

행복의 수학적 모델링과 비선형 해석

김순환* · 최선경** · 배영철*** · 박영호****

Mathematical Modelling of Happiness and its Nonlinear Analysis

Soon-Whan Kim* · Sun-Koung Choi** · Young-Chul Bae*** · Young-Ho Park****

요 약

행복은 사회학과 심리학에서 주된 관심사로 연구되어 왔다. 본 논문에서는 Spring-Damper-Mass 시스템과 등가적으로 구성할 수 있는 새로운 2차계로 구성된 행복 모델을 제안하여 Duffing 방정식과 동일한 형태의 2차원 모델로 구성한다. Duffing 방정식에 비선형 항을 추가하고 행복 현상이 나타날 수 있는 외부 신호로서 주기적인 정현파와 가우시안 백색 잡음을 인가하였다. 그런 후 새로운 행복 모델에서 파라미터 변화에 따라 랜덤 운동, 주기 운동, 카오스 운동이 있음을 확인하였다.

ABSTRACT

Happiness has been studied in sociology and psychology as a matter of grave concern. In this paper the happiness model that a new second - order systems can be organized equivalently with a Spring-Damper-Mass are proposed. This model is organized a 2-dimensional model of identically type with Duffing equation. We added a nonlinear term to Duffing equation and also applied Gaussian white noise and period sine wave as external stimulus that is able to cause of happiness. Then we confirm that there are random motion, periodic motion and chaotic motion according to parameter variation in the new happiness model.

키워드

Happiness, Mathematical Model, Chaos, Random Variable, Time Series, Phase Portrait, Nonlinear Analysis
행복, 수학적 모델, 카오스, 랜덤 변수, 시계열, 위상 공간, 비선형 해석

1. 서 론

우리가 살고 있는 자연계는 선형 시스템이 아닌 비선형 시스템으로 구성되어 있다. 바람이 부는 현상이나 태풍의 진로, 사람의 삶 등이 비선형적인 거동을 가진

것으로 알려져 있다. 일반적으로 선형 시스템에 비해 비선형 시스템의 해석은 어렵기 때문에 이를 선형화시켜 해석하는 경우가 가장 많이 사용되는 방법이다. 그러나 최근에는 비선형 시스템 해석을 비선형 자체의 현상으로 해석하고 이를 실생활에 적용하고자 하는 노

* 제주대학교 통신공학과(soonkim@jejunu.ac.kr)

** 신라대학교 사회복지학과(sun@silla.ac.kr)

*** 전남대학교 전기·전자통신·컴퓨터 공학부(ycbae@jnu.ac.kr)

**** 교신저자(corresponding author) : 계명대학교 사회체육학과(sspark@kmu.ac.kr)

접수일자 : 2014. 04. 30

심사(수정)일자 : 2014. 05. 23

게재 확정일자 : 2014. 06. 16

력을 지속하고 있다. 이러한 노력의 예가 퍼지, 신경망, 카오스 및 복잡계 현상의 해석이라고 할 수 있다. 최근에는 비선형의 사례 중에서 카오스 현상에 대한 연구가 공학, 심리학, 생물학, 사회학 등에서 많은 관심을 받아왔다[1-8].

심리학과 사회학의 공동 연구 영역인 행복 문제에 대하여 많은 연구자들이 심리학적 관점과 사회학적 관점에서 많은 연구를 진행해왔다. 또한 최근에는 행복에 대한 동적 모델을 선형과 비선형적인 관점에서 해석하는 연구도 J.C Sprott[9]에 의해 진행되어 왔다. 그러나 이 모델은 주로 선형적인 관점에서의 연구로서 외부 입력을 주기 펄스로 주어 실제 행복 모델을 완벽하게 나타내지 못하는 문제점을 가지고 있다.

이러한 문제점을 해결하고자 본 논문에서는 Spring-Damper-Mass 시스템과 등가적으로 구성할 수 있는 새로운 2차계로 구성된 행복 모델을 제안하여 Duffing 방정식과 동일한 형태의 2차원 모델로 구성한다. 또한 Duffing 방정식에 비선형 항과 행복의 원인이 될 수 있는 외부 자극으로 가우시안 백색 잡음과 주기적 정현파를 인가하여 이 모델에서 랜덤 운동, 주기 운동과 카오스 운동이 있음을 확인한다.

II. 행복 모델

일반적으로 사전적 의미로 행복(happiness)에 대한 정의는 “욕구와 욕망이 충족되어 만족하거나 즐거움을 느끼는 상태, 불안감을 느끼지 않고 안심해 하거나 또는 희망을 그리는 상태에서의 좋은 감정으로 심리적인 상태 및 이성적 경지를 의미한다. 그 상태는 주관적일 수 있고 객관적으로 규정될 수 있다. 또한, 행복은 철학적으로 대단히 복잡다단하고 엄밀하며 금욕적인 삶을 행복으로 보기도 한다. 한편 광의로 해석해, 사람뿐만 아니라 여러 생물에도 이에 상응하는 상태나 행동, 과정이 있을 수도 있다[9].

2.1 기존 행복 모델

행복 모델은 Wisconsin 대학의 J.C. Sprott[9]에 의해 식(1)과 같이 제안되었다.

$$\frac{dx^2(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = F(t) \tag{1}$$

여기서 β 는 제동 계수(붕괴율), ω 는 단위 시간당 반경 단위에서 발진의 자연 공진 주파수로서 일반적으로 $\omega=1$ 로 정의하며, $F(t)$ 는 외부에서 인가되는 힘이다.

2.2 Spring-Damper-mass 모델

Spring-Damper-Mass 기계 시스템에서 가장 기본적인 시스템이며 그림 1과 같이 나타내며 이에 대한 방정식은 식(1)과 같이 정리된다[4].

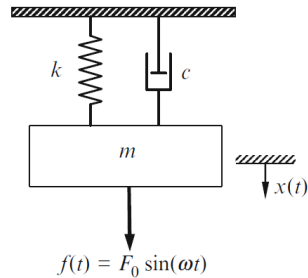


그림 1. Spring-Damper-Mass 회로
Fig. 1 Spring-Damper-Mass circuit

$$\begin{aligned} f_c(t) &= cx(t) \\ f_m(t) &= m \frac{dx(t)}{dt} \\ f_k(t) &= k \int x(t) dt \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 m 은 질량, c 는 제동 계수, k 는 스프링 상수이다.

식(1)은 독립 변수들인 제동계수(c), 질량(m), 스프링상수(k)에 대응하는 종속 변수들의 미분과 적분으로 식(2)과 같은 시간에 따라 변하는 시변의 2차 방정식으로 정리된다.

$$m \frac{dx^2(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \tag{2}$$

2.3 제안한 행복 모델

Spring-Damper-Mass 시스템에서의 시간의 변화량 (dt)에 대한 거리의 변화량(dx)을 속도(v)로 식(3)과 같이 정의한 것처럼 본 논문에서는 행복 모델을 유도

하기 위해서 행복감(H)을 식(4)과 같이 시간의 변화량(dt)에 대한 지각들의 변화량(dp) 식(4)과 같이 정의한다.

$$v = \frac{dx}{dt} [\text{m/s}] \quad (3)$$

$$H = \frac{dp}{dt} [\text{T/m}] \quad (4)$$

식(4)에서 지각은 사람 행동 또는 인식의 습관성(Habituation), 순응성(Acclimation), 적응성(Adaption)을 포함한다.

본 논문에서는 J.C. Sprott[9]에 의해 제안한 식(1)을 기반으로 식(2), 식(4)을 이용하여 Spring-Damper-Mass 시스템의 힘에 대응하는 것을 행복의 힘(F), 속도에 대응하는 것을 행복감(H)로 보고 식(5)과 같이 정의한다. 행복 모델에서 파라미터들은 제동(Control), 소망(Desire), 지각(Sense)로 정하여 사용한다.

$$\begin{aligned} F_c(t) &= cp(t) \\ F_d(t) &= d \frac{dp(t)}{dt} \\ F_s(t) &= s \int p(t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 c, d, s 는 각각 제동계수(Control coefficient), 소망계수(Desire coefficient), 지각계수(Sense coefficient)를 나타낸다.

제동 계수는 사람이 행복을 느낄 때 자연적으로 행복감이 줄어드는 계수를 말한다. 이 값이 0이면 기계 시스템에서 마찰이 없는 상태가 되어 진동수 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{d}}$ 의 값을 가지고 단진자 운동이 영원히 지속되어 아무런 반응이 일어나지 않을 것이다. 물론 제동 계수가 너무 크면 마찰이 작은 것과 동일하므로 진동 자체가 발생하지 않아 행복한 상태가 발생하여도 쉽게 일상적으로 돌아가서 큰 행복을 느끼지 못할 것으로 보인다. 그러나 제동 계수가 작으면 오래 동안 사람이 행복감을 느낄 수 있다.

소망계수는 원하는 것을 하고자 하는 소망의 척도를 나타내며 의지와 연관성을 갖는다. 소망 계수는 작은 일에도 행복할 수 있다는 감사의 마음과 연관된다. 이

값이 크면 작은 일에도 행복하다고 여겨 행복이 지속될 수 있다. 지각 계수는 행복감을 느끼는 것은 개인의 지각 능력에 의해 큰 편차를 가진다.

Spring-Damper-Mass 시스템에서 물체의 운동에너지와 스프링의 위치에너지 사이에 에너지 교환으로 진동이 발생하는 것처럼 행복 모델에서도 소망 계수와 지각 계수 사이에 의식(에너지) 교환으로 심리적, 신체적인 동요 현상이 일어나는 것으로 처리하였다.

본 논문에서 3개의 독립적인 파라미터인 통제계수, 소망계수, 지각계수를 고려하여 식(6)과 같은 2차식으로 표현되는 식을 유도할 수 있다. 식(6)은 식(1)과 유사하며 계수를 적절하게 조절함으로써 비선형적인 가동을 발생시킬 수 있다.

$$d \frac{dp^2(t)}{dt^2} + c \frac{dp(t)}{dt} + sp(t) = F(t) \quad (6)$$

여기서 $F(t)$ 는 외부에서 인가하는 힘으로서 주로 행복을 일으키는 사건을 말한다. 이러한 사례로는 복권에 당첨된다든지, 주기적인 약물 투입 또는 주기적인 게임 등이 포함될 수 있으며 실제 생활에서는 정현파 형태 또는 가우시안 파형 형태로 제공될 수 있다.

III. 행복 모델에서의 해석

식(4)의 왼쪽 항에 비선형 특성을 좌우하는 힘을 가진 상수항인 βp^3 을 추가하고 오른쪽 항에 외부에서 물리적인 행동에 대응하는 힘을 정현파 형태로 가정하여 인가하면 식(7)같이 정리된다.

$$d\ddot{p} + c\dot{p} + sp + \beta p^3 = F(t) \quad (7)$$

여기서 $\ddot{\quad} = \frac{d^2p}{dt^2}$, $\dot{\quad} = \frac{dp}{dt}$ 이며, 여기서 d 는 소망계수, c 는 통제 계수, s 은 민감성 계수, β 는 비선형성의 세기, $F(t)$ 는 주기적인 외력 또는 펄스 파형으로 나타낼 수 있다.

식 (7) 좌변항의 지각 계수 항과 비선형 항을 나타내면 그림 2과 같이 나타낼 수 있다.

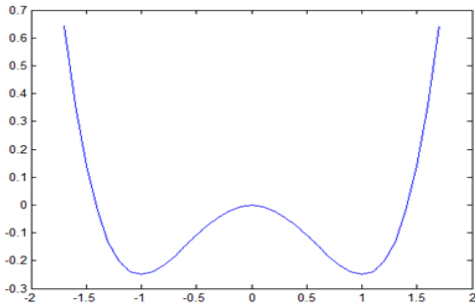


그림 2. 민감성 계수 항과 비선형 항
Fig. 2 Graph of sensitivity coefficient term and nonlinear term

식(7)은 일반적으로 기계 시스템에서는 Duffing 방정식이라고 부른다. 이 방정식으로부터 다양한 비선형 거동이 나타나는 것처럼 중독 모델에서도 다양한 비선형적인 거동이 나타난다.

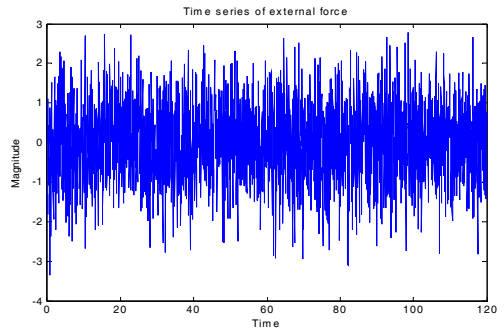
식(7)의 우변 항은 외부에서 제공하는 외부적인 힘 또는 자극으로서 주로 행복을 일으키는 사건으로 성적이 올랐든지, 복권에 당첨, 결혼 등이 될 수 있으며 본 논문에서는 이를 정현, 펄스, 가우시안 파형 형태로 가정하여 식(7)을 다양하게 변형하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

3.1 가우시안 백색 잡음 외부 입력

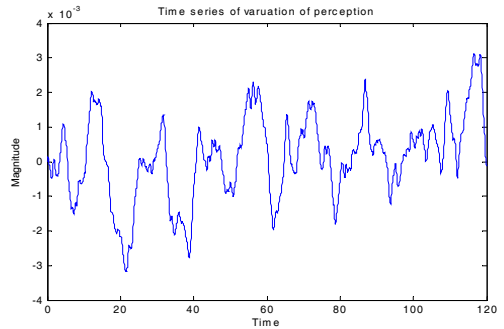
먼저 식(7)의 외부 입력 $F(t)$ 을 가우시안 백색 잡음으로 주었을 경우의 외부 입력의 결과와 지각 변화, 행복감에 대한 시계열 데이터를 나타내었다. 그림3의 (a)는 외부 입력으로서 가우시안 백색 잡음을 준 것으로 외부 자극을 우리 생활에서 자주 행복을 느끼는 다양한 요소를 반영한 것으로 가우시안 백색 잡음을 가정하였다. 그림3(b)은 지각 변화에 대한 시계열 데이터를 나타내었다. 이 지각 변화를 적분하면 그림 3(c)과 같은 행복 시계열을 얻을 수 있다. 행복 시계열의 평균은 궁극적으로 0이 된다.

그림 3에서 얻어진 지각 변화의 시계열과 행복 변화의 시계열을 이용하여 그림 4에 위상공간을 나타내었다. 그림 3과 4를 통하여 매우 행복을 나타내는 시계열과 위상 공간이 매우 랜덤한 형태로 나타남을 알 수 있다. 즉 우리의 생활이 가우시안 백색 잡음과 같은 형태라면 우리의 행복도 일정한 패턴이 없이 랜덤

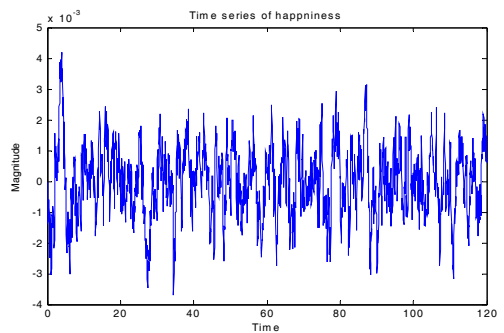
하게 나타난다고 할 수 있다.



(a) 외부 힘의 시계열 데이터
(a) Time series of external force



(b) 지각 변화의 시계열 데이터
(b) Time series of variation of perception



(c) 행복의 시계열 데이터
(c) Time series of happiness

그림 3. 행복 시계열 데이터
Fig. 3 Time series of Happiness

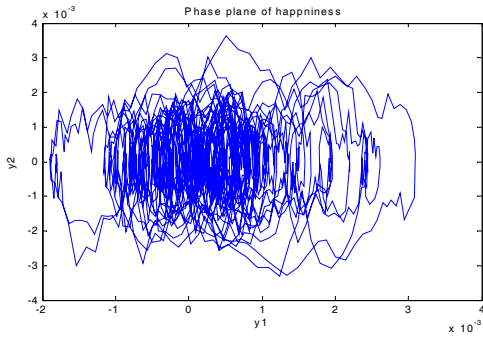


그림 4. 행복과 지각과의 위상 공간
Fig. 4 Phase portrait of happiness and perception

3.2 정현파 외부 입력

우리의 삶의 주기적인 변화 패턴을 가진다고 가정하고 외부 입력 $F(t)$ 을 정현파와 주기함수인 $A \sin \omega t$ 로 가정하여 식(7)에 적용한다.

그림 5는 소망 계수 0.5, 체동 계수 2.0, 지각 계수 1.0, 외부진폭 0.4135, $\omega = 1$ 로 놓고 계동계수에 대한 변화를 주었을 때의 시계열 데이터를 그림 6은 위상 공간을 보여준다.

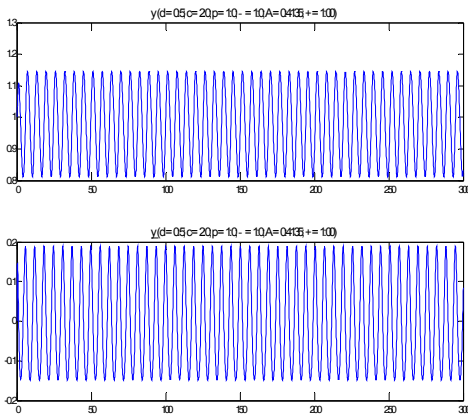


그림 5. 주기적 입력을 가한 행복 모델의 시계열 데이터(1주기 운동)

Fig. 5 Time series when applying periodic input of happiness(1-periodic motion)

그림 5와 그림 6에서 확인할 수 있듯이 주어진 파라미터 조건에서 1주기 운동이 일어남을 확인할 수 있다.

파라미터의 값을 다양하게 변화시키면 그림 7, 그림 8과 같은 다주기 운동, 그림 9와 그림 10과 같은 카오스 운동에 이름을 알 수 있다.

스 운동에 이름을 알 수 있다.

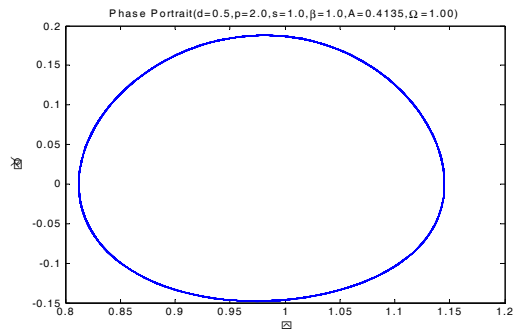


그림 6. 주기적 입력을 가한 위상공간(1주기 운동)
Fig. 6 Phase portrait of happiness and perception(1-periodic motion)

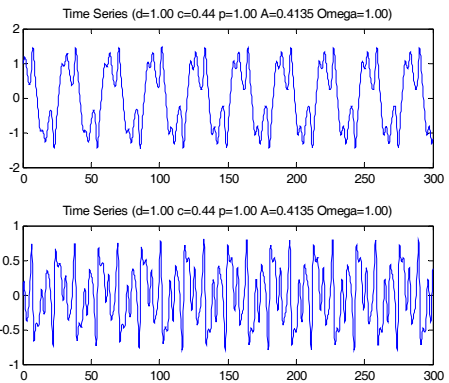


그림 7. 주기적 입력을 가한 행복 모델의 시계열 데이터(다주기 운동)

Fig. 7 Time series when applying periodic input of happiness(multi-periodic motion)

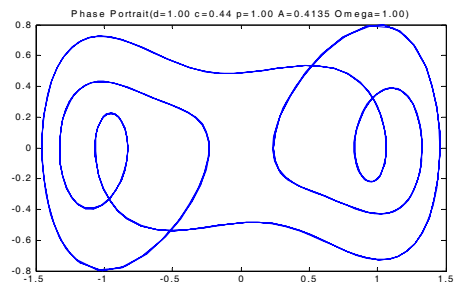


그림 8. 주기적 입력을 가한 위상공간(다주기 운동)
Fig. 8 Phase portrait of happiness and perception(multi-periodic motion)

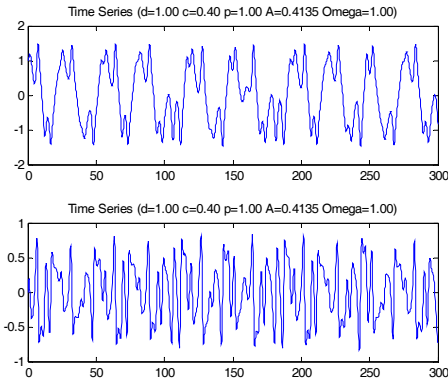


그림 9. 주기적 입력을 가한 행복 모델의 시계열 데이터(카오스 운동)
 Fig. 9 Time series when applying periodic input of happiness(chaotic motion)

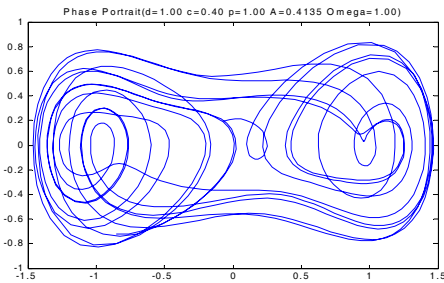


그림 10. 주기적 입력을 가한 위상공간(카오스 운동)
 Fig. 10 Phase portrait of happiness and perception(chaotic motion)

VI. 결론 및 향후 과제

본 논문에서는 행복 모델을 2차원의 Spring-Damper-Mass를 기반으로 증가적으로 동일한 모델을 제안하였다. 또한 제안한 모델을 통하여 외부 입력을 가우시안 백색 잡음과 주기적인 정현파 신호를 인가하여 이때 발생하는 행복 모델의 패턴을 살펴보았다. 가우시안 백색 모델의 경우 랜덤한 형태의 행복 신호가 나왔으며 주기적인 정현파 신호를 입력하였을 때 주기운동과 카오스 운동이 있음을 확인할 수 있었다.

Reference

- [1] S.-H. Yu, C.-H. Hyun, and M. Park, "Back-stepping Control and Synchronization for 4-D Lorenz-Stenflo Chaotic System with Single Input," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, vol. 11, no. 3, Sept. 2011, pp. 135-216.
- [2] S.-H. Yu, C.-H. Hyun, and M. Park, " Control and Synchronization of New Hyperchaotic System using Active Backstepping Design," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, vol. 11, no. 2, June 2011, pp. 77-83.
- [3] Y. Bae, "Diagnosis of power supply by analysis of chaotic nonlinear dynamics," *J. of The Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 8, no. 1, 2013, pp. 113-119.
- [4] Y. Bae, "Chaotic Phenomena in MEMS with Duffing Equation," *J. of The Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 6, no. 6, 2011, pp. 709-716.
- [5] Y. Bae and J. park "A Study on Obstacle Avoid Method and Synchronization of multi chaotic robot for Robot Formation Control based on Chaotic Theory," *J. of The Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 5, no. 5, 2010, pp. 534-540.
- [6] Y. Bae, " A study on chaotic phenomenon in rolling mill bearing," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 11, no. 4, Aug. 2001, pp. 315-319.
- [7] Y. Bae, J. Kim, Y. Kim, and Y. Shon, "Secure communication using embedding drive synchronization," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 13, no. 3, June 2003, pp. 310-315.
- [8] Y. Bae, "Chaotic Phenomena in Addiction Model for Digital Leisure," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, vol. 13, no. 4, Dec. 2013, pp. 291-297.
- [9] J.C. Sprott, "Dynamical Models of happiness," *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, vol. 9, no. 1, 2005, pp. 23-34.

저자 소개



김순환(Soon-Whan Kim)

1980년 한양대학교 통신공학과(공학사)
1982년 한양대학교 대학원 통신공학과(공학석사)

1981년~1984년 삼성전자
1985년~2002년 한국휴렛팩커드 임원
2002년~2012년 (주) ITpro / ITino 대표이사
2012년~현재 제주대학교 통신공학과 교수 (현) 통신공학과장
※ 관심분야 : Placement with Wire Congestion, IT (SI, SM, N/W), 산학 협력



최선경(Sun-Koung Choi)

2001년서울여자대학교 대학원 사회복지학과 졸업(사회복지학석사)
2006년서울여자대학교 대학원 사회복지학과 졸업(사회복지학박사)

2007년~현재 신라대학교 사회복지학과 교수
※ 관심분야 : 장애인 정보접근권, 시각장애인 웹접근성



배영철(Young-Chul Bae)

1984년 광운대학교 전기공학과(공학사)
1986년 광운대학교대학원 전기공학과(공학석사)

1997년 광운대학교대학원 전기공학과(공학박사)
1986년~1991년 한국전력공사
1991년~1997년 산업기술정보원 책임연구원
1997년~현재 전남대학교 전기·전자통신·컴퓨터공학부 교수
2002년~2002년 Brigham Young University 방문교수
2011년~2011년 University of Utah 방문교수
※ 관심분야 : Chaos Control and Chaos Robot, Robot control etc.



박영호(Young-Ho Park)

1988년 계명대학교 체육학 학사
1992년 경북대학교 대학원 체육학과 체육학석사
2000년 경북대학교 대학원 체육학과 이학박사

(현) 계명대학교 사회체육학과 교수
※ 관심분야 : 체육사, 레저스포츠, 융합형레저문화창출