

## 카오틱 맵을 이용한 위상 최적화 알고리즘의 수렴속도 향상

김용호<sup>a</sup>, 김기철<sup>b</sup>, 이재환<sup>b</sup>, 장효재<sup>b</sup>, 한석영<sup>b\*</sup>

## Improvement of Topology Algorithm's Convergence Rate Using Chaotic Map

Yong-Ho Kim<sup>a</sup>, Gi-Chul Kim<sup>b</sup>, Jae-Hwan Lee<sup>b</sup>, Hyo-Jae Jang<sup>b</sup>, Seog-Young Han<sup>b\*</sup><sup>a</sup> Department of Mechanical Engineering, Hanyang Graduate School, 222 Wangsimni-ro, Seongdong-gu, Seoul, Republic of Korea<sup>b</sup> Division of Mechanical Engineering, Hanyang University, 222 Wangsimni-ro, Seongdong-gu, Seoul, Republic of Korea

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received	12	March	2014
Revised	20	May	2014
Accepted	22	May	2014

## Keywords:

Artificial bee colony algorithm

Chaotic map

Finite element method

Topology optimization

## ABSTRACT

Recently, a topology algorithm based on the artificial bee colony algorithm (ABCA) has been proposed for static and dynamic topology optimization. From the results, the convergence rate of the algorithm was determined to be slightly slow. Therefore, we propose a new search method to improve the convergence rate of the algorithm using a chaotic map. We investigate the effect of the chaotic map on the convergence rate of the algorithm in static and dynamic topology optimization. The chaotic map has been applied to three cases, namely, employ bee search, onlooker bee search, and both employ bee as well as onlooker bee search steps. It is verified that the case in which the logistic function of the chaotic map is applied to both employ bee as well as onlooker bee search steps shows the best dynamic topology optimization, improved by 5.89% compared to ABCA. Therefore, it is expected that the proposed algorithm can effectively be applied to dynamic topology optimization to improve the convergence rate.

## 1. 서론

구조물 위상 최적화 문제의 가장 큰 목적은 설계조건을 만족하면서 목적함수의 값을 최소화하는 구조물을 설계하는 것으로, 경량화를 이루는데 가장 효율적인 방법이다. 이러한 위상 최적화 문제에 사용되는 알고리즘의 대표적인 방법으로는 밀도법(solid isotropic material with penalization: SIMP)<sup>[1]</sup>과 양방향 진화적 구조최적화(bi-directional evolutionary structural optimization: BESO)<sup>[2]</sup>법으로부터 자연 모방 최적화 방법인 입자 군집 최적화(particle swarm optimization: PSO)<sup>[3]</sup>, 개미 군집 최적화(ant colony optimization: ACO)<sup>[4]</sup> 그리고 인공벌 군집 알고리즘(artificial bee colony algorithm: ABCA)<sup>[5]</sup> 등이 있다.

그 동안의 연구에서 Karaboga와 Basturk<sup>[6,7]</sup> 그리고 Omkar 등<sup>[8]</sup>에 의해서 ABCA가 차분 진화(differential evolution: DE), 입자 군집 최적화(PSO), 진화 알고리즘(evolutionary algorithm: EA), 유전자 알고리즘(genetic algorithm: GA)보다 공학적인 문제를 해결하는 데 매우 효율적이라는 결과를 확인할 수 있었다. 또한 Park 등<sup>[9,10]</sup>의 연구에서도 ABCA가 구조 위상 최적화에서 SIMP보다 개선된 결과를 보임을 알 수 있었다. 따라서 위의 연구 결과들을 통해서 ABCA는 설계변수가 매우 많은 위상 최적화 문제에서 기존의 알고리즘을 보다 실용적이고 효율적인 알고리즘이라 말할 수 있다.

또한, 최근에는 기존의 알고리즘들의 성능을 개선하기 위한 연구도 다수 진행되고 있다. Talatahari 등<sup>[11]</sup>의 카오틱 제국주의자

\* Corresponding author. Tel.: +82-2-2220-045

Fax: +82-2-2220-2299

E-mail address: syhan@hanyang.ac.kr (Seog-Young Han).

경쟁 알고리즘(chaotic imperialist competitive algorithm: CICA), Gandomi 등<sup>[12]</sup>의 혼란-강화된 가속 입자 최적화(chaos-enhanced accelerated particle swarm optimization: CAPSO)법, Alatas<sup>[13]</sup>의 카오틱 조화 탐색 알고리즘(chaotic harmony search algorithms: CHSA) 등은 기존에 개발되어 있던 알고리즘에 카오스(chaos) 이론을 적용함으로써 알고리즘에 따라 특정한 카오틱 맵(chaotic map)에서 기존의 알고리즘보다 수렴속도가 크게 개선될 수 있음을 확인할 수 있었다.

본 연구에서는 ABCA에 카오스 이론을 적용하여 기존의 ABCA의 수렴속도를 더욱 향상시키는 것을 목표로 한다. 카오스 이론은 기존 ABCA의 임의의 탐색 과정을 카오틱 맵을 통한 탐색 과정으로 대체함으로써 적용하였으며 2.2절에서 자세히 설명한다. 알고리즘의 개선된 정도를 확인하기 위하여 정적 및 동적 위상 최적화 문제에 적용하였다.

## 2. 카오틱 인공벌 군집 알고리즘

### 2.1 인공벌 군집 알고리즘(ABCA)

꿀벌은 하나의 여왕과 수 천 마리의 일벌들로 구성된 군집 곤충으로 일벌들은 각각의 역할을 고용벌(employed bees), 관망벌(onlookers), 정찰벌(scouts)로 나누어 가장 많은 과즙(nectar)을 보유한 식량원(food source)을 탐색하는 행동 양상을 보인다. 고용벌은 식량원에서 그 정보를 취득하여 벌집에 있는 관망벌에게 전달하며, 관망벌은 이 정보를 바탕으로 최적의 식량원을 찾아 이동하고, 정찰벌은 가보지 않은 새로운 식량원을 탐색하는 역할을 수행한다.

ABCA는 이를 자연 모사한 알고리즘으로 이를 위상 최적화에 적용하기 위해 설계변수는 다음과 같이 설정한다. ABCA의 전체 탐색 구간을 위상 최적화 문제의 전체 설계영역으로, 식량원을 이산화된 각 요소로, 식량원의 적합성을 각 요소의 민감도 수(sensitivity number)를 활용한 적합도(fitness)로, 고용벌의 수는 부피 구속조건에 부합하는 요소의 개수로, 고용벌이 위치한 요소와 버려진 요소를 각각 고체(solid)와 빈(void) 요소로 나타낸다. 이를 통해 각 반복횟수(iteration)에서 최종적으로 고용벌이 위치한 요소로 후보해(candidate solution)를 나타내며 이 요소들이 보유한 과즙의 양이 후보해의 질을 결정한다<sup>[9]</sup>.

ABCA를 통한 위상 최적화의 자세한 과정은 기존의 Park 등<sup>[9,10]</sup>의 연구를 참조하였으며 이를 간략히 나타내면 다음과 같다.

- 1단계: 설계영역을 이산화하고 설계변수를 초기화 한다.
  - 2단계: 각 요소의 적합도를 계산한다.
  - 3단계: 고용벌 탐색 단계를 시행한다.
- 전체 설계영역에서 고용벌이 배치된 요소들 중에서  $x_i$ 와  $x_k$ 의

두 위치를 임의로 선정하고 임시 후보해(a temporary candidate solution)  $v_i$ 를 다음의 식 (1)에 따라 선정한다.

$$v_i = x_i + \phi_i |x_i - x_k| \quad (1)$$

이때  $\phi_i$ 는 0과 1사이의 임의의 숫자이다. 이렇게 선정된 후보해를 포함한 세 위치 중 적합도가 가장 높은 요소를 선별 및 저장하는 과정을 고용벌 단계의 루프에서 반복 시행한다.

4단계: 관망벌 탐색 단계를 시행한다. 이 단계는 개선된 임시 후보해  $v_i'$ 를 구하기 위한 과정으로 임의의 두 위치  $x_i'$ 와  $x_k'$ 를 통해 적합도가 더욱 높은 위치를 찾을 수 있는 경우 임의의 탐색 과정을 더 반복한다.

$p_i$ 는 확률값(probability value)을 나타내며 이 과정에 관한 식은 식 (2)와 식 (3)과 같다<sup>[7]</sup>.

$$p_i = \frac{fit_i}{\sum_{i=1}^n fit_i} \quad (2)$$

$$v'_i = x'_i + \phi_i |x'_i - x'_k| \text{ for rand } [0, 1] < p_i \quad (3)$$

이를 통해 개선된 후보해를 포함한 세 위치 중 적합도가 가장 높은 요소를 선별 및 저장하는 과정을 관망벌 단계의 루프에서 반복 시행한다.

5단계: 정찰벌 탐색 단계를 시행한다. 정찰벌은 고용벌이 위치한 요소와 버려진 요소를 탐색하고 비교하여 후보해가 수렴하기 전에 국소 최적해(local minimum)에서 탈피하도록 한다.

6단계: 위 과정들을 통해서 선정된 고용벌의 위치들을 바탕으로 구속조건을 만족하도록 최적의 위치들을 선정함으로써 현재 반복 횟수에서의 최적 후보해를 결정한다.

7단계: 유한요소해석을 통해 최적 후보해의 목적 함수의 값을 계산한다.

8단계: 수렴조건<sup>[9,14]</sup>을 판별한다. 현재의 최적 후보해가 수렴조건을 만족하지 않을 경우 3단계로 돌아가 다시 반복한다. 이때 수렴조건은 식 (4)와 같다.

$$error = \frac{\left| \sum_{i=i}^N (U^{(k-i+1)} - U^{(k-N-i+1)}) \right|}{\sum_{i=1}^N U^{(k-i+1)}} \leq \tau \quad (4)$$

이때  $\tau$ 는 허용오차이며,  $k$ 는 현재의 반복횟수,  $N'$ 은 정수로 본 논문에서는 목적함수 값의 안정을 위해 10으로 설정하였다<sup>[14]</sup>.

### 2.2 카오틱 인공벌 군집 알고리즘(CABCA)

카오스 이론은 물질서 속에서 존재하는 질서에 대한 이론이며 많은 과학적 현상에 적용되고 있다. 본 논문에서 주목한 카오스 이론의 법칙은 복잡한 시스템들이 임의적이고 비구조적으로 보이 나 실제로는 규칙적 특성을 갖는다는 점이다. 이를 위한 수학적 모델인 카오틱 맵은 임의적으로 보이 나 결정적으로 배열되는 카오틱 수열(chaotic sequence)을 형성하며 이 수열은 거동이 특이한 시스템의 임의성을 대체할 수 있다<sup>[10]</sup>.

따라서 본 논문에서는 ABCA의 진행 과정 중에서 고용률 단계와 관망별 단계에서 임의의 수  $\phi_i$ 를 카오틱 맵들을 활용한 카오틱 변수(chaotic variable)로 대체함으로써 기존 알고리즘의 성능을 개선하게 하도록 하였다. 이 과정을 나타내면 식 (5)와 같다.

$$v_i = x_i + c_i|x_i - x_k| \tag{5}$$

여기서,  $c_i$ 는 카오틱 변수를 나타내며, 초기값  $c_0$ 는 0과 1사이의 임의의 수로 설정한다.

Table 1에 제시된 카오틱 맵은 기존의 Talatahari 등<sup>[11]</sup>, Gandomi 등<sup>[12]</sup>, 그리고 Alatas<sup>[13]</sup>의 연구에서 제시된 카오틱 맵들을 모두 사용하여 위상 최적화를 시도해본 결과, 기존 ABCA를 이용하였을 때보다, 결과가 개선되었을 경우에 대한 카오틱 맵만을 표기한 경우이다.

본 논문에서는 카오틱 변수를 각 카오틱 맵에 대하여 고용률 단계에만 적용하는 경우와 관망별 단계에만 적용하는 경우, 그리고 두 단계 모두에 적용하는 경우로 나누어 적용해보았다.

### 3. 적용 예제

#### 3.1 정적 위상 최적화

정적 위상 최적화 문제를 정식화하면 식 (6)과 같다<sup>[2]</sup>.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & U = \frac{1}{2} f^T u \\ \text{S.t. } & V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0, \quad x_i = \begin{cases} 1 & \text{if element is solid} \\ x_{\min} & \text{if element is void} \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

여기서,  $U$ 는 변형에너지,  $f$ 는 하중 벡터,  $u$ 는 변위 벡터,  $V^*$ 는 목표 체적,  $V_i$ 는  $i$ 번째 요소의 체적,  $x_i$ 는  $i$ 번째 요소의 이진 변수이다.

알고리즘 수렴속도의 향상 정도를 시험하기 위해 CABCA를 적용한 문제는 Fig. 1과 같이 한쪽 끝에서 하중이 가해진 외팔보이다. 보의 치수는 길이 0.8 m, 높이 0.4 m, 두께 0.001 m 이며, 적용한 재료의 물성치는 탄성계수  $E=70$  GPa, 포아송비  $\nu=0.3$ 이다. 작용하는 하중  $P$ 는 100 kN이다. 구속조건은 최적해 부피를 최초 부피의 45%로 감소시키는 것이며 설계 영역은 총  $80 \times 40$ 의 4절점 사각형 유한요소로 나누었다.

Table 2는 기존의 ABCA<sup>[9]</sup>와 각각 다른 카오틱 맵을 적용한 세 가지 CABCA의 총 20회 시행에서 반복횟수와 목적함수 값의 평균을 정리한 것이다. 괄호안의 e와 o는 각각 고용률과 관망별 단계에 카오틱 맵을 적용하였음을 나타낸다. Fig. 2로부터 최적해의 레이아웃은 서로 유사함을 확인할 수 있으며, Fig. 3은 Table 2의 알고리즘들의 수렴 과정을 나타낸 그래프로서 이를 통해 각각의 알고리즘의 수렴과정이 매우 유사함을 알 수 있다. 따라서, 정적

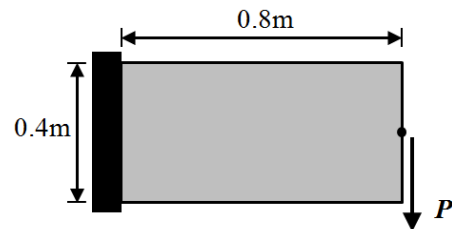


Fig. 1 Cantilever beam

Table 1 Description of chaotic map

Chaotic map	Description
Gauss	$c_{k+1} = \begin{cases} 0 & c_k = 0 \\ \text{mod}(\frac{1}{c_k}, 1) & c_k \neq 0 \end{cases}$
Logistic	$c_{k+1} = \alpha \cdot c_k(1 - c_k), \quad \alpha = 4$
Piecewise	$c_{k+1} = \begin{cases} \frac{c_k}{P} & 0 \leq c_k < P \\ \frac{c_k - P}{0.5 - P} & P \leq c_k < \frac{1}{2} \\ \frac{1 - P - c_k}{0.5 - P} & \frac{1}{2} \leq c_k < 1 - P \\ \frac{1 - c_k}{P} & 1 - P \leq c_k < 1 \end{cases}$ $P \in (0, 0.5)$

Table 2 Numerical results of the cantilever beam

Method	Iteration	Objective function (J)
ABCA <sup>[9]</sup>	31.70	4917.247
Gauss (e,o)	31.65	4919.055
Logistic (e,o)	31.60	4920.564
Piecewise (o)	31.65	4916.393



(a) ABCA<sup>[9]</sup>



(b) CABCA with Logistic map (e,o)

Fig. 2 Optimal topology of the cantilever beam

위상 최적화 문제에 대해서는 CABCA가 ABCA의 수렴속도에 거의 영향을 미치지 못함을 알 수 있었다.

### 3.2 동적 위상 최적화

동적 위상 최적화 문제를 정식화하면 식 (7)과 같다<sup>[2]</sup>.

$$\begin{aligned} \text{Max. } \omega_j &= \sqrt{\frac{u_j^T K u}{u_j^T M u}} \\ \text{S.t. } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i &= 0, \quad x_i = \begin{cases} 1 & \text{if element is solid} \\ x_{\min} & \text{if element is void} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,  $\omega_j$ 는  $j$ 번째 고유 진동수,  $u_j$ 는  $j$ 번째 고유 벡터,  $K$ 는 강성 행렬,  $M$ 은 질량 행렬이다.

Figure 4와 같이 중심에 집중 하중이 가해지는 양단 고정보 문제에 CABCA를 적용하였다. 보의 치수는 길이 0.14 m, 높이 0.02 m, 두께 0.01 m이며, 적용한 재료의 물성치는 탄성계수  $E=1$  MPa, 포아송비  $\nu=0.3$ , 밀도  $\rho=1$  kg/m<sup>3</sup>이고, 작용하는 집중하중  $M=1.4 \times 10^{-5}$  kg이다. 구속조건은 최적해 부피를 최초 부피의 50%로 감소시키는 것이며 설계 영역은 총 280 × 40의 4절점 사각형 유한요소로 나누었다.

Table 3의 결과에 의해서 고용별과 관망별 단계에 Logistic map을 적용한 CABCA가 기존의 ABCA<sup>[10]</sup>보다 목적함수의 값은 약 0.01%이하의 근소한 차이를 보이나 수렴속도는 약 5.89%

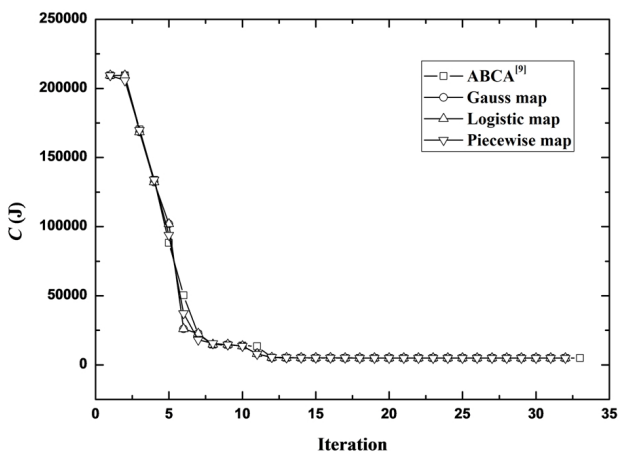


Fig. 3 Convergence graph of the cantilever beam

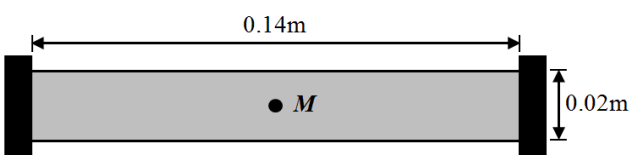


Fig. 4 Clamped beam with a concentrated mass

개선되었음을 확인할 수 있었다.

Table 4는 기존의 알고리즘과 Logistic map을 적용한 CABCA의 수렴과정을 그림으로 나타낸 것이다. 변화하는 양상은 서로 상이한 모습을 보이지만 Fig. 5를 통해 최적해의 레이아웃은 유사함

Table 3 Numerical results of the clamped beam

Method	Iteration	Objective function (rad/s)
ABCA <sup>[10]</sup>	30.60	1493.768
Gauss (e,o)	29.05	1493.898
Logistic (e,o)	28.80	1493.509
Piecewise (o)	29.70	1494.037

Table 4 Layouts of the ABCA and CABCA process for the clamped beam

Method	ABCA <sup>[10]</sup>	Logistic map (e,o)
Start		
5		
10		
...	...	...
Convergence (Iteration)	(31)	(28)



(a) ABCA<sup>[10]</sup>



(b) CABCA with Logistic map (e,o)

Fig. 5 Optimal topology of the clamped beam

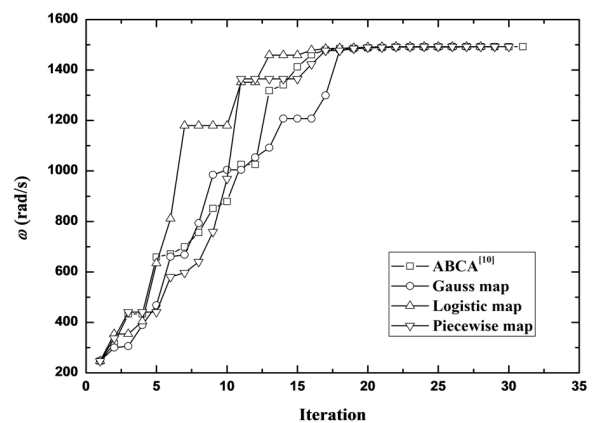


Fig. 6 Convergence graph of the clamped beam

을 확인할 수 있다. Fig. 6은 Table 3의 알고리즘들의 수렴과정을 나타낸 그래프로써 이를 통해서도 각각의 알고리즘의 수렴과정이 서로 상이함을 알 수 있다.

이러한 반복횟수의 개선을 더욱 강화하기 위해 고용별과 관망별 단계에 Logistic map을 적용한 CABCA의 관망별 단계의 루프를 3배 강화하여 보았다. 초기 5회의 반복횟수까지는 목적함수 값이 특정한 경향성 없이 임의적이거나 5회 이후부터는 소기의 목적대로 기존 CABCA보다 더 큰 값을 보임을 확인하였다. 그러나 후반부에서는 목적함수의 값이 CABCA 보다 높아지며 수렴조건을 만족하는 것이 느려져 최종 수렴 반복횟수는 더욱 증가하는 결과를 보였다. 그 결과 총 20회 시행에서 목적함수 값은 1494.018 rad/s, 반복횟수는 29.2의 평균치를 보였으며 이는 ABCA에 비해서 목적함수가 약 0.02% 개선되거나 반복횟수의 개선이 약 4.58%라는 점에서 Table 3의 CABCA에 비해 성능이 좋지 않다고 판단하였다.

#### 4. 결론

최근 많은 연구에서 카오스 이론이 최적화 이론에서 많은 잠재력을 가지고 있음을 보이고 있다. 불규칙적이고 예측하기 힘든 특성을 보이는 시스템에서 카오틱 특성은 긍정적으로 작용하는 주된 특성을 가지고 있다. 따라서 카오스 이론은 확률적 최적화 이론에서 사용되는 임의의 수를 대신하여 사용될 수 있었다.

본 논문에서는 카오스 이론과 ABCA의 장점을 결합하여 위상 최적화 문제에 적용하였다. ABCA는 벌 군집의 행동을 모사한 집단 지성 알고리즘이다. 이 알고리즘의 주요한 과정은 고용별 단계와 관망별 단계로 본 논문에서는 이 두 과정에 카오틱 맵을 이용한 카오틱 변수를 적용해 기존 알고리즘을 수정하여 그 성능을 개선하였다.

그 결과를 확인하기 위하여 정적 및 동적 위상 최적화 문제에 이 알고리즘을 적용하였으며 정적 문제에서는 거의 수렴속도의 개선이 보이지 않았으나, 동적 문제에서는 Logistic map을 고용별과 관망별 단계에 적용한 경우에 5.89%의 수렴속도의 향상을 보임을 알 수 있었다. 본 논문에서는 약 6%의 수렴속도의 향상을 보였으나, CABCA의 카오틱 맵의 적용이 용이하다는 점과 카오틱 맵의 선정에 따라 그 성능이 개선될 수 있는 많은 잠재력을 지니고 있다는 점에서 최적해를 찾기 위한 많은 공학 문제에서 폭넓게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

#### References

- [1] Bendsøe, M. P., Sigmund, O., 2003, Topology Optimization: Theory, Methods and Applications, Springer, Berlin.
- [2] Huang, X., Xie, Y. M., 2010, Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications, Wiley, India.
- [3] Hsieh, H.-T., Chu, C.-H., 2012, Optimization of Tool Path Planning in 5-Axis Flank Milling of Ruled Surfaces with Improved PSO, Int. J. Precis. Eng. Manuf. 13:1 77-84.
- [4] Kaveh, A., Hassani, B., Shojaee, S., Tavakkoli, S. M., 2008, Structural Topology Optimization Using Ant Colony Methodology, Eng. Struct. 30:9 2559-2565.
- [5] Karaboga, D., Akay, B., 2009, A Survey: Algorithms Simulating Bee Swarm Intelligence, Artif. Intell. Rev. 31:1-4 61-85.
- [6] Karaboga, D., Basturk, B., 2007, Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm for Solving Constrained Optimization Problems, Found. Fuzzy Log. Soft Comput. 4529 789-798.
- [7] Karaboga, D., Basturk, B., 2008, On the Performance of Artificial Bee Colony (ABC) Algorithm, Appl. Soft Comput. 8:1 687-697.
- [8] Omkar, S. N., Senthilnath, J., Khandelwal, R., Naik, G. N., Gopalakrishnan, S., 2011, Artificial Bee Colony (ABC) for Multi-objective Design Optimization of Composite Structures, Appl. Soft Comput. 11:1 489-499.
- [9] Park, J.-Y., Eom, Y.-S., Yoo, K.-S., Park, J.-Y., Han, S.-Y., 2010, Optimum Design of Structures Using Modified Bee Colony Algorithm, Korea Soc. Mach. Tool Eng. Autumn Conf. 2010 61-62
- [10] Park, J.-Y., Ryu, S.-P., Eom, Y.-S., Yoo, K.-S., Park, J.-Y., Han, S.-Y., 2010, Application of Modified Bee Colony Algorithm for Structural Dynamic Problems Korea Soc. Mach. Tool Eng. Autumn Conf. 2010 57-58.
- [11] Talatahari, S., Kaveh, A., Sheikholeslami, R., 2012, Chaotic Imperialist Competitive Algorithm for Optimum Design of Truss Structures, Struct. Multidiscip. Optim. 46:3 355-367.
- [12] Gandomi, A. H., Yun, G. J., Yang, X.-S., Talatahari, S., 2013, Chaos-enhanced Accelerated Particle Swarm Optimization, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 18:2 327-340.
- [13] Alatas, B., 2010, Chaotic Harmony Search Algorithms, Appl. Math. Comput. 216:9 2687-2699.
- [14] Huang, X., Xie, Y. M., 2007, Convergent and Mesh-independent Solutions for the Bi-directional Evolutionary Structural Optimization Method, Finite Elem. Anal. Des. 43:14 1039-1049.