

# GA기반의 슬라이딩 모드 제어를 이용한 Pehlivan 카오스 시스템의 동기화

이운형<sup>1</sup> · 진강규<sup>2</sup> · 정병건<sup>3</sup> · 오세준<sup>4</sup> · 소명옥<sup>†</sup>

(원고접수일 : 2013년 9월 17일, 원고수정일 : 2013년 10월 29일, 심사완료일 : 2014년 4월 18일)

## Synchronization of the pehlivan chaos system using GA-based sliding mode control

Yun-Hyung Lee<sup>1</sup> · Gang-Gyoo Jin<sup>2</sup> · Byung-Gun Jung<sup>3</sup> · Sea-June Oh<sup>4</sup> · Myung-Ok So<sup>†</sup>

**요약:** 본 논문에서는 슬라이딩 모드제어와 유전알고리즘(GA)을 결합하여 Pehlivan 카오스 시스템의 동기화 문제에 대해 다룬다. 이를 위해 우선 Pehlivan 카오스 시스템의 특징에 대해 간단히 살펴본다. 다음으로 보편적으로 사용되는 기존의 슬라이딩 모드 제어 기법을 설명하고, 본 논문에서 제안하는 GA를 이용한 설계방법을 제안한다. 본 논문에서 제안하는 방법은 기존의 슬라이딩 모드 제어 기법에서 사용자가 선정해야 하는 파라미터(슬라이딩 평면 및 제어 이득)를 GA를 통해 탐색하는 방법이다. 이때 사용하는 GA는 MATLAB Toolbox에서 제공하는 것을 사용하였으며 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안한 기법의 유효성을 살펴본다.

**주제어:** Pehlivan 카오스 시스템, 동기화, 유전알고리즘, 적합도 함수, 슬라이딩 모드 제어

**Abstract:** This paper investigates the problem of synchronization of the Pehlivan chaotic system based on sliding mode control and GA. For this, a brief overview of the Pehlivan chaotic system is given. Then, the conventional sliding mode control technique is described and a synchronization method using GA strategy is proposed. The proposed method is that the GA searched the parameters including sliding plane and control gains) selected by the designer in the sliding mode control are searched optimally through the GA. The GA in the MATLAB Toolbox was used and simulation work is shown to illustrate the effectiveness of the synchronization schemes for the chaotic system.

**Keywords:** Pehlivan chaotic system, Synchronization, GA, Fitness function, Sliding mode control

## 1. 서 론

50여 년 전 일기예보의 이론적 예측을 시도하던 미국의 기상학자 에드워드 로렌츠(E. Lorenz)가 초기상태의 미묘한 차이가 기상모델(weather model)에 예측할 수 없는 큰 변화를 일으키는 현상을 발견하고 이를 이론적으로 정립하면서 혼돈 카오스 이론(chaos theory)의 토대가 되었다. “갈매기의 날

갓짓 한 번이 날씨를 영원히 변화시키기에 충분하다”고 말한 데서 유래되어 통상적으로 이 현상을 나비효과(butterfly effect)로 설명하고 있다. Lorenz 모델이 소개된 이후 카오스 거동은 비선형 시스템의 해석에 있어서 중요한 주제 중의 하나로 다루어져 왔고, 동적 시스템의 카오스 거동은 일반적으로 초기 조건에 민감한 의존성을 갖는 것으로 알려져 있다.

† Corresponding Author: Division of Marine Engineering, Korea Maritime and Ocean University, 727 Taejong-ro, Yeongdo-gu, Busan, 606-791, Korea, E-mail: smo@kmou.ac.kr, Tel: 051-410-4248

1 Department of Education, Korea Port Training Institute, Busan, E-mail: domse54@daum.net, Tel: 051-621-0550

2 Division of IT, Korea Maritime and Ocean University, E-mail: ggjin@kmou.ac.kr, Tel: 051-410-4341

3 Division of Marine Engineering, Korea Maritime and Ocean University, E-mail: bgjung@kmou.ac.kr, Tel: 051-410-4269

4 Division of Marine Engineering, Korea Maritime and Ocean University, E-mail: sj505@kmou.ac.kr, Tel: 051-410-4285

잘 알려진 카오스 시스템으로는 Rössler 시스템[1], Chen 시스템[2], Lü-Chen 시스템[3], Liu 시스템[4] 등이 있으며 이들은 모두 3차원으로 이루어지는 특징을 갖는다.

지난 10년 동안 비선형 시스템의 카오스 거동에 대한 제어는 많은 연구자의 관심과 흥미의 대상이 되어 왔고, 또 카오스 시스템은 통신보안[5], 암호체계[6], 로봇[7], 신경회로망[8] 등 과학, 공학 분야에 널리 응용되어 왔다.

특히 카오스 시스템의 동기화 문제는 Pecora와 Carroll[9]이 처음 제시한 이후 많은 연구자들이 관심을 갖는 분야로 비선형 궤환(nonlinear feedback) 방법[10], 능동 제어(active control) 방법[11][12], 백스텝핑[13] 방법, 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control) 방법[14][15] 등이 있다.

이들 연구 대부분은 주-종(master-slave) 또는 구동-응답(drive-response) 유형을 취하고 있다. 하나의 카오스 시스템이 주 또는 구동 시스템이 되면 다른 하나는 종 또는 응답 시스템이 되는 형태로, 동기화의 최종 목적은 응답 시스템을 제어하기 위해 구동 시스템의 출력을 이용하여 응답 시스템의 상태가 구동 시스템의 상태에 점근적으로 추종하게 하는 것이다.

본 논문에서는 위와 같은 유형을 적용하고, 슬라이딩 모드 제어 방법과 최적화 도구의 하나인 GA(Genetic Algorithm)를 결합한 카오스 시스템의 동기화 문제를 다룬다.

특히, 본 논문에서는 슬라이딩 모드 제어 시 설계자가 선정해야 하는 슬라이딩 평면과 제어기의 이득을 GA로 탐색하는 GA 기반의 슬라이딩 모드 제어 기법을 제안한다. 이때 GA는 주어진 평가함수를 최소화 시키는 관점에서 파라미터를 탐색하게 된다.

제안하는 방법은 Pehlivan 카오스 시스템에 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하여 그 유효성을 확인한다.

## 2. 카오스 시스템

### 2.1 Pehlivan 시스템

본 논문에서 다루는 모델은 Pehlivan[17]에 의해

제안된 것으로서 식 (1)과 같이 표현되며, Lorenz 모델의 변형된 한 종류(family)이다.

$$\dot{x} = y - x \tag{1a}$$

$$\dot{y} = ay - xz \tag{1b}$$

$$\dot{z} = xy - b \tag{1c}$$

여기서  $x, y, z$ 는 상태변수이고,  $a$ 와  $b$ 는 양의 실수로 간주된다. 식 (1)에서 알 수 있듯이 방정식은 2개의 비선형 항  $xy, xz$ 를 내포하고 있다.

### 2.2 Pehlivan 시스템의 동특성

Pehlivan 시스템의 동특성을 좀 더 자세히 살펴 보기 위해 위상 궤적을 Figure 1에 나타내었다. 그림을 통해 확인할 수 있듯이 Pehlivan 시스템은 전형적인 카오스 특성을 보여주고 있다.

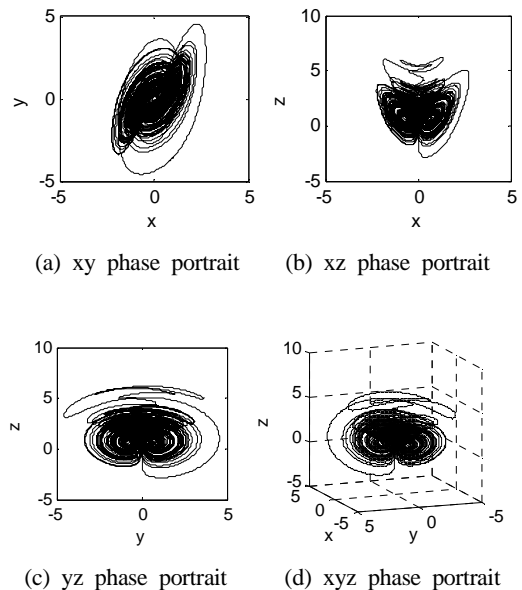
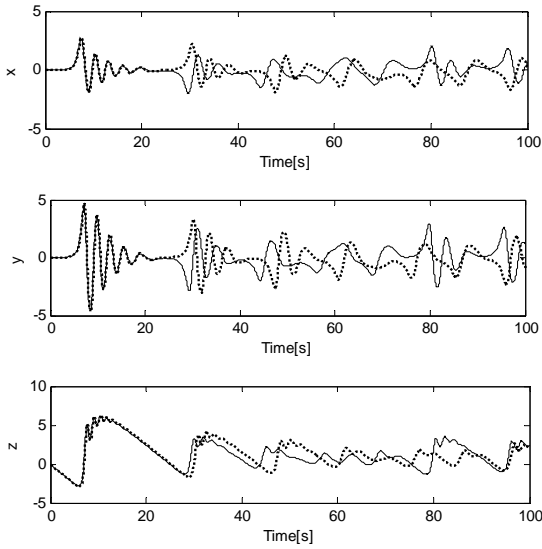


Figure 1: Portraits of the Pehlivan system

Figure 2는 초기상태가  $[0.001 \ 0.001 \ 0]^T$ 와  $[0.001 \times 10^{-3} \ 0.001 \ 0]^T$ 인 경우의 시간응답을 나타낸 것이다. 일반적으로 카오스 시스템이 초기상태의 선택에 영향을 많이 받듯이 Pehlivan 시스템도 초기상태 값에 매우 민감함을 보여주고 있다.



**Figure 2:** Responses of the Pehlivan system in different initial conditions(solid line : initial conditions are  $[0.001 \ 0.001 \ 0]^T$ , dotted line : initial conditions are  $[0.001 \times 10^{-3} \ 0.001 \ 0]^T$ )

## 2. 카오스 시스템의 동기화

식 (1)로 기술되는 Pehlivan 시스템을 구동 시스템(master/drive system)으로 가정하고, 이를 편의상 벡터  $\mathbf{x}$ 로만 표시하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 - b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ 이다.}$$

한편 식 (3)을 종속시스템(slave or response system)으로 간주한다.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{u} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 는 종속시스템의 상태벡터,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3] \in \mathbb{R}^3$ 는 종속시스템을 구동시스템과 동기화시키기 위해 설계해야 하는 제어입력 신호이다.

호이다.

동기화 오차 신호를 다음과 같이 정의하면

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad (4)$$

오차 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u} \quad (5)$$

$$\text{여기서 } \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 + x_1x_3 \\ y_1y_2 - x_1x_2 \end{bmatrix}$$

이다.

그러면 카오스 시스템의 동기화는 식 (6)을 만족하는 제어입력  $\mathbf{u}$ 를 설계하는 문제로 생각할 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0 \quad (6)$$

이때  $\|\cdot\|$ 은 Euclidean norm을 의미한다.

## 3. GA 기반의 슬라이딩 모드 제어

### 3.1 슬라이딩 모드 제어기

슬라이딩 모드 제어를 이용한 카오스 시스템의 동기화 문제는 여러 문헌[14]-[16]에서 찾아볼 수 있으며 그 과정을 살펴보면 다음과 같다.

능동 제어(active control) 설계법을 적용하면 제어입력은 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{k}\mathbf{w}(t) \quad (7)$$

식 (7)을 식 (5)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{k}\mathbf{w}(t) \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T$ 는 행렬의 쌍  $(\mathbf{A}, \mathbf{k})$ 가 가제어하도록(controllable) 선정하는 이득 벡터이다. 결국 카오스 시스템의 동기화 문제는 식 (8)로 표현되는 선형 시스템에 대해 적절한 신호  $\mathbf{k}\mathbf{w}(t)$ 를 이용하여  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ 으로 안정화 시키는 문제로 귀착된다.

#### 3.1.1 슬라이딩 평면 설계

슬라이딩 모드 제어 기법을 적용하면 슬라이딩 평면은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$s(\mathbf{e}) = \mathbf{C}\mathbf{e} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ c_3]$ 로 설계자가 선정하는 상수벡터이다.

슬라이딩 모드 제어 시 제어 시스템은  $s(\mathbf{e}) = 0$ ,  $\dot{s}(\mathbf{e}) = 0$ 을 만족하며, 식 (8)을 이용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{s}(\mathbf{e}) = \frac{\partial s(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{k}w(t)] = 0 \quad (10)$$

식 (10)을  $w(t)$ 에 대해 정리하면 등가제어 입력  $w_{eq}(t)$ 는 다음과 같다.

$$w_{eq}(t) = -(\mathbf{C}\mathbf{k})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{e}(t) \quad (11)$$

이때  $(\mathbf{C}\mathbf{k})^{-1}$ 은 반드시 존재해야 한다.

### 3.1.2 슬라이딩 모드 제어기 설계

본 논문에서 도달 법칙(reaching law)은 식 (12)와 같은 비례율 도달 법칙(constant plus proportional rate reaching law)을 적용한다.

$$\dot{s} = -q\text{sgn}(s) - rs \quad (12)$$

여기서  $\text{sgn}(\cdot)$ 는 부호함수(sign function)이고, 슬라이딩 모드의 이득  $q > 0$ ,  $r > 0$ 은 슬라이딩 조건을 만족하고, 슬라이딩 움직임(sliding motion)이 일어나도록 적절하게 선정해야 한다.

식 (10)과 식 (12)에 의해 제어입력  $w(t)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$w(t) = -(\mathbf{C}\mathbf{k})^{-1}[\mathbf{C}(r\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{e} + q\text{sgn}(s)] \quad (13)$$

## 3.2 안정도 해석

식 (13)을 식 (8)에 대입하고 정리하면 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} - \mathbf{k}(\mathbf{C}\mathbf{k})^{-1}[\mathbf{C}(r\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{e} + q\text{sgn}(s)] \quad (14)$$

식 (14)의 안정성을 보장하기 위해 다음과 같은 리아프노프(Lyapunov) 후보 함수를 정의한다.

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}s^2(\mathbf{e}) \quad (15)$$

이 함수의 미분은 다음과 같다.

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = s(\mathbf{e})\dot{s}(\mathbf{e}) = -rs^2 - q\text{sgn}(s)s < 0 \quad (16)$$

따라서 리아프노프 안정도 이론에 따라서 식 (14)는 모든 초기치  $\mathbf{e}(0) \in \mathbf{R}^3$ 에 대하여 점근적으로 안정하다.

## 3.2 GA 기반의 슬라이딩 모드 제어기

3.1절에서 설명한 슬라이딩 모드 제어는 잘 정형화되어 있어 설계자는 슬라이딩 평면  $s(\mathbf{e}) \in \mathbf{R}^{1 \times 3}$ 와 이득벡터  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ ,  $r$ ,  $q$ 를 적절하게 선정하는 문제로 귀결된다.

본 논문에서는 이와 같이 설계자가 시행착오로 선정하는 슬라이딩 평면의 상수벡터( $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ )와 제어기 이득을 GA를 이용하여 탐색하기 위하여 식 (13)을 다음과 같이 다시 정리한다.

$$w(t) = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 + \beta\text{sgn}(s) \quad (17)$$

여기서 부호함수  $\text{sgn}(\cdot)$ 은 채터링 현상을 일으킬 수 있으므로 이를 제거하기 위해서 본 논문에서는 식 (18)과 같은 포화함수(saturation function)를 사용하였다.

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1, & s > 1 \\ s, & -1 < s < 1 \\ -1, & s < -1 \end{cases} \quad (18)$$

그러면 GA가 최적으로 동조하게 되는 파라미터는  $\mathbf{x}_{ch} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta]^T \in \mathbf{R}^{7 \times 1}$ 로 모두 7개가 된다. 이를 위해 본 논문에서는 MATLAB 2012b의 GA Optimization toolbox를 이용하며, 이때 사용된 GA 파라미터는 Table 1에 정리하여 나타내었다.

또한, 적합도 평가를 위한 목적함수는 다음과 같은 함수를 적용하였다.

$$J = \int_0^{t_f} \mathbf{e}^2(t) dt \quad (19)$$

여기서  $t_f$ 는 설계자가 선정하는 최종적분시간으로 충분히 큰 시간이다.

**Table 1:** The parameters of GA

Parameters	Description
population type	double vector
population size	20
Scaling function	Rank
Selection	Stochastic uniform
Crossover fraction	0.8
Mutation	Constraint dependent
Crossover	Scattered
Migration	Fraction : 0.2
	Interval : 20

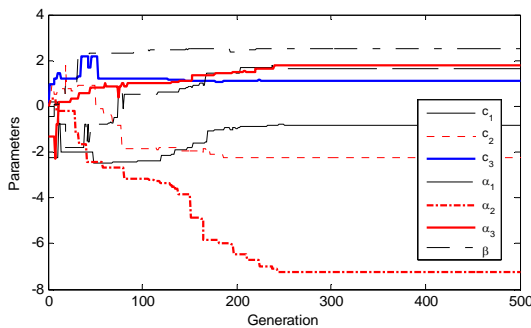
### 4. 시뮬레이션

Pehlivan 카오스 시스템의 동기화를 위해 식 (2)를 구동시스템으로 식 (3)을 종속시스템으로 고려한다. 이때 상수  $a$ 와  $b$ 는 각각 0.5의 값을 갖는다.

동기화 오차인 식 (4)를 이용하면 식 (5)는 다음과 같이 행렬로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e} + \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 + x_1x_3 \\ y_1y_2 - x_1x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{u} \quad (20)$$

Figure 3은 슬라이딩 평면과 제어이득이 GA를 통해 탐색되는 과정을 나타낸 것이며, 식 (21)과 식 (22)는 그 결과를 나타낸 것이다. 이때 탐색구간은  $-30 \leq c_1, c_2, c_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 30, -2.5 \leq \beta \leq 2.5$ 이며, 경험적으로 선정하였다.

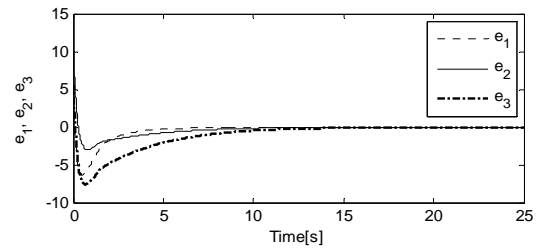


**Figure 3:** The searching results of GA

$$\mathbf{s}(\mathbf{e}) = \mathbf{C}\mathbf{e} = [-0.84 \quad -2.26 \quad 1.09]\mathbf{e} \quad (21)$$

$$\mathbf{w}(t) = [1.65 \quad -7.23 \quad 1.79]\mathbf{e} + 2.49 \mathbf{sat}(\mathbf{s}) \quad (22)$$

제안한 방법의 유효성을 살펴보기 위해 구동시스템과 종속시스템의 초기상태가 각각  $\mathbf{x}(0)=[0.001 \quad 0.001 \quad 0]^T$ 과  $\mathbf{y}(0)=[4 \quad 10 \quad 5]^T$ 인 상태에서 시뮬레이션을 실시하였다. 비교적 큰 차이를 갖는 서로 다른 초기상태인 경우에도 종속시스템은 구동시스템에 잘 동기화 되는 것을 Figure 4의 오차응답을 통해 확인할 수 있다.



**Figure 4:** Dynamics of the synchronization errors with the controller activated at  $t=0[s]$

### 5. 결론

본 논문에서는 Pehlivan 카오스 시스템의 동기화 문제에 대해 다루었다. 동기화의 접근방법으로는 구동시스템 그리고 종속시스템에 제어입력이 포함되는 유형을 사용하였다. 또한, 다양한 제어문제에 잘 정형화되어 있는 슬라이딩 모드 제어 기법에 최적화 알고리즘인 GA를 결합하여 슬라이딩 평면과 제어기 이득을 탐색시키는 방법을 제안하였다.

제안한 방법으로 컴퓨터 시뮬레이션을 실시한 결과 종속시스템은 서로 다른 초기조건 하에서 구동시스템과 잘 동기화 되는 것을 확인하였다.

### 참고문헌

[1] O. E. Rossler, "An equation for continuous chaos," Physics Letters A, vol. 57, no. 5, pp. 397-398, 1976.  
 [2] G. Chen and T. Ueta, "Yet another chaotic attractor," International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 9, no. 7, pp. 1465-1466,

- 1999.
- [3] J. Lü and G. Chen, "A new chaotic attractor coined," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 3, pp. 659-661, 2002.
- [4] C. Liu, T. Liu, L. Liu, and K. Liu, "A new chaotic attractor," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 22, no. 5, pp. 1031-1038, 2004.
- [5] M. Feki, "An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 18, no. 1, pp. 141-148, 2003.
- [6] R. Rhouma and S. Belghith, "Cryptanalysis of a chaos based cryptosystem on DSP," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 2, pp. 876-884, 2011.
- [7] C. K. Volos, I. M. Kyripanidisb, and I. N. Stouboulosb, "A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 60, no. 4, pp. 651-656, 2012.
- [8] X. S. Yang, Q. Yuan, "Chaos and transient chaos in simple hopfield neural networks," *Neurocomputing*, vol. 69, no. 1-3, pp. 232-241, 2005.
- [9] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821-824, 1990.
- [10] L. Lu, C. Zhang, and Z. A. Guo, "Synchronization between two different chaotic systems with nonlinear feedback control," *Chinese Physics*, vol. 16, no. 6, pp. 1603-07, 2007.
- [11] H. N. Agiza and M. T. Yassen, "Synchronization of rossler and chen chaotic dynamical systems using active Control", *Physical Letters A*, vol. 278, no. 4, pp.191-197, 2001.
- [12] M. C. Ho and Y. C. Hung, "Synchronization of two different systems by using generalized active control", *Physical Letters. A*, vol. 301, no. 5-6, pp. 424-428, 2002.
- [13] X. Wu and J. Lü, "Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 18, no. 4, pp. 721-729, 2003.
- [14] M. Haeri and A. Emadzadeh, "Synchronizing different chaotic systems using active sliding mode control," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 31, no. 1, pp. 119-129, 2007.
- [15] V. Sundarapandian, "Global chaos synchronization of the pehlivan systems by sliding mode control", *International Journal on Computer Science and Engineering*, vol. 3, no. 5, pp. 19-28, 2011.
- [16] J. Yan, M. Hung, T. Chiang, and Y. Yang, "Robust synchronization of chaotic systems via adaptive sliding mode control," *Physics Letters A*, vol. 356, no. 3, pp. 220-225, 2006.
- [17] I. Pehlivan and Y. Uyaroglu, "A new chaotic attractor from general lorenz family and its electronic experimental implementation," *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, vol. 18, pp. 171-184, 2010.