

다면체 유한요소의 형상함수 개발에 관한 연구

김 현 규^{1†}

¹서울과학기술대학교 기계자동차공학과

A Study on the Development of Shape Functions of Polyhedral Finite Elements

Hyun-Gyu Kim^{1†}

¹Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology, Seoul, 139-743, Korea

Abstract

In this paper, a polyhedral element is presented to solve three-dimensional problems by developing shape functions based on Wachspress coordinates and moving least square approximation. A subdivision of polyhedrons into tetrahedral domains is performed for the construction of shape functions of polyhedral elements, and numerical integration of the weak form is carried out consistently over the tetrahedral domains. The weight functions for moving least square approximation are defined by solving Laplace equation with boundary values based on Wachspress coordinates on polyhedral element faces. Polyhedral elements presented in this paper have similar properties to conventional finite element regarding the continuity, the completeness, the node-element connectivity and the inter-element compatibility. Numerical examples show the effectiveness of the present method for solving three-dimensional problems using polyhedral elements.

Keywords : finite elements, polyhedral elements, barycentric coordinates, moving least square approximation

1. 서 론

유한요소법은 다양한 문제의 전산해석 분야에서 중심적인 역할을 하고 있는데 3차원 영역을 사면체 또는 육면체 유한요소로 분할하여 해석 모델을 구성하게 된다. 이와 같은 유한요소 중에서 사면체 요소의 성능이 육면체 요소에 비하여 현저히 부족하기 때문에 육면체 요소의 사용을 요구하고 있지만 단순하지 않은 형상을 육면체 요소로 분할하는 것은 상당히 어려움이 있게 된다. 육면체 요소의 분할을 위한 기법들(Tautges, 2001; Shepherd *et al.*, 2008; Zhang *et al.*, 2010)이 제안되고 있지만 복잡한 형상에 대한 적용은 상당히 어려운 실정이다.

유한요소법에서 요소 구성의 어려움을 극복하기 위하여 무요소법(meshless methods)이 제안되어 왔지만 수치적분을 위한 부가적인 격자 구성이 요구되므로 제한적인 문제들에서만

유용성이 부각되고 일반적인 방법으로 확장하여 적용되지 못하고 있다. 다른 한편으로 육면체 요소와 유사한 특성을 보여줄 수 있는 다면체 요소(polyhedral elements)의 개발은 유한요소 해석 모델의 구성에 있어서 자유도를 크게 높일 수 있게 된다. 하지만 다면체 영역에서 형상함수(shape functions)의 구성이나 수치적분 방법 등은 일반적인 유한요소법들에서 제시된 방식으로는 정의되기 어렵게 된다. 본 연구에서는 다면체 요소의 형상함수와 수치적분 방법을 위한 기본적인 연구를 수행하였고 새로운 방법으로 제시하고자 한다.

2차원 볼록 다각형에 대한 형상함수는 Wachspress (1975)가 제시하였고 Wachspress 좌표계를 확장한 평균값 좌표계가 Floater(2003)에 의해 개발되었다. 이 방법들은 단순한 2차원 볼록 다각형에서 유한요소가 만족해야 할 특성들을 갖는 형상함수로 정의될 수 있지만 일반적인 3차원 다면체 영역에 적용되기는 어렵다. 볼록한 3차원 다면체에 대

[†] Corresponding author:

Tel: +82-2-970-6309; E-mail: khg@seoultech.ac.kr

Received April 2 2014; Revised May 20 2014;

Accepted May 21 2014

©2014 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

하여 자연요소법(natural element method; Sukumar *et al.*, 1998; Sukumar *et al.*, 2004)이 Voronoi 영역 기반으로 제시되었지만 절점들의 연결을 결정해야 하고 수치적분의 어려움이 있게 된다. 다른 방법으로 요소 계면에서의 연속성을 구속조건으로 부여하고 다면체 요소를 영역 중심점을 기준으로 분할하여 형상함수의 다항식 계수들을 결정하는 변수-요소-기하 유한요소법(variable-element-topology finite element method; Rashid *et al.*, 2006)가 제시되었지만 수치적분 방법이 형상함수와 부합되지 못하고 요소 사이의 연속성을 만족하지 않는 문제점이 있다. 또한 다면체 요소를 적분 영역으로 분할하고 영역 경계에서 오차를 최소화하는 함수의 계수값들을 결정하는 방법(Rashid *et al.*, 2012)이 제시되었다. 하지만 이 방법도 요소 계면에서 연속성을 완벽하게 만족하지 못하고 영역 분할이 복잡해지는 문제가 있게 된다. 최근에 다면체 요소를 다중 피라미드(pyramid) 요소로 분할하여 형상함수를 정의하고 수치적분하는 새로운 방법(Sohn *et al.*, 2012)이 개발되었는데 다면체 영역의 분할 방법이 복잡하여 개선이 필요하게 된다.

본 연구에서는 다면체 영역에서 Wachspress 좌표계를 기반의 가중함수(weight functions)를 사용한 이동최소자승(moving least square) 근사 형상함수를 개발하고 여기에 부합되는 수치적분 방법을 제시하고자 한다. 이동최소자승 근사에서 가중함수를 부여하기 위하여 다면체 영역을 사면체 영역으로 분할하고 사면체 영역을 기반으로 형상함수와 수치적분 영역이 정의된다. 다면체 요소 내부의 사면체 영역에 대한 가중함수 정의에 1차 사면체 요소를 사용한 방법과 2차 사면체 요소를 사용한 방법을 비교하였다. 본 연구에서 개발되는 다면체 요소는 이동최소자승 근사의 특성으로 인하여 요소 내부에서 완전성(completeness)과 연속성(continuity) 그리고 요소 사이의 결합성(compatibility)을 만족하고 형상함수에 부합되는 수치적분을 수행하여 유한요소와 유사한 특성을 보여주게 된다. 다면체 유한요소는 복잡한 3차원 형상에 대한 해석 모델 구성의 자유도를 높이게 되는데, 본 연구에서는 다면체 요소의 형상함수와 수치적분의 유효성을 보여주기 위하여 패치 테스트(patch tests)의 결과를 보여주었다.

2. 본 론

2.1 다면체 요소 형상함수

Fig. 1과 같은 다면체 요소 Ω_p^e 의 유한요소 근사는 n 개의 꼭지점에 해당하는 절점을 기반으로 다음과 같이 일반적인 유한요소와 동일한 방법으로 표현이 된다.

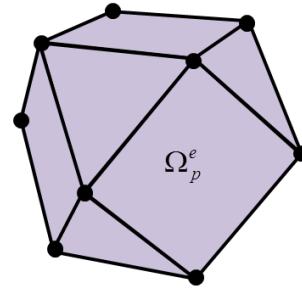


Fig. 1 A polyhedral element with nodes at vertices

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi^i(\mathbf{x}) \mathbf{u}^i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_p^e \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ 는 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 의 근사이고, $\phi^i(\mathbf{x})$ 는 절점 i 의 형상함수(shape functions)이고, \mathbf{u}^i 는 절점 i 에서의 값이다. 2차원 볼록 다각형에 대한 형상함수는 무게중심 좌표계(barycentric coordinates)를 사용한 방법들(Warren, 1996; Ju *et al.*, 2007; Wicke *et al.*, 2007)로 Wachspress 좌표계와 평균 값 좌표계 등이 제시되었는데, 내부의 면적들과 사잇각 등을 사용하여 표현되며 다음과 같은 특성을 만족하게 된다.

$$\xi^i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i \xi^i(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$\xi^i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij} \quad (4)$$

여기서, $\xi^i(\mathbf{x})$ 는 무게중심 좌표계이고, δ_{ij} 는 Kronecker-delta이다. 식 (2)~(4)를 만족하는 좌표계를 평면이 아닌 2차원 다각형이나 3차원으로 확장하기는 어렵기 때문에 다면체 영역에 동일한 방법으로 적용할 수 없게 된다. Idelsohn 등(2003)은 Voronoi 영역을 기반으로 형상함수를 제시하였지만 일반적인 다면체 요소로 확장하지는 못하였다. 다면체 요소의 형상함수는 일반적인 유한요소 형상함수와 유사하게 식 (3)과 같은 형태로 기저(basis) 다항식을 완벽하게 표현할 수 있는 완전성과 요소 경계에서 C^0 -연속성 그리고 Kronecker-delta 조건을 만족해야 한다. 또한 강성행렬의 구현을 위하여 요소 내부에서 수치적분을 수행해야 하는데 효율적인 적분 영역의 설정과 적분 영역 내부에서 C^1 -연속성을 만족해야 한다.

본 연구에서는 다면체 요소의 형상함수를 식 (3),(4)와 요소 경계에서 연속성을 만족하는 이동최소자승(moving least square) 근사를 형상함수로 정의하는 방법을 개발하였다. 기본적으로 이동최소자승 근사는 식 (3)의 다면체 영역 내부에서 완전성을 만족하게 되지만 절점에서 Kronecker-delta 조

건을 만족시키기 위한 가중함수(weight functions)의 정의가 필요하게 된다. 또한 수치적분 영역과 부합되는 형상함수의 정의가 요구된다. 본 연구에서는 표면에서의 가중함수를 다음과 같은 Wachspress 좌표계로 정의하였다.

$$q^i(\mathbf{x}) = B^i \prod_{j \neq i-1, i}^m A^j(\mathbf{x}) \tag{5}$$

$$\xi^i(\mathbf{x}) = \frac{q^i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^m q^j(\mathbf{x})} \tag{6}$$

여기서, m 다면체 요소 표면 다각형의 모서리 수이고 면적 $A^j(\mathbf{x})$ 와 B^i 는 Fig. 2에 정의되어 있다. 식 (6)에 정의된 Wachspress 좌표계의 값은 식 (2)~(4)를 만족하며, 이 값을 다면체 요소 면에서 이동최소자승 근사에 필요한 가중함수로 사용하게 되므로 각 절점에서 Kronecker-delta 조건을 만족하게 된다. 다면체 요소 내부에서의 가중함수는 다음과 같이 라플라스(Laplace) 방정식을 만족하는 조화함수(harmonic functions)로 정의되는데 경계에서 주어진 Wachspress 좌표값들을 사용하여 내부의 가중함수를 구하게 된다.

$$\Delta w^i(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega_p^e \tag{7}$$

$$w^i(\mathbf{x}) = \xi^i, \mathbf{x} \in \partial\Omega_p^e \tag{8}$$

여기서, $w^i(\mathbf{x})$ 는 절점 i 의 가중함수이다. 이와 같은 가중함수는 다면체 요소 영역 내부에서 Wachspress 좌표계의 경계치를 만족하면서 다음과 같이 함수의 구배를 최소화하게 된다.

$$w^i(\mathbf{x}) = \arg \min \{ |w^i(\mathbf{x})|_{H^1}, w^i = \xi^i \text{ on } \partial\Omega_p^e \} \tag{9}$$

식 (7)과 (8)을 만족하는 조화함수를 구하기 위하여 Fig. 3과 같이 다면체 요소를 사면체 영역으로 분할하는 방법을 본 연구에서는 사용하였다. 다면체 요소를 사면체 영역으로 분할하는 것은 다양한 기법들로 쉽게 구현이 가능하며 다면체 요소 내부의 가중함수를 정의하게 되고 수치적분 영역으로 사용되게 된다. 사면체 영역 분할의 개수는 다면체 요소의 형상이나 원하는 근사 수준에 따라서 사용자가 결정할 수 있게 된다. 가중함수는 Wachspress 좌표계를 다면체 요소 표면의 사면체 영역 절점들에 부여하고 다면체 요소 별로 사면체 요소들에 대한 식 (7)의 유한요소 해석으로 구하게 된다.

다면체 요소 내부의 사면체 영역에서 가중함수는 다음과

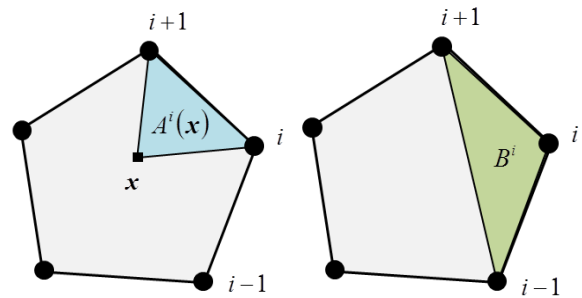


Fig. 2 Geometric areas for Wachspress coordinates in a planar polygon

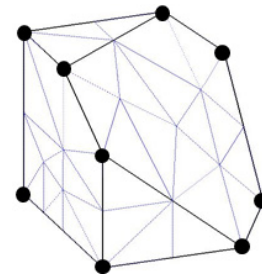


Fig. 3 Tetrahedral subdivision of a polyhedral element

같이 4절점 유한요소 형상함수 $N_4^a(\mathbf{x})$ 와 10절점 유한요소 형상함수 $N_{10}^a(\mathbf{x})$ 를 사용하여 나타나게 된다.

$$w^i(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^4 N_4^a(\mathbf{x}) w^a \tag{10}$$

$$w^i(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{10} N_{10}^a(\mathbf{x}) w^a \tag{11}$$

식 (10)과 같이 4절점 사면체 요소를 사용하여 식 (7)의 라플라스 방정식에서 가중함수가 정의되면 식 (11)의 10절점 사면체 요소를 사용하는 것 보다 간편하지만 형상함수의 근사 정도가 다르게 된다. 특히 다면체 요소의 경계에서 4절점 사면체를 사용하게 되면 일반적인 육면체 유한요소의 곁선형 함수(bilinear functions)를 표현할 수 없게 되므로 이동최소자승 근사가 요소 계면에서 육면체 유한요소 형상함수를 완벽하게 구현할 수 없게 된다. 즉, 다면체 요소로만 구성된 해석 모델의 경우 식 (10)과 같이 단순한 4절점 사면체 요소를 사용한 가중함수를 사용하는 것은 문제가 없지만, 다면체 요소와 육면체 요소가 혼합되어 있는 해석 모델의 경우 10절점 사면체 요소를 사용하여야 요소 경계에서 연속성을 만족할 수 있게 된다. 본 연구에서는 패치 테스트의 수치 예제를 통하여 4절점 사면체 요소를 사용한 경우와 10절점 사면체 요소를 사용하여 가중함수를 정의한 경우의 결과를 비교하여 보여주었다.

2.2 이동최소자승 근사

이동최소자승법으로 형상함수를 구성하게 되면 영역 내부에서 연속성과 완전성을 모두 완벽하게 만족하게 된다(Kim, 2002). 이동최소자승법은 지지영역(support domains)에서 기저함수(basis functions) $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 를 사용하여 함수를 근사한 것으로 계수 $\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}})$ 는 연속적으로 최소자승법으로 정의가 되면서 함수를 근사하게 된다.

$$\mathbf{u}^{local}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (12)$$

이동최소자승법에서 식 (13)과 같은 가중함수를 도입하여 최소화하는 근사를 얻게 되는데 가중함수를 정의하는 영역이 절점에서 정의되는 지지영역이 된다.

$$Y(\tilde{\mathbf{x}}) = [\mathbf{p}\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{u}}]^T \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{x}}) [\mathbf{p}\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{u}}] \quad (13)$$

여기서, $\hat{\mathbf{u}}$ 은 절점에서 주어진 값이고 $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ 는 절점의 가중함수로 구성된 행렬이다. 위의 식에서 $\tilde{\mathbf{x}}$ 을 이동시키면서 최소자승이 되는 계수들을 구하는 방법이 이동최소자승법을 사용한 근사가 되며 다음과 같이 표현된다.

$$\phi^i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

여기서,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w^j(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}^j)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}^j) \quad (15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \{w^i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}^i)\} \quad (16)$$

일반적으로 이동최소자승법을 사용한 근사는 절점의 값들과 정확히 일치하지 않지만 가중함수의 구성 방법에 따라서 절점에서 주어진 값과 정확히 일치하게 할 수 있다. 본 연구에서 개발되는 방법은 다면체 면에서 Wachspress 좌표계를 사용한 가중함수를 사용하므로 절점에서 Kronecker-delta 조건을 만족하게 된다.

이동최소자승법을 사용하여 다면체 영역에서 형상함수를 구성하게 되면 연속성을 만족하게 되고 다면체 요소를 통하여 기저함수의 조합을 완벽하게 나타낼 수 있고 다음과 같은 완전성을 만족하여 유한요소와 동일한 성격을 갖게 된다.

$$\sum_{i=1}^n \phi^i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

선형 기저함수에 대한 이동최소자승 근사에서 가중함수가 선형 다항식을 완벽하게 표현할 수 있다면 가중함수가 형상함수와 동일하다는 것을 보여주었는데(Kim, 2008), 식 (7)의 라플라스 방정식을 만족하는 가중함수를 직접 다면체 요소의 형상함수로 사용할 수도 있게 된다. 하지만 다면체 요소의 면이 평면이 아닌 일반적인 다면체 요소로 확장하기 위하여 본 연구에서는 이동최소자승 근사를 도입하여 형상함수를 정의하였다.

2.3 요소 계면의 연속성과 수치적분

앞에서 설명한 다면체 요소의 형상함수는 육면체 유한요소와 만나는 면에서 연속성을 만족하기 위하여 다면체 경계면에서 일반적인 사각형 유한요소 형상함수를 완벽하게 구현할 수 있어야 한다. 사각형 영역의 이동최소자승 근사의 가중함수가 일반적인 유한요소 형상함수와 동일한 경우는 연속성을 만족(Kim, 2008)하게 되지만 가중함수가 일반 유한요소 형상함수를 표현할 수 없으면 불연속성이 나타날 수 있게 된다. 다면체 영역을 4절점 사면체로 분할하는 경우 요소 면에서 1차 삼각형 요소의 형상함수를 가중함수로 사용하므로 사각형 선형 요소 형상함수를 완벽하게 표현할 수는 없지만, 10절점 사면체 요소로 분할한 경우는 요소 면에서 2차 삼각형 요소가 되므로 사각형 선형 요소를 완벽하게 표현할 수 있게 된다. 다면체 요소 면에서 정의되는 Wachspress 좌표계는 사각형 요소 형상함수의 곱선형 함수와 동일(Floater, 2003)하므로 육면체 요소와 만나는 경계에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$w^i(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^6 N_6^b(\mathbf{x}) N_4^i(\mathbf{x}^b) \quad (15)$$

여기서, $N_4^i(\mathbf{x}^b)$ 는 사각형 영역에서 절점 i 의 형상함수에 대한 \mathbf{x}^b 에서의 값이다. 결과적으로 10절점 사면체 요소로 분할한 다면체 요소는 일반 육면체 유한요소와 경계에서 완벽하게 연속성을 만족하게 된다. 또한 4절점 사면체 요소로 분할한 다면체 요소는 육면체 요소와 경계에서 연속성을 만족하지 않을 수 있게 된다. 하지만 4절점 사면체 요소로 분할하는 방식의 다면체 요소만을 사용한 유한요소 해석에서는 요소 경계에서 연속성을 완벽하게 만족하므로 효율적인 적용이 가능하게 된다.

이동최소자승법의 기저함수에 대한 식 (14)와 같은 완전성으로 인하여 응력이나 하중의 전달에서 수학적으로 완전한 방법이 된다. 따라서 본 연구의 방법은 요소 경계에서 연속성을

만족하면 자연스럽게 수학적으로 완벽한 결합이 되게 된다. 다면체 요소에서 수치적분도 분할된 사면체 영역에서 이루어지므로 형상함수 구성과 일관성있게 수행되게 된다. 수치적분은 일반적인 유한요소법에서 사용하는 가우스(Gauss) 구적법을 적용할 수 있으며 적분점의 수를 사용자가 제어할 수 있게 된다. 다면체 영역에서 정의된 함수들의 수치적분을 위한 방법들 (Gustafsson *et al.*, 1999; Mousavi *et al.*, 2011; Sudhakar *et al.*, 2013)이 제시되고 있지만 일반적인 방법으로 적용되기에는 복잡하고 어려운 점이 있다. 본 연구에서 제시하는 방법은 사면체 분할을 통하여 쉽게 수치적분을 구현하고 형상함수와 일관성을 유지할 수 있게 되므로 다면체 요소 내부에서 사면체 분할 영역의 수치적분을 통하여 쉽게 강성행렬을 구할 수 있게 된다.

2.3 수치예제 결과 및 고찰

수치적 검증을 위하여 다면체 요소와 일반 육면체 요소로 구성된 모델에 대한 패치 테스트를 수행하였다. 다면체 요소에 대한 사면체 분할은 공개 코드인 TetGen(Si, 2007)을 사용하였으며 사면체 영역의 개수를 변화시키며 해석을 수행하였다. 사면체 영역을 4절점 사면체 요소를 적용하는 경우와 10절점 사면체 요소를 적용하는 경우에 대하여 비교를 하였으며 유효성을 검증하였다. 4절점 사면체 요소 사용하는 경우는 1점 가우스 적분을 하였으며 10절점 사면체 요소의 경우는 4점 가우스 적분을 수행하였다. 본 연구의 예제에서는 적분점의 개수를 증가시켜도 해석결과에 차이가 없으므로 최소한의 적분점을 사용하여 해석을 수행하였다. Fig. 4에 해석 모델을 보여주고 있는데 14개 면을 갖는 다면체 요소가 해석 모델의 중심에 있고 10개 면을 갖는 다면체 요소와 일반적인 육면체 요소로 구성되어 있다. 모든 해석에는 $E=120\text{GPa}$ 이고 $\nu=0.3$ 의 선형탄성 재료를 적용하였다. Fig.

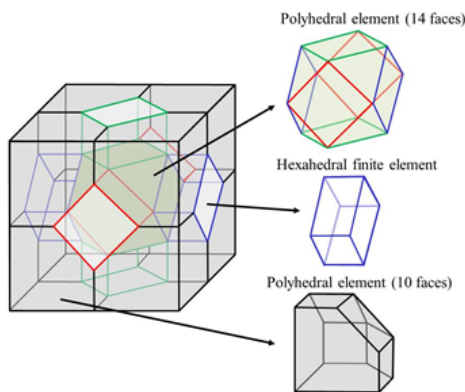


Fig. 4 Analysis model consisting of polyhedral and hexahedral elements

5와 같이 $L=20.0\text{mm}$ 의 정육면체 모델의 오른쪽 면에 $\bar{u}_y=0.01\text{mm}$ 변위를 부여하고 선형적으로 변하는 변위장을 얻을 수 있는지 알아보는 패치 테스트를 수행하였다.

다면체 요소 영역의 사면체 분할은 Fig. 6과 같이 한 다면체 요소에 대하여 평균 사면체 요소가 13.1, 53.9, 588.7개의 경우에 대하여 해석을 수행하였다. 앞에서 설명한 바와 같이 다면체 요소의 형상함수는 선형 기저함수를 완벽하게 표현할 수 있으므로 패치 테스트를 통과하지만 요소 경계면에서의 연속성이 만족하지 않는 경우 변위나 응력의 불연속성이 나타날 수 있게 된다. 다면체 요소를 분할하는 사면체 영역을 4절점 사면체 요소로 사용하는 경우 이동최소자승 근사를 통하여 얻은 형상함수가 육면체 요소 면에서의 사각형 요소에 대한 중선형 형상함수를 완벽하게 표현할 수 없으므로 경계에서 불연속성이 발생할 수 있게 된다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 4절점 사면체 요소를 적용하는 경우 다면체 요소와 육면체 요소 경계에서 불연속 변위가 발생하여 응력 분포에 오차를 발생하지만 사면체 영역의 수를 증가시키면서 오차가 감소된 결과를

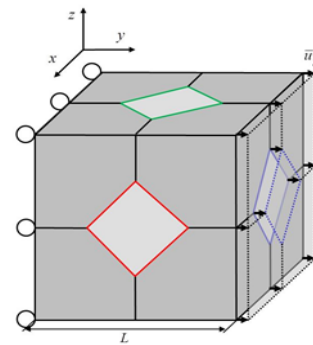


Fig. 5 Boundary conditions for patch test

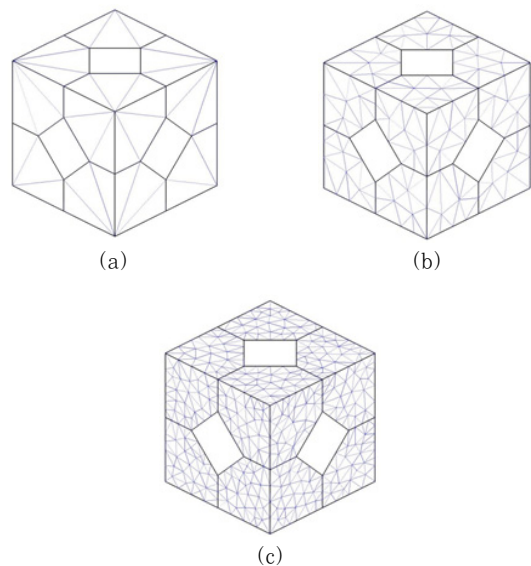


Fig. 6 Tetrahedral domains: the average number of tetrahedral domains=(a) 13.1, (b) 53.9, (c) 588.7

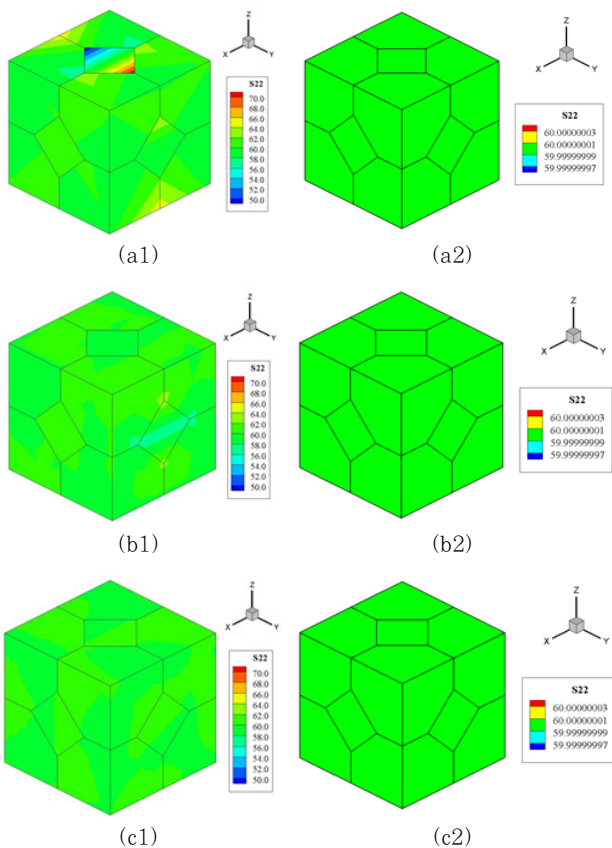


Fig. 7 Stress(σ_{yy}) contours for patch test; the average number of tetrahedral domains=(a1) 13.1 (4 nodes), (a2) 13.1 (10 nodes), (b1) 53.9 (4 nodes), (b2) 53.9 (10 nodes), (c1) 588.7 (4 nodes), (c2) 588.7 (10 nodes)

연계 된다. 즉, 4절점 사면체 요소로 다면체 요소를 분할하는 경우 육면체 요소와 결합에서 오차를 줄이기 위하여 많은 수의 사면체 영역 분할을 요구하게 된다. 하지만 10절점 사면체 요소를 사용한 경우는 식 (15)와 같이 육면체 요소 면의 곁전형 함수를 완벽하게 표현할 수 있으므로 Fig. 7과 같이 패치 테스트를 완벽하게 통과할 수 있게 된다.

3. 결 론

본 연구에서는 3차원 형상에 대한 해석 모델 구성의 자유도를 높일 수 있는 다면체 요소를 제시하고 있으며 수학적으로 요구되는 주요 특성을 만족하는 형상함수와 수치적분 방법을 개발하였다. 다면체 요소의 형상함수를 구성하기 위하여 Wachspress 좌표계를 다면체 요소 면에 적용하였으며 이동최소자승 근사를 사용하여 완전성과 연속성을 만족하도록 하였다. 이동최소자승 근사의 가중함수를 구성하기 위하여 다면체 요소를 사면체 요소로 분할하였으며 수치적분에도 동일한 사면체 영역을 사용하여 형상함수와 부합되는 수치적분 방법을 제시하였다. 사면체 영역에 4절점 사면체 요소와

10절점 사면체 요소를 적용하는 경우 육면체 요소 경계에서의 연속성에 대하여 논의를 하였으며 다면체 요소와 육면체 요소로 구성된 모델에 대한 패치 테스트를 수행하여 수치적 결과를 보여주었다. 본 연구를 바탕으로 보다 효율적인 다면체 요소가 개발되고 활용되어 전산해석 분야에 새롭고 유용한 방법으로 계속해서 연구가 진행될 것이다.

감사의 글

본 연구는 서울과학기술대학교 교내학술연구 지원비로 수행되었습니다.

Reference

- Floater, M.S. (2003) Mean Value Coordinates, *Comput. Aided Geom. Des.*, 20, pp.19~27.
- Gustafsson, B., Putinar, M. (1999) On Exact Quadrature Formulas for Harmonic Functions on Polyhedral, *Proceedings of the American Mathematics Society*, 128, pp.1427~1432.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N., Pin, F.D. (2003) The Meshless Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, pp.893~912.
- Ju, T., Liepa, P., Warren, J. (2007) A General Geometric Construction of Coordinates in a Convex Simplicial Polytope, *Computer Aided Geometric Design*, 24, pp.161~178.
- Kim, H.G. (2002) Interface Element Method (IEM) for a Partitioned System with Non-Matching Interfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.3165~3194.
- Kim, H.G. (2008) Development of Three-Dimensional Interface Elements for Coupling of Non-Matching Hexahedral Meshes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, pp.3870~3882.
- Mousavi, S.E., Sukumar, N. (2011) Numerical Integration of Polynomials and Discontinuous Functions on Irregular Convex Polygons and Polyhedrons, *Computational Mechanics*, 47, pp.535~554.
- Rashid, M.M., Sadri, A. (2012) The Partitioned Element Method in Computational Solid Mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237-240, pp.152~165.
- Rashid, M.M., Selimotic, M. (2006) A Three-Dimensional Finite Element Method with Arbitrary

- Polyhedral Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67, pp.226~252.
- Shepherd, J.F., Johnson, C.R.** (2008) Hexahedral Mesh Generation Constraints, *Engineering Computations*, 24, pp.195~213.
- Si, H.** (2007) Tetgen: a Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three Dimensional Delaunay triangulation. Available from <http://tetgen.berlios.de>.
- Sohn, D., Cho, Y.-S., Im, S.** (2012) A Novel Scheme to Generate Meshes with Hexahedral Elements and Poly-Pyramid Elements: The carving technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204, pp.208~229.
- Sudhakar, Y., Wall, W.A.** (2013) Quadrature Schemes for Arbitrary Convex/concave Volumes and Integration of Weak form in Enriched Partition of Unity Methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 258, pp.39~54.
- Sukumar N. Tabarraei, A.** (2004) Conformal Polygonal Finite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp.2045~2066.
- Sukumar, N., Moran, B., Belytschko T.** (1998) The Natural Element Method in Solid Mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, pp.839~887.
- Tautges, T.J.** (2001) The Generation of Hexahedral Meshes for Assembly Geometry: Survey and Progress, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp.2617~2642.
- Wachspress, E.L.** (1975) *A Rational Finite Element Basis*, Academic Press, New York.
- Warren, J.** (1996) Barycentric Coordinates for Convex Polytopes, *Advances in Computational Mathematics*, 6, pp.97~108.
- Wicke, M., Botsch, M., Gross, M.** (2007) A Finite Element Method on Convex Polyhedral, *Computer Graphics Forum (Eurographics)*, 26, pp.355~364.
- Zhang, Y., Hughes, T.J.R., Bajaj, C.L.** (2010) An Automatic 3D Mesh Generation Method for Domains with Multiple Materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, pp.405~415.

요 지

본 연구에서는 다면체 요소의 개발을 위하여 Wachspress 좌표계와 이동최소자승 근사를 기반으로 하는 형상함수와 수치적분 방법을 제시하고 있다. 사면체 요소를 사면체 영역으로 분할하여 형상함수가 구성이 되고 이 영역을 사용한 일관성있는 수치적분이 수행되게 된다. 다면체 요소 면에서 Wachspress 좌표계를 사용하고 요소 내부에서 라플라스 방정식을 적용하여 이동최소자승 근사의 가중함수를 정의하게 된다. 본 연구에서 개발되는 다면체 요소의 형상함수와 수치적분 방법은 일반적인 유한요소와 유사한 특성을 갖게 되는데 수치 예제를 통하여 유효성을 보여주었다.

핵심용어 : 유한 요소, 다면체 요소, 무게중심 좌표계, 이동최소자승 근사