_i + \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j = \sum_{i=1}^{|I|} f_i^j D_i + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \tag{2}$$

여기서 D_k^j 원료공급자 $k \in K(j)$ 로부터 구매한 원료물질 j 의 평균유속이다. D_m^j 는 고객 $m \in M(j)$ 의 제품물질 j 에 대한 평균 수요량이다. 원료를 구매할 때의 물질흐름은 평균유속 D_k^j, 구매주기 ω_k^j, 시작시간 t_k^j 그리고 SOTF x_k^j 로 정의되는데 여기서 구매량은 $B_k^j = D_k^j \omega_k^j$ 이다. 완제품 수요에 대해서도 평균유속 D_m^j, 수요량 B_m^j, 수요주기 ω_m^j, 시작시간 t_m^j 와 SOTF x_m^j 같은 정의가 성립한다. 여기서 $B_m^j = D_m^j \omega_m^j$ 이다. 본 연구에서 $x_m^j = 0$ 으로 단순화한다.

저장조는 원료공급자와 공정으로부터 물질유입과 고객과 공정으로 물질유출 흐름과 연결되어 있다. 사각파 모형에서 물질흐름을 초기부터 현재까지 적분한 결과는 시간간격을 주기로 나눈 정수값에 1 보다 같거나 작은 추가적 항을 더한 다음 공정용량을 곱한 것과 같다. 즉 각 흐름의 적분은 다음 형태를 취한다.

$$PSW(t;D,\omega,t',x) = D\omega\left[\text{int}\left[\frac{t-t'}{\omega}\right] + \min\left\{1,\ \frac{1}{x} res\left[\frac{t-t'}{\omega}\right]\right\}\right] \tag{3}$$

여기서 D 는 평균유속, B 는 공정크기, ω 는 공정주기, t' 는 시작시간, x 는 SOTF, t 는 현재시간, int[z]는 z 와 같거나 작은 가장 큰 정수이고 *res*[z]=z-int[z] 이다. $D = \frac{B}{\omega}$ 의 관계가 성립한다. 저장조 j 에 대한 재고량 $V^j(t)$ 는 초기 재고량에서 현재까지 모든 유입흐름을 더하고 모든 유출흐름을 빼면 계산된다:

$$\begin{aligned} V^j(t) = V^j(0) &+ \sum_{k=1}^{|K(j)|} PSW(t;D_k^j,\omega_k^j,t_k^j,x_k^j) \\ &+ \sum_{i=1}^{|I|} PSW(t;g_i^j D_i,\omega_i,t_i',x_i') \\ &- \sum_{i=1}^{|I|} PSW(t;f_i^j D_i,\omega_i,t_i,x_i) \\ &- \sum_{m=1}^{|M(j)|} PSW(t;D_m^j,\omega_m^j,t_m^j,x_m^j) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $V^j(0)$ 는 초기 재고량이다. $PSW(.)$는 기본적 함수형태 $f(z)=\text{int}[z]+\min\left\{1,\frac{res[z]}{z_1}\right\}$ 를 가지고 있다. 이 함수는 하한값 z, 상한값 $z+1-z_1$ 와 평균값 $z+0.5(1-z_1)$ 를 가지는데, 이는 $f(z)$의 그래프로부터 명확하다. [7]의 표 1은 PSW 함수의 상한값, 하한값과 평균값을 보여 주는데, 재고량의 상한값, 하한값과 평균값은 이 관계식들을 이용하여 계산된다. 재고량의 상항값은 저장조 건설비용을 계산하는데 사용된다. 저장조의 하한값은 최적화 제약식에 사용된다. 평균 재고량은 재고유지비용을 계산하는데 사용된다. 재고량의 상한값 $\overline{\overline{V^j}}$ 와 하한값 $\underline{\underline{V^j}}$ 는 각각 다음과 같다:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{V^j}} &= V^j(0)+\sum_{k=1}^{|K(j)|}(1-x_k^j)D_k^j\omega_k^j-\sum_{k=1}^{|K(j)|}D_k^jt_k^j+\sum_{m=1}^{|M(j)|}D_m^jt_m^j\\ &+\sum_{i=1}^{|I|}(1-x_i')g_i^jD_i\omega_i-\sum_{i=1}^{|I|}g_i^jD_it_i'+\sum_{i=1}^{|I|}f_i^jD_i\gamma_i\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{V^j}} &= V^j(0)-\sum_{k=1}^{|K(j)|}D_k^jt_k^j-\sum_{i=1}^{|I|}g_i^jD_it_i'+\sum_{i=1}^{|I|}f_i^jD_i\gamma_i\\ &-\sum_{i=1}^{|I|}(1-\gamma_i)f_i^jD_i\omega_i-\sum_{m=1}^{|M(j)|}(1-x_m^k)D_m^j\omega_m^j+\sum_{m=1}^{|M(j)|}D_m^jt_m^j\end{aligned} \tag{6}$$

재고량의 평균값 $\overline{V^j}$ 은:

$$\begin{aligned}\overline{V^j} &= V^j(0)+\sum_{k=1}^{|K(j)|}\frac{(1-x_k^j)}{2}D_k^j\omega_k^j-\sum_{k=1}^{|K(j)|}D_k^jt_k^j\\ &+\sum_{i=1}^{|I|}\frac{(1-x_i')}{2}g_i^jD_i\omega_i-\sum_{i=1}^{|I|}g_i^jD_it_i'-\sum_{i=1}^{|I|}\frac{(1-\gamma_i)}{2}f_i^jD_i\omega_i\\ &+\sum_{i=1}^{|I|}f_i^jD_i\gamma_i-\sum_{m=1}^{|M(j)|}\frac{(1-x_m^j)}{2}D_m^j\omega_m^j+\sum_{m=1}^{|M(j)|}D_m^jt_m^j\end{aligned} \tag{7}$$

비용은 통화 $r\in R$ 로 지불된다. 통화 r 로 지불되는 원료물질 j 의 구매 준비비는 A_k^{jr} (통화/주문), 통화 r 로 지불되는 생산공정 i 의 준비비는 A_i^r (통화/회), 그리고 통화 r 로 지불되는 수송공정 l 의 준비비는 A_l^r (통화/회) 이다. 모든 물질흐름은 부피단위로 계산된다. 통화 r 로 지불되는 물질 저장조 j 의 재고유지 비용 (통화/L/년) 은 운전비용 (h^{jr})과 기회비용 (γ^{jr})으로 구분된다. 재고유지 운전비용은 실제 통화흐름을 수반하지만 기회비용은 그렇지 않다. 재고유지 운전비용은 최적화의 목적함수와 제약식에 모두 사용되는 반면에 기회비용은 목적함수에만 사용된다. 최적화 문제에 대한 해석적인 해를 얻기 위해 자본비용은 공정용량에 비례한다고 가정한다. a_k^{jr} (통화/L/년) 는 통화 r 로 지불되는 원료물질 j 를 구매하는 공정에 대한 단위 용량당 자본투자 비용이고, a_i^r (통화/L/년) 는 통화 r 로 지불되는 생산공정 i 에 대한 단위 용량당 자본투자 비용이고, b^{jr} (통화/L/년) 는 통화 r 로 지불되는 물질 저장조 j 에 대한 단위용량당 자본투자 비용이다. 원료물질의 구매비용은 물량에 비례하며, 공급자 k 로부터 구매되며, 통화 r 로 지불되는 원료 j 에 대한 구매비용은 P_k^{jr} (통화/L) 이다. 고객 m 에게 판매되며, 통화 r 로 지불받는 제품 j 에 대한 판매가격은 P_m^{jr} (통화/L) 이다. 초기 물질재고를 준비하는데 드는 비용은 β^{jr} (통화/L/년) 이다. E_Σ^r (통화/년) 세후이익의 평균 유속이고, E_T^r (통화/년) 은 법인세의 평균유속이다. 여기서 $\left(E_T^r\right)=\xi^r\left(E_\Sigma^r+E_T^r\right)$ 이다. 통화유입과 유출의 평균유속은 다음 식을 만족한다:

$$\begin{aligned}E_\Sigma^r+E_T^r &= \sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}P_m^{jr}D_m^j-\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m\in\{D_m^j\}^+}^{|M(j)|}\frac{A_m^{jr}}{\omega_m^j}\\ &-\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}b_m^{jr}D_m^j\omega_m^j-\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{k=1}^{|K(j)|}P_k^{jr}D_k^j-\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{k\in\{D_k^j\}^+}^{|K(j)|}\frac{A_k^{jr}}{\omega_k^j}\\ &-\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{k=1}^{|K(j)|}b_k^{jr}D_k^j\omega_k^j-\sum_{i\in\{D_i^{[r1]}\}^+}^{|I|}\frac{A_i^r}{\omega_i}-\sum_{i=1}^{|I|}b_i^rD_i\omega_i\\ &-\sum_{j=1}^{|J|}h^{jr}\overline{V^j}-\sum_{j=1}^{|J|}b^{jr}\overline{\overline{V^j}}-\sum_{j=1}^{|J|}\beta^{jr}V^j(0)\end{aligned} \tag{8}$$

III. 역주문 비용 모형

본 연구는 역주문을 포함하는 고전적인 경제적 생산량 모형의 가정을 따른다[2]. 원래 고객의 수요는 평균유속 D_m^j 이고, $\underline{\underline{t_m^j}}$ 에서 시작하는 연속함수 ($x_m^j=1$) 이다. 그러나, 제품출하 유형은 ω_m^j 인 회분식으로서 순간적으로 출하 된다 ($x_m^j=0$). ($0<x_m^j<1$ 인 경우는 이론적인 어려움은 없지만 매우 복잡한 산술과정을 통해 유도된다.) 고객의 수요유형과 고객에 대한 제품출하 유형이 다르기 때문에 그림 2에서 나타난 것처럼 주기적인 재고부족과 과다공급 현상을 피할 수 없다. 여기서 재고부족은 제품출하량이 수요량보다 작은 경우이고, 과다공급은 반대이다. 재고부족과 과다공급 둘 다 고객의 선의의 유실 (LCGW)을 초래한다. 여기서, 두 개의 가상적인 비용, 과다공급 재고유지비 H_m^{jr} (통화/L/년)와 재고부족 비용이 발생한다. 과다공급 재고유지비는 보통의 재고유지비 h^{jr} 나 γ^{jr} 와는 다르다. 재고부족 비용은 역주문 재고량에 비례하는 역주문 비용 β_m^{jr} (통화/L/년) 만 고려한다.

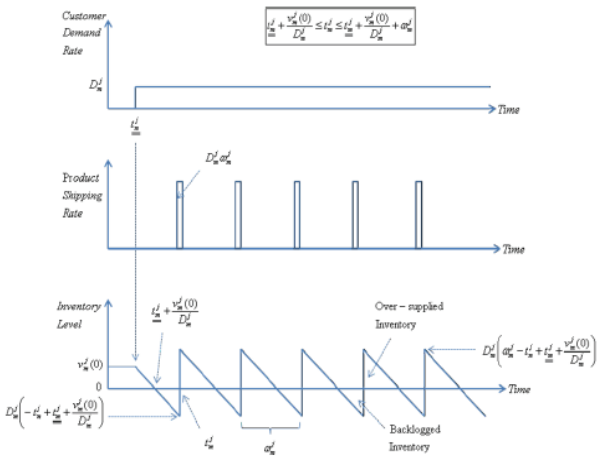

그림 2. 역주문의 개념.

Fig. 2. Concept of Backordering Cost.

초기 재고량 $V^j(0)$ 를 추가적인 비용을 들여 증가시키면 재고부족을 줄일 수 있다. 초기 재고량 중 고객 m 에 제공되는 분량을 $v_m^j(0)$ 라 둔다. 즉, $V^j(0)=\sum_{m=1}^{|M(j)|} v_m^j(0)$ 이다. 그림 2와 3에 보여진 것처럼 출하 시작시간 t_m^j 의 범위에 따라 고려해야 할 3가지 재고유형이 있다. 그림 3처럼, $\underline{\underline{t}}_m^j \le t_m^j \le \underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}$ 인 경우 과다공급 재고만 있고 과다공급 재고유지 비용은 다음과 같다.

$$LCGW(t_m^j,\omega_m^j,v_m^j(0)) = \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}\chi^{r1}H_m^{jr}D_m^j\left(0.5\omega_m^j - t_m^j + \underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}\right) \tag{9}$$

$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} < t_m^j \le \underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j}{D_m^j} + \omega_m^j$ 인 경우, 그림 2처럼, 과다공급 재고와 역주문 재고가 동시에 존재한다. 과다공급 재고비용과 역주문 재고비용의 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &LCGW(t_m^j,\omega_m^j,v_m^j(0)) \\ &= \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}\frac{\chi^{r1}H_m^{jr}D_m^j\left(t_m^j - \underline{\underline{t}}_m^j - \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} - \omega_m^j\right)^2}{2\omega_m^j} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}\frac{\chi^{r1}\beta_m^{jr}D_m^j\left(t_m^j - \underline{\underline{t}}_m^j - \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}\right)^2}{2\omega_m^j} \end{aligned} \tag{10}$$

(10)의 항들은 [2]와 같은 방법으로 유도되었다. 그림 3에서 $\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + \omega_m^j < t_m^j$ 인 경우 역주문 재고만 존재하고 역주문 재고비용은 다음과 같다.

$$LCGW(t_m^j,\omega_m^j,v_m^j(0)) = \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}D_m^j\left(t_m^j - \underline{\underline{t}}_m^j - \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} - 0.5\omega_m^j\right) \tag{11}$$

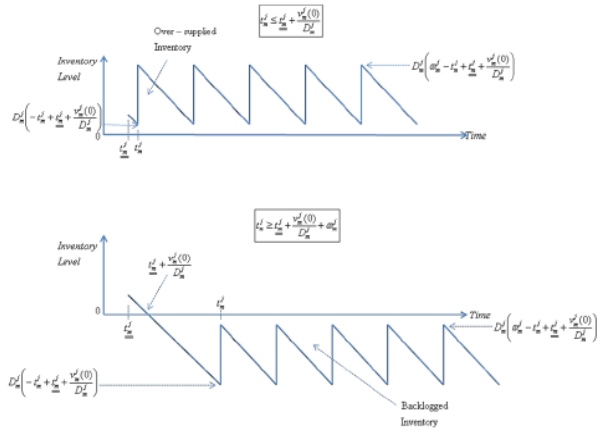

그림 3. 역주문의 2개의 다른 경우.

Fig. 3. Two Other Cases of Backordering Cost.

최소화하는 최적화의 목적함수는 기준통화 ($r=1$)로 계산된 통화/물질 재고량의 기회비용 빼기 세후이익 더하기 LCGW 이다.

$$TC = \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\chi^{r1}\gamma^{jr}\overline{V^j} - \chi^{r1}E_\Sigma^r + LCGW(t_m^j,\omega_m^j,v_m^j(0)) \tag{12}$$

(12)을 (8)과 함께 다시 계산하면

$$\begin{aligned} TC = &\sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{k=1}^{|K(j)|}\chi^{r1} \\ &\left[(1-\xi^r)\frac{A_k^{jr}}{\omega_k^j} + (1-\xi^r)b_k^{jr}D_k^j\omega_k^j + (1-\xi^r)P_k^{jr}D_k^j\right] \\ &+\sum_{r=1}^{|R|}\sum_{i=1}^{|I|}\chi^{r1}\left[(1-\xi^r)\frac{A_i^r}{\omega_i} + (1-\xi^r)b_i^rD_i\omega_i\right] \\ &+\sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}\chi^{r1} \\ &\left[(1-\xi^r)\frac{A_m^{jr}}{\omega_m^j} + (1-\xi^r)b_m^{jr}D_m^j\omega_m^j - (1-\xi^r)P_m^{jr}D_m^j\right] \\ &+\sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\chi^{r1}\left[\left((1-\xi^r)h^{jr}+\gamma^{jr}\right)\overline{V^j} + (1-\xi^r)b^{jr}\overline{\overline{V^j}}\right] \\ &+\sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\chi^{r1}(1-\xi^r)\beta^{jr}V^j(0) + LCGW(t_m^j,\omega_m^j,v_m^j(0)) \end{aligned} \tag{13}$$

최적화의 제약식은 $\underline{\underline{V^j}} \ge 0$, $V^j(0) \ge 0$, $t_k^j \ge \underline{\underline{t}}_k^j$, $\underline{\underline{\tau}}_i \le \tau_i \le \overline{\overline{\tau}}_i$ 와 $\underline{\underline{\tau}}_i \le \tau_i \le \overline{\overline{\tau}}_i$, 그리고 t_m^j 에 대한 제한이다. 독립변수는 공정주기 (ω_k^j, ω_i 와 ω_m^j), 시작시간 (t_k^j, τ_i 와 t_m^j) 그리고 초기재고량 $v_m^j(0)$ 이다. (1) 에 의해 시작시간 t_i' 는 τ_i 으로 바뀐다. 주목할 점은 이전연구에서 ω_m^j 와 t_m^j 는 주어진 상수였지만 여기서는 변수라는 것이다. 최적화의 Kuhn-Tucker 조건에 대한 해는 다음과 같다.

$${}^*\omega_k^j = \sqrt{\frac{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(1-\xi^r\right)A_k^{jr}\right)}{D_k^j\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\Psi_k^{jr}\right)}} \tag{14}$$

여기서

$$\Psi_k^{jr} = \left(1-\xi^r\right)b_k^{jr} + \left[\frac{\eta^r P_k^{jr}}{2} + \theta^{jr}\right](1-x_k^j) \tag{15}$$

여기서

$$\theta^{jr} \equiv \frac{\left(1-\xi^r\right)h^{jr}+\gamma^{jr}}{2} + \left(1-\xi^r\right)b^{jr} \tag{16}$$

$${}^*\omega_i = \sqrt{\frac{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(1-\xi^r\right)A_i^r\right)}{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\Psi_i^rD_i\right)}} \tag{17}$$

$$\Psi_i^r = \left(1-\xi^r\right)b_i^r + \left(1-x_i^r\right)\sum_{j=1}^{|J|}\theta^{jr} f_i^j + \left(1-x_i^r\right)\sum_{j=1}^{|J|}\theta^{jr} g_i^j \quad (18)$$

여기서 $\Omega(j)$ 는 표 1에 정의되어 있다.

표 1. 역주문의 최적해.

Table 1. Solution 1~11 for Backordering Cases.

No.	Parameter Restriction	$V^j(0)$	Process Startup Times	$\Omega(j)$
1		0	$t_k^j > \underline{\underline{t}}_k^j$ $\underline{\underline{t}}_i < t_i < \bar{\bar{t}}_i$ $\underline{\underline{t}}_i < t_i < \bar{\bar{t}}_i$	0
2		$V^j(0) > 0$	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}$
3		0	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$\Omega(j) < 0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}$
4		0	$t_k^j > \underline{\underline{t}}_k^j$ $\underline{\underline{t}}_i < t_i < \bar{\bar{t}}_i$ $\underline{\underline{t}}_i < t_i < \bar{\bar{t}}_i$	0
5	$0.5(1-\xi^r)\beta^{jr} \le \beta_m^j$	$V^j(0) > 0$	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}$
6	$0.5(1-\xi^r)\beta^{jr} \ge \beta_m^j$	$V^j(0) > 0$	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}$
7		0	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\Omega(j) < \min\left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}, \sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}\right\}$
8		0	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5(1-\xi^r)\beta^{jr} > \sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\Omega(j) \ge \sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}$
9		0	$t_k^j > \underline{\underline{t}}_k^j$ $\underline{\underline{t}}_i < t_i < \bar{\bar{t}}_i$ $\underline{\underline{t}}_i < t_i < \bar{\bar{t}}_i$	0
10	$0.5(1-\xi^r)\beta^{jr} \ge \beta_m^{jr}$	0	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	β_m^{jr}
11		0	$t_k^j = \underline{\underline{t}}_k^j$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$ $\bar{\bar{t}}_i = \bar{\bar{t}}_i$ or $\bar{\bar{t}}_i = \underline{\underline{t}}_i$	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\Omega(j) < \min\left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}, \sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}\right\}$

$$^*\omega_m^j = \sqrt{\frac{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(1-\xi^r\right)A_m^{jr}\right)}{D_m^j\Psi_m^j}} \quad (19)$$

$$\Psi_m^j = \sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\left[\theta^{jr} + (1-\xi^r)b_m^{jr} + 0.5\eta^r P_m^{jr}\right] + \Delta\Psi_m^j \quad (20)$$

여기서 $\Delta\Psi_m^j$ 는 표 2에 정의되어 있다.

$$\underline{\underline{V}}^j = 0 \quad (21)$$

최적화된 목적함수 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ^*TC(D_k^j, D_i) = {} & 2\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{k=1}^{|K(j)|}\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}(1-\xi^r)A_k^{jr}\right)\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\Psi_k^{jr}\right)D_k^j} \\ & + \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{k=1}^{|K(j)|}\chi^{r1}(1-\xi^r)P_k^{jr}D_k^j \\ & - \sum_{r=1}^{|R|}\sum_{j=1}^{|J|}\chi^{r1}\Omega(j)\left[\sum_{m=1}^{|M(j)|}D_m^j\underline{\underline{t}}_m^j - \sum_{k=1}^{|K(j)|}D_k^j\underline{\underline{t}}_k^j \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{|I|}f_i^j D_i\bar{\bar{t}}_i - \sum_{i=1}^{|I|}g_i^j D_i\underline{\underline{t}}_i\right] \end{aligned} \quad (22)$$

표 1과 2는 매개변수의 범위에 따른 해들을 요약했다. $\underline{\underline{t}}_m^j \le t_m^j \le \underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}$ 에 대해 해 1 ~ 3이 있다. $\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} < t_m^j \le \underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + \omega_m^j$ 에 대해 해 4 ~ 8이 있다. $\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + \omega_m^j < t_m^j$ 에 대해 해 9 ~11이 있다. 여기서 $\breve{m} = \arg\min_m\{\alpha_m^j \text{ or } \beta_m^j\}$ 이다.

표 2. 역주문의 최적해 추가사항.

Table 2. Solution 1~11 for Backordering Cases Extended.

No.	$\Delta\Psi_m^j$	t_m^j
1	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5H_m^{jr}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}$
2	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left[0.5H_m^{jr} + 0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}\right]$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}$
3	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left[0.5H_m^{jr} + \Omega(j)\right]$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j}$
4	$\frac{0.5\left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}H_m^{jr}\right\}}{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr} + H_m^{jr}\right)}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + \frac{\left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}H_m^{jr}\right\}}{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr} + H_m^{jr}\right)}(^*\omega_m^j)$
5	$\frac{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}(1-\xi^r)\beta^{jr}\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr} + \sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}H_m^{jr}\sum_{i=1}^{n}\chi^{r1}\beta_m^{jr} - \left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}\right\}^2}{2\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr} + H_m^{jr}\right)}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + \frac{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}(0.5(1-\xi^r)\beta^{jr} + H_m^{jr})}{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr} + H_m^{jr}\right)}(^*\omega_m^j)$
6	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5\beta_m^{jr}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + (^*\omega_m^j)$
7	$\frac{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\Omega(j)\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr} + 0.5\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}H_m^{jr}\sum_{i=1}^{n}\chi^{r1}\beta_m^{jr} - 0.5\left\{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\Omega(j)\right\}^2}{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr} + H_m^{jr}\right)}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + \frac{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}(\Omega(j) + H_m^{jr})}{\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr} + H_m^{jr}\right)}(^*\omega_m^j)$
8	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5\beta_m^{jr}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + (^*\omega_m^j)$
9	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5\beta_m^{jr}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + (^*\omega_m^j)$
10	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5\beta_m^{jr}$	$t_{\breve{m}m} = \underline{\underline{t}}_{\breve{m}m}^j + \frac{v_{\breve{m}m}^j(0)}{D_{\breve{m}m}^j} + (^*\omega_{\breve{m}m}^j)$ $t_m^j > \underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + (^*\omega_m^j)$
11	$\sum_{i=1}^{|R|}\chi^{r1}0.5\beta_m^{jr}$	$\underline{\underline{t}}_m^j + \frac{v_m^j(0)}{D_m^j} + (^*\omega_m^j)$

역주문 비용에 대해 11개의 해를 구했지만 해 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9와 11은 무의미하다. $\beta_m^{jr} >> H_m^{jr}$ 이면, 해 4는 해 1이 되고, 해 5는 해 2가 되고 해 7은 해 3이 된다. $H_m^{jr} >> \beta_m^{jr}$ 이면, 해 4는 해 9가 되고 해 7은 해 11이 된다. 해 10은 해 6보다 더 최적이다. $0.5(1-\xi^r)\beta^{jr} = \beta_m^{jr}$ 이면, $V^j(0) > 0$ 이 해 10에서 가능하다. $\underline{\underline{V^j}} = 0$ 은 변수의 남은 자유도를 결정한다. 해 3, 7, 8과 11에서 $\Omega(j)$ 는 $\underline{\underline{V^j}} = 0$ 에 의해 결정되는데 비선형의 암시적 식이다. 최적화의 목적함수 (22)는 $\Omega(j)$ 에 대해서 제곱근과 선형항들로 구성되어 있으므로 오목함수이다. 그러면 전범위 최적점은 $\Omega(j)$ 의 경계에 존재하게 되는데, $\Omega(j)$ =0, $0.5(1-\xi^r)\beta^{jr}$ 또는 β_m^{jr} 가 되고, 이들은 각각 해 4, 5와 10이 된다. 즉 최종적으로 유의미한 해는 3개이다. 역주문을 포함하는 고전적인 경제적 생산량 모형의 최적해[2]를 본 논문의 부호로 표현하면 다음과 같다.

$$\Psi_m^j = \frac{0.5\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}\right)\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}H_m^{jr}\right)}{\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr}+H_m^{jr}\right)} \tag{23}$$

해 4는 (23)과 일치하고 따라서 고전적인 경제적 생산량 모형이 된다. 여기서 많은 유의점이 발생한다. 해 4에 의해 계산된 공정용량은 (20)에 있는 추가적인 항 때문에 (23)보다 작다. 해 4는 생산/수송 공정 주기와 망을 통하는 평균유속에 영향을 미치지 않지만 해 5와 10은 미친다. (19)에서 $\Omega(j)$ 를 포함하는 추가적인 항이 이에 해당한다. 만약 재고부족이 발생한 물질과 관련된 구매/생산/수송 공정의 시작시간이 제한을 받으면 역주문을 포함하는 고전적인 경제적 생산량 모형과 다른 최적해인 해 5와 10이 발생한다. 이들은 재고부족이 발생한 물질과 관련된 생산/수송 공정들의 가동주기와 망을 통하는 평균유속들을 변경한다. 해 10은 고객 각각의 역주문 비용이 전체 망구조에 영향을 미치며, 따라서 역주문 비용은 고객별로 측정되어야 함을 나타낸다. 해 4가 선택되면 총 재고부족 비용은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}{}^{*}LCGW(t_m^j,\omega_m^j,v_m^j(0)) =$$
$$0.5\sum_{j=1}^{|J|}\sum_{m=1}^{|M(j)|}\chi^{r1}\frac{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}H_m^{jr}\right)\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\beta_m^{jr}\right)}{\left(\sum_{r=1}^{|R|}\chi^{r1}\left(\beta_m^{jr}+H_m^{jr}\right)\right)}D_m^j\left({}^{*}\omega_m^j\right) \tag{24}$$

만약 역주문 비용이 과다공급 재고유지 비용보다 매우 크면 (24)은 0.5(제품 갯수)(고객 수)(재고 유지비)(일회 출하량)으로 근사할 수 있다.

IV. 결론

본 연구는 역주문에 관한 개념을 공정-저장조 망구조 최적설계 이론과 무리없이 융합하였다. 이전의 공정-저장조 망구조 설계이론에서는 고객수요와 제품출하 흐름은 알려진 매개변수 값을 갖는 같은 회분식 유형이었다. 본 연구에서는 역주문을 고려한 고전적인 경제적 생산량 모형의 가정을 따라 고객수요는 연속이지만 제품출하는 회분식 흐름을 가진다. 제품출하 흐름의 운전주기와 시작시간은 비용을 최소화시키는 변수이다. 두 흐름의 불일치는 반복되는 제품의 재고부족과 과다공급을 유발하고 재고부족과 과다공급은 각기 다른 비율의 비용을 발생한다. 이러한 추가적인 비용을 고려한 최적화 모형은 제품출하 흐름의 시작시간과 운전주기에 대한 최적값을 준다. 공정-저장조 망구조에 대한 본 연구의 결과는 특수한 경우 고전적인 경제적 생산량 모형의 결과에 수렴하고 망의 상태에 따라 많은 다른 해를 제공한다. 본 연구에서 계산된 제품출하 주기는 고전적인 경제적 생산량 모형에 비해 작다. 초기 재고량과 구매/생산/수송 공정의 가동주기/시작시간은 재고부족 비용을 고려한 최적해와 망을 통하는 평균유속에 상호적으로 영향을 미친다. 최적의 공급사슬망 구조는 고객 개개인의 재고부족 비용에 강하게 영향을 받으므로 재고부족 비용은 고객 개인별로 계산되어야 한다.

REFERENCES

[1] G. M. Kopanos, L. Puigjaner, and C. T. Maravelias, "Production planning and scheduling of parallel continuous processes with product families," *I&EC Res*. vol. 50, pp. 1369-1378, 2011.

[2] A. C. Hax and D. Candea, *Production and Inventory Management*, New Jersey, Prentice-Hall Inc, 1984.

[3] D. W. Pentico and M. J. Drake, "A survey of deterministic models for the EOQ and EPQ with partial backordering," *European Journal of Operational Research*, vol. 214, pp. 179-198, 2011.

[4] G. Yi, "Optimal design of a process-inventory network under infrequent shutdowns," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 19, no. 6, pp. 563-568, 2013.

[5] K. Suh and G. Yi, "Optimal design of process-inventory network under cycle time and batch quantity uncertainties," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 3, pp. 305-312, 2010.

[6] K. Suh and G. Yi, "Optimal design of process-inventory network considering late delivery costs," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 5, pp. 476-480, 2010.

[7] G. Yi and G. V. Reklaitis, "Optimal design of batch-storage network considering exchange rates and taxes," *AIChE J*., vol. 53, no. 5, pp. 1211-1231, 2007.

이 경 범

1983년 서울대학교 화학공학과 학사. 1985년 KAIST 화학공학과 석사학위. 1992년 PURDUE 대학 화학공학과 박사학위. 1985년~1988년 쌍용정유에서 공정기사. 1992년~1996년 호남정유 기술연구소 연구원. 1996년~현재 부경대학교 화학공학과 교수. 관심분야는 화학공장 생산계획 및 물류최적화, 재고관리, 공정제어 및 최적화 등.