

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 42(3), 191-198(2014)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2014.42.3.191>

유체-구조 연성 해석을 위한 common-refinement 기반

불일치 격자 경계면에서의 정보 전달 기법 연구

한상호*, 김동현**, 이창수*, 김종암*

The study of data transfer method non-matching meshes interface using common-refinement method for fluid-structure interface

Sangho Han*, Donghyun Kim**, Changsoo Lee* and Chongam Kim*

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University*

Continental Automotive Systems**

ABSTRACT

During multi-physics or multi-phase simulations accompanying fluid- structure- thermal interaction, data transfer problems always arise along non- matching interfaces caused by different computational meshes for each physical domain. Common- refinement scheme, among many available methods, is attractive since it is known to yield conservative and accurate data transfer for non- matching interface cases. This is particularly important in simulating compressible unsteady fluid- structure- thermal interaction inside solid propellant rockets, where grid size along solid- fluid interfaces is substantially different. From this perspective, we examine performances of common- refinement- based data transfer scheme between structured quadrilateral (structure part) and unstructured triangular (fluid part) meshes by comparing computed results with other data transfer methods.

초 록

본 연구는 유체-고체 연성 해석이 활발히 진행되고 있는 고체로켓의 3차원 연소실 상경계면 형상에 대해 정보 전달 기법 중 하나인 공통세분 기법의 적용을 목적으로 수행되었다. 본 기법은 불일치하는 경계면간 정보 전달에도 보존성과 정확도를 동시에 만족시킬 수 있다는 장점을 갖는다. 기법 구현은 상경계면에 공통표면을 구성하고 특정 오차를 최소화 시키는 최소화 내삽법을 적용하는 과정으로 수행되었다. 이를 바탕으로 다양한 다차원 상경계면 형상에서 연속 및 불연속 함수를 이용한 정보 전달 실험을 수행하였고, 다른 기법들과 해석 결과를 비교하였다.

Key Words : fluid- structure interaction(유체-구조 연성), data transfer scheme(정보 전달 기법), common- refinement method(공통세분 기법), non- matching interface(불일치 경계면)

† Received: September 9, 2013 Accepted: February 17, 2014

* Corresponding author, E-mail : chongam@snu.ac.kr

<http://journal.ksas.or.kr/>

pISSN 1225-1348 / eISSN 2287-6871

I. 서론

최근 각광 받고 있는 유체-구조 연성 해석은 유동에 의해 구조 변형이 발생하고 이 변형이 다시 유동 변화를 유발하여, 지속적으로 매우 강한 비정상 특성을 보이는 물리 현상의 전산해석을 위한 연구 분야이다. 유체-구조 연성 해석은 다 물리 해석 기법으로 그 적용분야가 매우 광범위하다. 그 중, 군사 및 우주 추진체로 널리 사용되는 고체 로켓 내부 연소실은 추진제 연소에 의한 고온, 고압의 연소 가스 발생과 유동 압력에 의한 추진제 그레인의 구조 변형 및 연소 현상에 의한 체적 변화 등 복잡한 물리 현상이 복합적으로 작용하기 때문에 유체-구조 연성 해석이 필수적이다. 그리고 일반적으로 유체영역은 고체영역에 비해 상대적으로 조밀한 격자를 필요로 하는 영역이 존재하게 되고 결국 유체와 구조 두 영역의 경계에서 격자가 서로 일치하지 않는 불일치 경계면이 형성된다. 유체-구조 연성 해석을 위해서는 불일치 상경계면에서 유체와 구조 각 영역의 해석을 위해 필요한 압력, 온도, 변위 등의 정보량 전달이 필수적이며, 전달의 정확도는 유체, 구조 해석에 매우 큰 영향을 미치게 된다. 특히, 고체 로켓 내부 상경계면에서는 고온의 압축성 유체 유동에서 발생하는 불연속적인 압력 정보가 전달되므로 정보 전달의 정확성과 보존성을 만족시키는 기법 적용이 매우 중요하다[1,2].

정보 전달 기법 중 공통세분 기법은 불일치 경계면 상에 서로 다른 두 격자의 기하학적 특성을

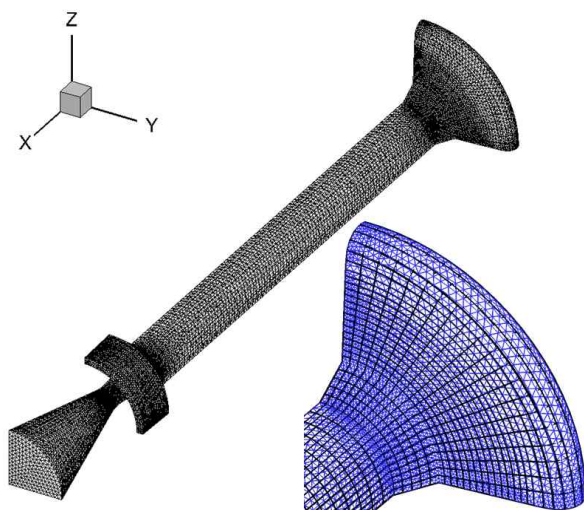


Fig. 1. Non-matching meshes on solid rocket combustion chamber surface : Fluid mesh indicated in blue and structure mesh in black

동시에 참조하는 공통표면을 구성하고, 공통표면 상에서 특정 오차를 최소화 시키는 수치 적분법을 이용해 정보 보간법을 수행한다. 따라서 정보 전달의 정확성과 보존성 두 만족 시키는 기법으로 알려져 있다[3-5].

본 연구는 Fig. 1 에 도시된 3차원 고체 로켓 연소실 내부의 유체-구조 연성 해석을 위한 공통세분 기반의 불일치 격자 간 정보 전달 기법 적용 및 정확성 및 보존성 확인을 목적으로 수행되었다.

II. 본론

2.1 공통세분 기법 구현

2.1.1 공통표면 구성

2.1.1.1 사용 격자

본 연구에서는 실제 고체 로켓의 유체-구조 연성 해석 시 발생할 수 있는 상황을 가정하여 공통표면을 구성하였다. 구조 부분 표면에서 사각형 격자, 유체 부분 표면은 삼각형 비정렬 격자가 사용된다고 가정하였다. Fig. 2는 본 연구에서 가정한 사각 정렬 격자, 삼각 비정렬 격자 사용에 의한 격자 불일치의 예이다.

2.1.1.2 격자점 투사

공통표면을 구성하기 위해 원천격자점과 목표격자점을 각각 상대편 격자 표면에 투사하는 과정이 필요하다. 격자점 투사 방향은 격자점을 포함하고 있는 격자 요소평면들의 법선벡터 평균으로 정의된다. 투사되는 위치는 상대 격자 평면과 투사 방향 벡터의 교점으로 정해진다[6].

공통표면은 원천격자와 목표격자에 투사된 각각의 격자점들을 선형 결합하여 얻는 공통점들로 구성된다. 따라서 두 격자의 기하학적 특성을 동시에 만족시키며 식으로 표하면 다음과 같다.

$$\alpha S + \beta T = \{x = \alpha S + \beta T(s) | s \in S\} \quad (1)$$

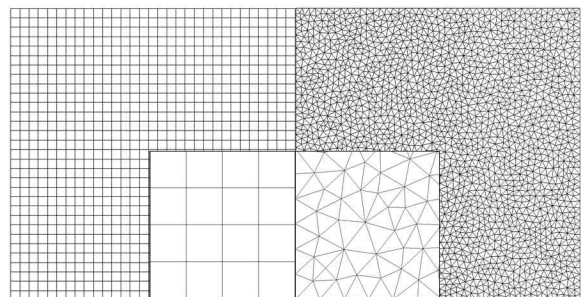


Fig. 2. Example of Structured quadrilateral mesh and unstructured triangular mesh

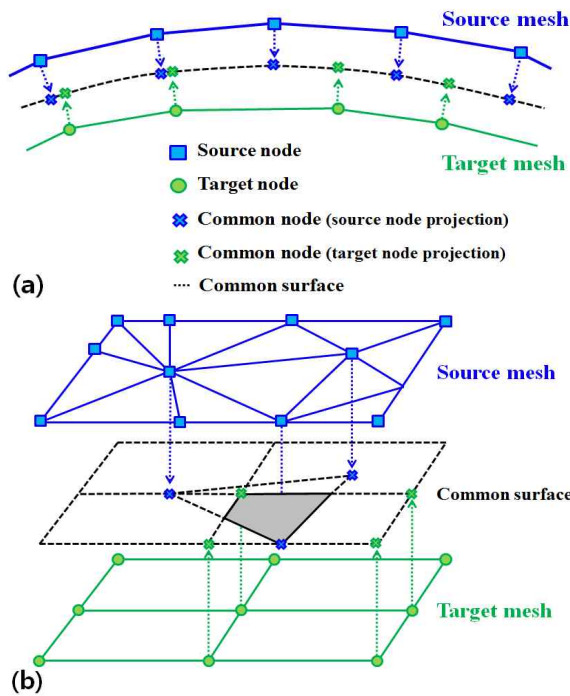


Fig. 3. Mesh node projection of non-matching interface : (a)Sectional view, (b)Projection view

식 (1)에서 α 와 β 는 음이 아닌 상수이며 $\alpha + \beta = 1$ 을 만족시켜야 한다. Fig. 3의 (a)와 (b)는 각각 불일치 경계면을 측면에서 본 단면도와 입체도이다. Fig. 3의 (a)는 원천격자점과 목표격자점의 투사 방향과 투사 후 평균 선형 결합하여 생성한 공통표면을 나타낸다. 사각형-삼각형 격자로 생성되는 공통표면의 subfacets은 다양한 다각형 형상으로 구성될 수 있음을 Fig. 3의 (b)에 나타내었다.

2.1.1.3 Subfacets 구성

공통표면 상의 subfacets을 구성하기 위해 공통점들을 원천격자와 목표격자의 형상 정보를 이용해 선분으로 연결한다. 예를 들어 Fig. 4의 (a), (b)와 같이 삼각형 격자가 원천격자이고 사각형 격자가 목표격자라면 각 격자에서 투사된 해당 공통점들은 삼각형 형상, 사각형 형상으로 선분이 연결된다. 즉, Fig. 5 (b)와 같이 공통표면 상에 투사된 격자점들이 두 격자를 겹쳐놓은 Fig. 5의 (a)와 같은 형상으로 연결되어야 한다. 그 후, 원천격자 형상으로 구성된 요소 중 하나를 기준요소로 정하고 목표격자 형상으로 구성된 요소들을 배경요소로 정의한다. 다음으로 기준요소와 겹치는 배경요소들을 선별한 후 기준요소의 선분과 겹치는 배경요소 선분의 교차점을 찾아

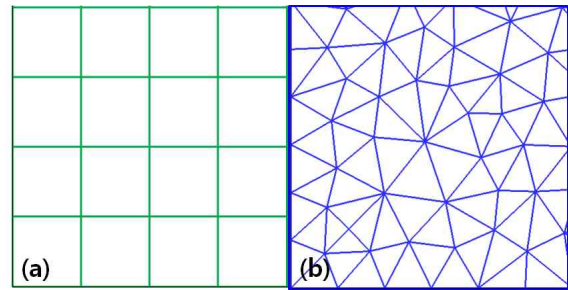


Fig. 4. (a) Source mesh, (b) Target mesh

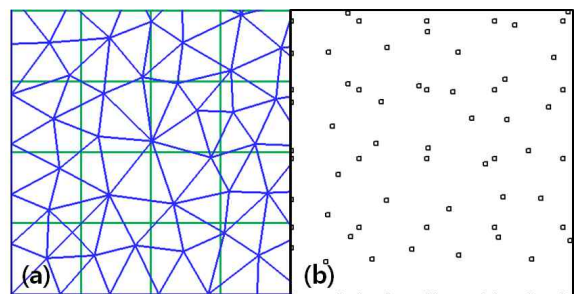


Fig. 5. (a) Overlap of source and target meshes, (b) Common nodes after nodes projection

공통점으로 포함시킨다. 마지막으로 기준요소의 한 점을 시작점으로 설정, 기준요소 선분을 따라 시계방향으로 진행하면서 교차점을 만날 경우 해당 배경요소의 선분으로 변경하여 진행한다. 이때 주의해야 할 사항은 기준요소의 한 점이 겹치는 배경요소의 선분 상에 위치할 때 계속 기준요소 선분을 따라 진행할지, 배경요소 선분으로 변경할지 판단해줘야 한다. 기준요소와 겹치는 모든 배경요소들에 대해 동일한 과정을 수행하면 해당 기준요소 상의 subfacets 구성이 완료된다.

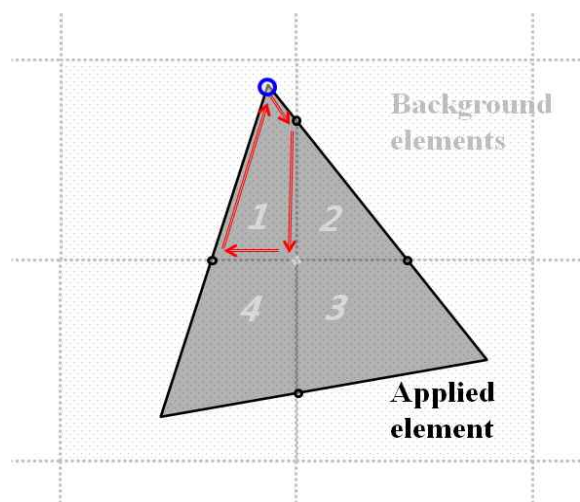


Fig. 6. Determining subfacets

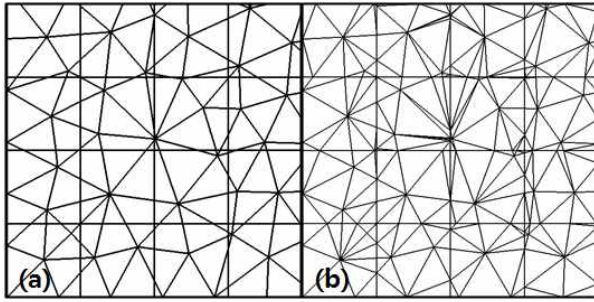


Fig. 7. (a) Subfacets on common surface,
(b) Subfacets after triangulation

이를 원천격자 형상의 모든 요소들에 대해 동일하게 수행하면 공통표면 상의 모든 subfacets를 구성할 수 있다. Fig. 6은 전술한 subfacets 구성 과정을 도식화 한 것으로, 삼각형 기준요소에 사각형 배경격자 4개가 겹치는 경우를 나타낸다. 기준요소의 시작점은 그림에서 파란 원으로 표시되어 있으며 화살표를 따라 진행하며 개별 subfacet을 구성하게 된다. 이와 같은 과정을 통해 구성된 subfacets은 Fig. 7의 (a)와 같다.

2.1.1.4 Subfacets 삼각화

삼각형-사각형의 불일치 격자일 경우 subfacets 형상이 다양한 다각형 형상으로 구성된다. 따라서 수치적분을 통한 정보 내삽 과정에서 필요한 형상함수를 일반화하여 적용하기 힘들다. 이 문제를 해결하기 위하여 임의의 다각형으로 이루어진 모든 subfacets이 삼각형으로 이루어지도록 나누어 주면 한 종류의 형상함수를 구성하여 정보 내삽을 일반화하여 효율적으로 수행할 수 있다. 이 과정에서 나뉘는 삼각형들의 형상이 정삼각형에 가까울수록 적분과정에서 오차가 발생할 가능성이 적어진다. 따라서 subfacets의 내각 중 가장 둔각을 선정하고 마주 보는 subfacets 점들로 새로운 선분을 생성, 삼각형을 구성하는 방법을 적용하여 최대한 높은 형상의 질을 유지하고 적분과정 중의 수치 오차를 줄이도록 하였다. Fig. 7의 (b)는 Fig. 7의 (a)의 subfacets을 삼각화한 결과를 도시한 예이다.

2.1.2 정보 내삽법

2.1.2.1 L2 최소화 기법

유체-구조 연성 계산에서 전달되는 정보는 편미분방정식 형태로 가정할 수 있다. 일반적으로 편미분 방정식의 근사해의 정량적인 표현은 internal form으로 나타나므로 L2-norm을 이용한 내삽법 적용이 가능하다.

L2 최소화 기법은 주고받는 정보의 차이의 L2-norm을 최소화시킨다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \int_{\Omega} (g-f)^2 dx}{\partial g_i} = 0 \quad (2)$$

식 (2)를 Reyleigh-Ritz-Galerkin 방법으로 표현하면,

$$\frac{\partial \int_{\Omega} (g-f)^2 dx}{\partial g_i} = 2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx g_j - 2 \int_{\Omega} \psi_i f dx \quad (3)$$

식 (3)에서 ψ_i 는 목표격자점의 형상함수, g_i 는 목표격자점으로 전달되는 정보량, f 는 원천격자의 정보량이다. $M = \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx$, $b = \int_{\Omega} \psi_i f dx$, $x = g_i$ 으로 정의하면 식 (3)을 $Mx = b$ 의 행렬식으로 표현할 수 있다[6,7].

2.1.2.2 Sobolev 최소화 기법

L2 최소화 내삽법을 이용하여 불연속 함수 형태의 정보를 전달할 경우 Gibb's 현상이 발생한다. 이 문제는 특히 고체 로켓 연소실 내부 유동처럼 충격과 발생으로 인한 불연속 압력 정보 전달 시 정확성을 크게 저하시킨다. 이를 방지하기 위해서 본 연구에서는 수치 진동을 감쇠시킬 수 있는 1차 sobolev norm을 적용하여 이를 최소화시키는 방법으로 정보 내삽을 수행하였다. 1차 sobolev norm은 전달 정보 함수와 형상함수의 1차 미분항을 L2-norm에 추가하여 다음과 같이 얻어진다[7,8].

$$\frac{\partial \int_{\Omega} (g-f)^2 + \alpha(g'-f')^2 dx}{\partial g_i} = 2 \sum_{j=1}^n g_j \int_{\Omega} \psi_i \psi_j + \alpha \psi_i' \psi_j' dx - 2 \int_{\Omega} \psi_i f + \alpha \psi_i' f' dx \quad (4)$$

식 (4)에서 α 는 임의의 경험적 상수로 α 값에 따라 수치 진동 감소량이 달라진다. 지나치게 큰 값은 정보 전달 정확성을 저하시키므로 상황에 따라 적절한 값을 적용시켜야 한다.

2.1.3 공통세분 기법 구현 검증

2.1.3.1 사용 격자 및 정보 전달 함수

공통세분 기법의 구현 검증은 참고논문의 조건과 동일한 격자와 정보 전달 함수를 사용해 수행하였다. 가상의 정보 전달 정보로 사용된 2차원 peaks 함수는 다음의 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 peaks(x,y) = & 3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2} \\
 & - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-x^2-y^2} \\
 & - \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2-y^2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

2.1.3.2 반복 계산

실제 유체-구조 연성 해석에서는 정보 전달이 반복적으로 수행되며 해석이 진행 된다. 그러므로, 본 연구에서도 정보 전달 함수를 이용해 반복적인 정보 전달을 수행하여 유체-구조 연성 해석을 모사하였으며 반복 전달 과정 중 각 기법의 정보 전달 특성을 파악하였다.

2.1.3.3 기법 구현 결과

공통세분 기법 구현 검증을 위해 상대오차 계산을 수행하였다. 상대오차 계산 수식은 다음과 같다.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \frac{|g_i - g_i^{exact}|^2}{|g_i^{exact}|^2} \tag{6}$$

식 (6)에서 $|\cdot|^2$ 는 L2-norm을 의미한다.

반복 계산 횟수 2^9 번으로 수행한 결과는 Fig. 8과 같다. Fig. 9는 본 연구에서 2^9 회 반복 계산을 수행한 결과이다. Fig. 8과 Fig. 9를 통해 본 연구에서 개발된 공통세분 기반의 정보 전달 기법의 신뢰성을 확인할 수 있다.

2.2 정보 전달 실험 결과 및 비교

2.2.1 평판 형상 불연속 함수 정보 전달 실험

두 개의 평판 격자 사이에서 불연속 함수의 정보 전달 실험을 수행하였다. 두 격자의 크기는, x축 y범위 $[-3, 3]$, $[-3, 3]$ 로 동일하다. 불연속 함수는 x축 범위 $[-3, -1.5]$, $[1.5, 3]$ 에서 0, $[-1.5, 0]$ 에서 2, $[0, 1.5]$ 에서 -2 값을 갖는다. 정보 전달의 보존오차는 다음 식으로 산출 한다[9].

$$\epsilon_c = \frac{\left| \sum_{i=1}^n g_i^{exact} - \sum_{i=1}^n g_i \right|}{\left| \sum_{i=1}^n g_i^{exact} \right|} \tag{7}$$

식 (7)에서 $|\cdot|$ 는 L1 norm을 의미한다.

각 정보 전달 기법들의 계산 시간은 consistent 내삽법 계산 시간을 기준으로 하여 Table 1로 나타내었다.

Figure 10의 (a), (b)는 각각 정보 전달 반복 회수 2^9 동안의 상대오차와 보존오차를 나타낸다. Fig. 10의 (a)에서 반복 횟수가 증가함에 따라 공

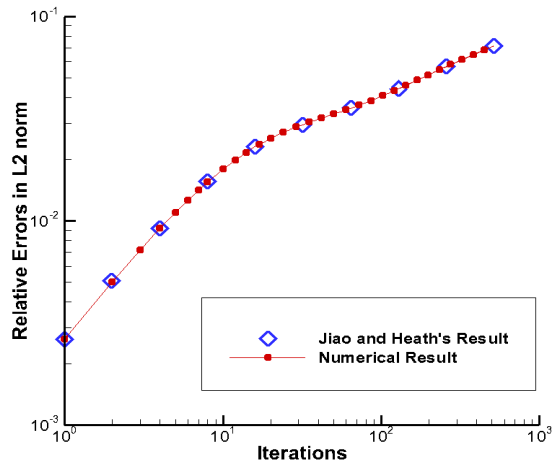


Fig. 8. Comparison relative errors in repeated transfer of peaks function between Jiao and Heath's data and numerical result

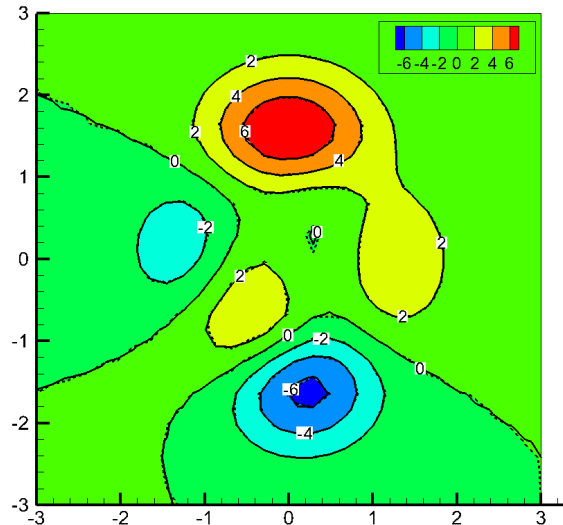


Fig. 9. Contour of peaks function after 2^9 iterations : Exact solution indicated in solid line and numerical result in dashed line

통세분 기법의 상대오차 증가량이 타 기법에 비해 적음을 알 수 있다. Fig. 10의 (b)를 통해 공통세분 기법의 보존오차는 유지되는 반면 타 기법의 보존오차는 증가하는 경향을 확인할 수 있었다. 이와 같은 결과는 정보 보존성을 만족하는 공통세분 기법의 특징으로 설명가능하며 반복 정보 전달 계산 시 장점으로 작용한다. 하지만 본 결과의 상대 오차 비교 그래프(Fig. 10의 (a))를 보면 공통세분 기법이 정확도 측면에서 consistent 기법 및 Thin Plate Spline(TPS) 기법

Table 1. Normalized execution time

Consistent interpolation	Thin plate splines	Multiquadric-biharmonic	Common-refinement
1	9.74	10.68	16.34

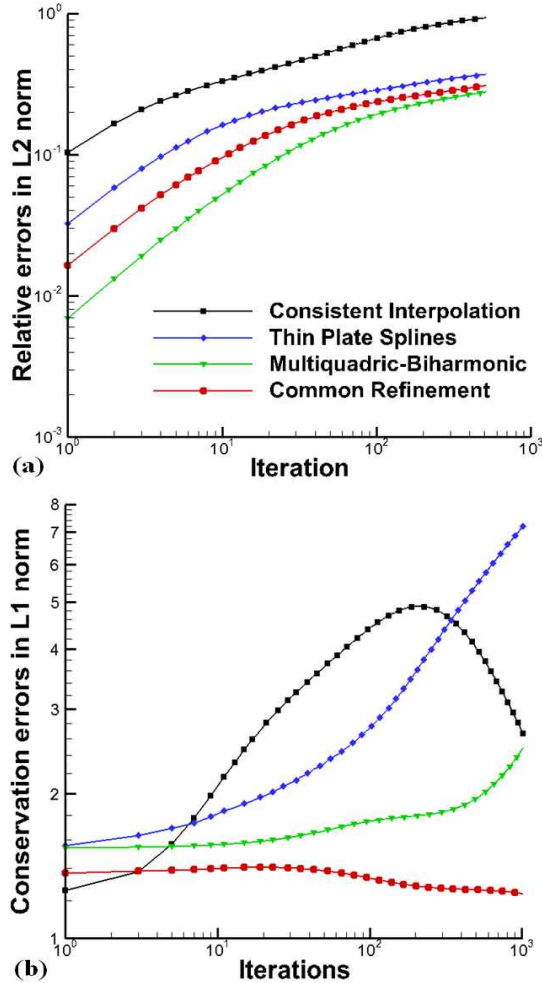


Fig. 10. Repeated discontinuous function data transfer : (a)Relative errors, (b)Conservation errors

에 비해 좋지 않은 결과를 갖는다. 이는 정확성과 보존성을 동시에 만족시키는 정보 전달 기법에 대한 연구인 본 논문의 취지에 맞지 않는 결과이다.

Figure 11의 (a), (b)는 각각 2⁵회 반복계산 후 Multiquadric-Biharmonic(MQ) 기법과 Sobolev 최소화 기법을 사용한 공통세분 기법의 정보 전달 결과이다. Fig. 11을 통해 2차 형상함수를 사용하는 MQ 기법은 불연속 지점에서 Gibb's 현상을 발생시킴을 확인할 수 있으며 L2 최소화 기법을 적용한 공통세분 기법의 결과에서도 비슷한 결과

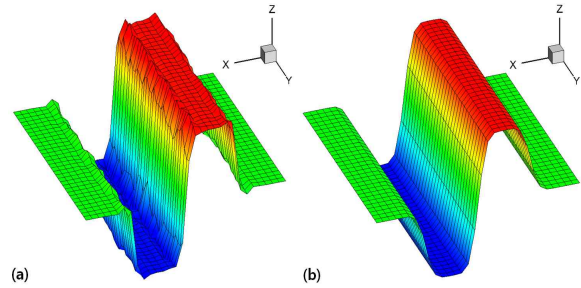


Fig. 11. Contour of discontinuous function after 2⁵ iterations : (a) Multiquadric-biharmonic, (b) Common-refinement using Sobolev minimization

를 얻을 수 있었다. 이를 통해 Sobolev 최소화 기법을 적용한 공통세분 기법에서 수치 진동이 감소됨을 확인할 수 있다[10].

2.2.2 고체로켓 형상 불연속 함수 전달 실험

본 연구의 최종 적용 대상인 3차원 고체로켓 연소실 형상에서 불연속 함수 전달 실험을 수행했다. 3차원 고체로켓 연소실 상경계면은 Fig. 1와 같이 평판 형상과 원통 곡면 형상이 복합적으로 적용되며, 모서리와 같이 형상이 급격히 변하는 부분이 존재하므로 강건한 공통표면 구성이 요구된다. 격자점 개수 327×17의 정렬 사각형 격자와 392×20 정렬 격자를 삼각화 시킨 비정렬 격자를 이용하여 실험을 수행하였으며 전달 함수는 다음 식 (8)과 같고 이로 인한 분포를 Fig. 12에 도시하였다.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{10}{1+e^{(-5z-1)}}, & (0.0 \leq z < 60.5) \\ \frac{10}{1+e^{(-5z-3)}}, & (60.5 \leq z < 121.0) \\ \frac{10}{1+e^{(-5z-5)}}, & (121.0 \leq z < 181.5) \\ \frac{10}{1+e^{(-5z-7)}}, & (181.5 \leq z < 242.0) \end{cases} \quad (8)$$

2⁹회 반복 계산 후의 상대오차와 보존오차 결과는 Fig. 13과 같다. 불연속 함수 전달 실험에서 공통세분 기법은 정확성과 보존성 측면에서 타 기법보다 월등히 좋은 결과를 도출하였다. TPS와 MQ 기법은 반복 계산 초기부터 진동이 매우 크게 발생하며 정확성과 보존성 모두 만족시키지 못하지만 공통세분 기법은 그나마 비교 가능한 consistent 내삽법보다 상대오차 적층이 적어 높은 정확성을 확보했으며, 보존성을 월등히 만족시키는 결과를 도출하였다. Fig. 14는 2⁶회 반복

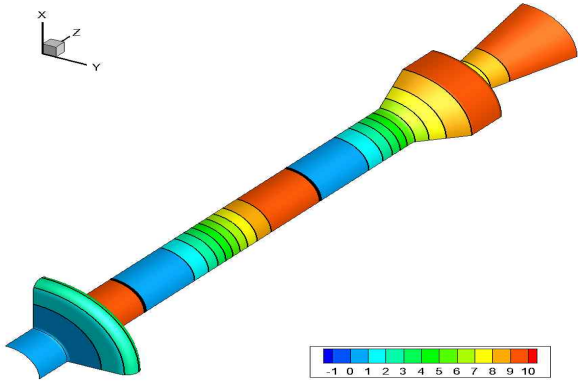
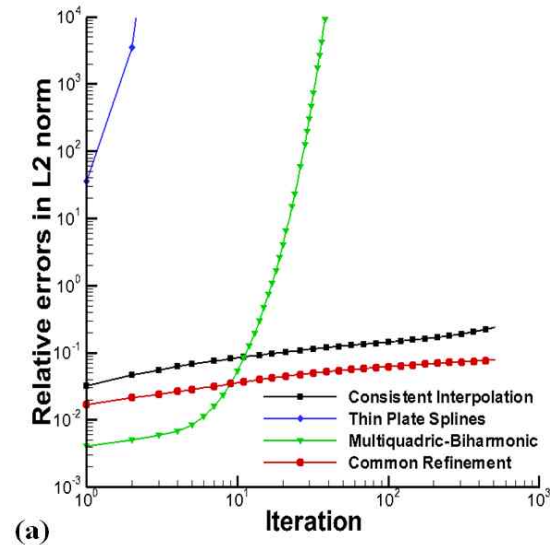
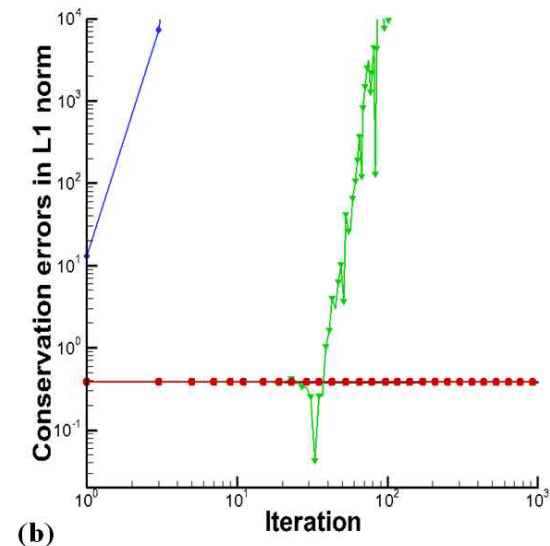


Fig. 12. 3-D discontinuous exponential function : Contour of function value on 3-D rocket combustion chamber interface

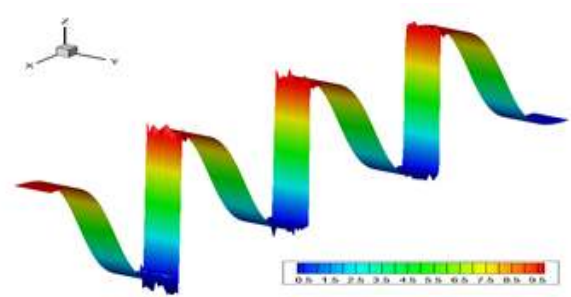


(a)

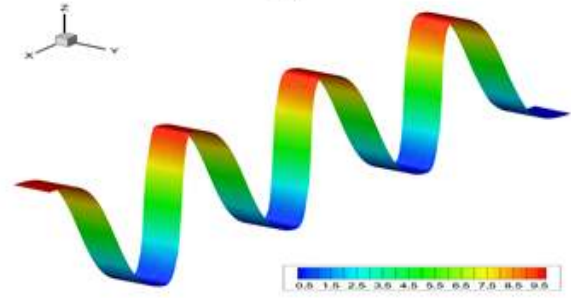


(b)

Fig. 13. Repeated discontinuous function data transfer : relative errors & conservation errors



(a)



(b)

Fig. 14. Common-refinement data transfer result of repeated transfer of 3-D discontinuous exponential function after 2^6 iterations : (a) L2 minimization, (b) Sobolev minimization

계산 후의 L2 & Sobolev 최소화 방법의 결과 비교이며 차이를 확인하기 위하여 좌표 변환 후의 좌표계에서 도시하였으며 이를 통해 Sobolev 최소화 방법이 수치진동을 효과적으로 억제함을 확인할 수 있다[11,12].

III. 결 론

평면 형상, 불연속 함수 형태의 정보 전달 실험에서 공통세분 기법은 타 정보 전달 반복 횟수가 증가함에도 정확성을 유지하였다. 정보 보존성 측면에서도 보존오차가 일정하게 유지되는 반면 타 기법은 오차가 증가되어 보존성을 만족시키지 못함을 알 수 있었다. 또한 Sobolev 최소화 기법을 적용해 수치 진동을 감소시킬 수 있었다.

공통세분 기법의 장점은 실제 고체로켓 유체-구조 연성 해석 과정 형상을 모사한 불연속 함수 전달 실험에서도 동일하게 확인되었다. 불연속 함수 전달 실험에서 consistent 내삽법은 불연속 지점에서 오차가 집중적으로 발생하여 회 반복 계산 후 본래 함수 형상을 완전히 상실하였다. TPS와 MQ 기법은 연속 함수 전달과 동일하게

매우 큰 진동을 발생시켜 정확성과 보존성 모두 만족시키지 못하였다. 반면, Sobolev 최소화 방법을 적용한 공통세분 기법은 불연속 지점의 수치 진동을 효과적으로 감쇠시키며 연속 부분의 형상을 유지, 오차를 최소화 시켰다.

공통세분 기법의 상대오차는 다른 기법에 비해 적층이 적어 정확성을 가장 잘 만족시켰으며, 보존성을 거의 완벽하게 만족시키는 장점이 유지되었다. 이를 바탕으로 실제 유체-구조 연성 해석 시 정보 전달 기법으로 TPS와 MQ 기법 사용은 무리가 있으며, 공통세분 기법 적용이 가장 적절하다고 판단된다.

후 기

본 연구는 교육과학기술부의 우주기초원천기술 개발 사업(NSL, National Space Lab, No. Grant 2009-0091724), 국방과학연구소 용역과제의 지원을 받아 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

References

- 1) Han, S., Choi, H., Kim, C., Hwang, C., Jung, G., and Oh, J., "ALE-Based FSI simulation of solid propellant rocket interior," 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida, 4-7 January 2010.
- 2) Han, S., and Kim, C., "A full burning FSI simulation of solid propellant rocket interior," 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Nashville, Tennessee, 9-12 January 2012.
- 3) Jiao X., and Heath MY., "Common-refinement based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simulations," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 61, No. 14, 2004, pp.2402~2427.
- 4) Farhat, C., Lesoinne, M., and LeTallec, P., "Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 157, No. 1-2, 1998, pp.95~114.
- 5) Franke, R., "Scattered data interpolation: test of some methods," Mathematics of Computation, Vol. 38, No. 157, 1982, pp.181~200.
- 6) Jiao, X., and Heath, MT., "Overlaying surface meshes (part 1): algorithms," International Journal of Computational Geometry and Applications Vol. 14, No. 6, 2004, pp.379~402
- 7) Jamin, R. K., Jiao, X., Geubelle, P. H. and Loth, E., "Assessment of conservative load transfer for fluid-solid interface with non-matching meshes," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 64, No. 15, 2005, pp.2014~2038.
- 8) Duchon, J., "Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces," In Constructive Theory of Functions of Several Variables, Schempp W, Zeller K (eds). Springer: Berlin, 1976, pp.85~100.
- 9) Jamin, R. K., Jiao, X., Geubelle, P. H. and Loth, E., "Conservative load transfer along curved fluid - solid interface with non-matching meshes," Journal of Computational Physics, Vol. 218, No. 1, 2006, pp.372~397.
- 10) Marilyn, J., Smith, Dewey, H., Hodges, Carlos, E. S., and Cesnik, "Evaluation of Computational Algorithms Suitable for Fluid-Structure Interaction," Journal of Aircraft, Vol. 37, No. 2, 2000, pp.282~294.
- 11) Hardy, R. L., "Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces," Journal of Geophysical Research, Vol. 76, No. 8, 1971, pp.1905~1915
- 12) Harder, R. L. and Desmariaia, R. N., "Interpolation Using Surface Splines," AIAA Journal, Vol. 9, No. 2, 1972, pp.189~191.