

하이퍼큐브와 스타 그래프 종류 사이의 임베딩 알고리즘

김종석[†] · 이형옥^{††}

요 약

하이퍼큐브와 스타 그래프는 상호연결망으로 널리 알려져 있다. 상호연결망의 임베딩은 임의의 연결망 G 를 다른 연결망 H 에 사상하는 것이다. 상호연결망 G 가 H 에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G 에서 개발된 알고리즘들을 연결망 H 에서 효율적으로 이용할 수 있는 장점이 있다. 본 논문에서는 HCN 과 HON 사이의 임베딩과 스타(star)그래프와 하프팬케이크그래프 사이의 임베딩을 분석한다. 연구 결과로 $HCN(n,n)$ 은 $HON(C_{n+1},C_{n+1})$ 에 연장을 3에 임베딩 가능하고, $HON(C_d,C_d)$ 를 $HCN(2d-1,2d-1)$ 에 임베딩 비용은 $O(d)$ 임을 보인다. 또한 스타그래프는 하프팬케이크그래프에 연장을 11, 확장을 1에 임베딩 가능하고, 평균 연장은 8이다. 본 연구 결과는 HCN 연결망과 스타그래프에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 HON 연결망과 하프팬케이크그래프에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미한다.

주제어 : 상호연결망, 임베딩, 알고리즘

Embedding algorithms among hypercube and star graph variants

Jongseok Kim[†] · Hyeongok Lee^{††}

ABSTRACT

Hypercube and star graph are widely known as interconnection network. The embedding of an interconnection network is a mapping of a network G into other network H . The possibility of embedding interconnection network G into H with a low cost, has an advantage of efficient algorithms usage in network H , which was developed in network G . In this paper, we provide an embedding algorithm between HCN and HON . $HCN(n,n)$ can be embedded into $HON(C_{n+1},C_{n+1})$ with dilation 3 and $HON(C_d,C_d)$ can be embedded into $HCN(2d-1,2d-1)$ with dilation $O(d)$. Also, star graph can be embedded to half pancake's value of dilation 11, expansion 1, and average dilation 8. Thus, the result means that various algorithms designed for HCN and Star graph can be efficiently executed on HON and half pancake, respectively.

Keywords : Interconnection Network, Embedding, Algorithm

[†] 정 회 원: University of Rochester 컴퓨터과학과 박사후과정
^{††} 종신회원: 순천대학교 컴퓨터교육과 교수(교신저자)
 논문접수: 2014년 2월 24일, 심사완료: 2014년 3월 5일, 게재확정: 2014년 3월 24일

1. 서론

인공지능, 모델링과 시뮬레이션, 유체역학 등의 공학과 과학 분야의 응용문제는 많은 계산을 수행하면서 빠른 시간에 해를 구해야 하기에 고성능 컴퓨터 개발에 대한 요구가 계속 되고 있다. 최근 컴퓨터 설계에서 성능 향상을 위한 방법으로 병렬처리(Parallel Processing) 기술이 널리 사용되고 있다. 병렬처리는 다수의 프로세서들이 여러 개의 프로그램 또는 한 프로그램의 분할된 부분들을 분담하여 동시에 처리하는 기술을 의미한다. 병렬처리를 위한 이슈는 크게 병렬 컴퓨터를 설계하는 문제와 병렬 알고리즘을 설계하는 문제로 구분할 수 있다. 병렬 컴퓨터 시스템을 분류하는 방식으로 프로세서들이 처리하는 명령어들과 데이터들의 스트림 수에 따라 SISD, SIMD, MISD, MIMD로 구분한다[1].

병렬 컴퓨터 시스템 분류에서 SIMD형과 MIMD형이 병렬 컴퓨터 구조에 속한다. MIMD형 컴퓨터는 공유 메모리를 갖는 다중 프로세서 시스템과 분산 메모리를 갖는 다중 컴퓨터(Multi-computer) 시스템으로 분류할 수 있다. 다중 컴퓨터 시스템의 각 프로세서들은 자신의 지역 메모리 장치를 갖고 프로세서들은 정적인 상호연결망(Interconnection Network)에 의해 연결되어 있다.

지금까지 여러 가지 종류의 상호연결망이 발표되었다. 상호연결망을 노드 개수 중심으로 구분하면 메시 부류, 하이퍼큐브 부류, 스타 그래프 부류, 하이퍼-스타 부류가 있다. 이러한 상호연결망을 평가하는 척도는 지름, 분지수, 망비용, 고장허용도, 병렬경로, 고장지름, 임베딩 등이 있다[2].

임베딩은 한 연결망의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망의 프로세서와 통신링크로 사상(mapping)시키는 방법을 일컫는다. 임베딩을 수행하는 목적은 이미 개발된 알고리즘을 새로운 연결망에서 효율적으로 사용할 수 있고, 임베딩된 연결망을 보다 쉽게 이해할 수 있으며, 새로운 연결망에서 개발될 알고리즘을 기존의 연결망에서 개발된 알고리즘을 활용하므로 비용을 줄일 수 있다. 이러한 목적으로 인해 임베딩은 상호연결망을 평가하는 중요한 척도 중의 하나로 인식되어

다양한 연결망에서 연구 결과가 발표되고 있다 [3][4][5][6][7][8].

하이퍼큐브는 재귀적 구조, 간단한 라우팅 알고리즘, 노드 및 에지 대칭성, 효율적인 방송 알고리즘, 다양한 상호연결망과의 효과적인 임베딩 등의 좋은 장점으로 인해 상용화된 연결망이다[1].

하이퍼큐브는 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 좋지 않은 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위해 Shuffle Exchange, Cube-Connected-Cycle, de Bruijn, Butterfly 등이 제안되었다. 또한 노드와 에지의 인접 관계를 조작하여 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 연결망으로 재귀원형군, Multiply-Twisted-Cube, Extended Hypercube, HCN[9], Odd 연결망[10][11], HON[12], HFN(Hierarchical Folded hypercube Network)[13] 등이 제안되었다.

스타(Star) 그래프의 망비용(Network Cost)을 개선하기 위해 계층 구조를 갖는 행렬-스타(Matrix-star) 그래프와 매크로-스타(Macro-star) 그래프가 제안되었고[14], 스타 그래프의 고장 허용도를 강화하기 위해 전위 그래프가 제안되었다. 또한 그래프 결합을 이용한 구조로 RFM 그래프가 제안되었고[15], 스택 구조에서 자료 정렬 문제로부터 출발한 팬케익(Pancake) 그래프와 버블정렬 그래프가 제안되었으며[16], 팬케익 그래프의 분지수를 절반으로 줄인 하프팬케익 그래프(Half Pancake)가 제안되었다[17].

기존 임베딩 연구에서는 임베딩의 대상이 되는 그래프 구조가 스타그래프의 노드 주소 형태인 일차원 벡터 형식의 주소를 갖는 그래프들 사이의 연구가 주류를 이루었다. 물론 스타그래프와 매크로-스타 그래프 사이의 임베딩은 일차원 벡터 구조와 계층적 구조 사이의 임베딩이다.

본 연구에서는 하이퍼큐브의 변형 그래프에서 노드의 주소가 계층 구조 형태로 표현되는 HCN(Hierarchical Cubic Network)과 HON(Hierarchical Odd Network) 사이의 임베딩을 분석한다. 또한 최근에 제안된 팬케익 그래프의 분지수를 1/2 정도 개선한 하프팬케익 그래프와 스타 그래프 사이의 임베딩을 분석한다. 기존의 팬케익 그래프는 모든 부분 순열을 뒤집은 노

드와 연결 관계가 있지만 하프팬케익 그래프는 기존 팬케익그래프 분지수의 절반만 이용하여 구성된 그래프이다. 따라서 그래프의 주소 표현 방법이 다른 그래프 구조간의 임베딩을 통해 이미 개발된 알고리즘을 활용할 수 있는 기초 연구를 수행한데 의미가 있다 하겠다.

본 논문에서는 하이퍼큐브의 변형 그래프인 HCN과 HON 사이의 임베딩을 분석하였고, 스타 그래프와 하프팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 연구 결과로 HCN(n,n)은 HON(C_{n+1},C_{n+1})에 연장을 3, 확장율 $\frac{(C_{n+1})^2}{2^{2n}}$ 에 임베딩 가능함을 보이고, HON(C_d,C_d)를 HCN(2d-1,2d-1)에 임베딩 하는 비용은 O(d)임을 보인다. 또한 스타 그래프 S_n은 하프팬케익 HP_n에 연장을 11, 확장율 1에 임베딩 가능하고, 평균 연장율은 8 이하임을 보인다. 하프팬케익 HP_n은 스타그래프 S_n으로 임베딩 연장율은 O(n)이다.

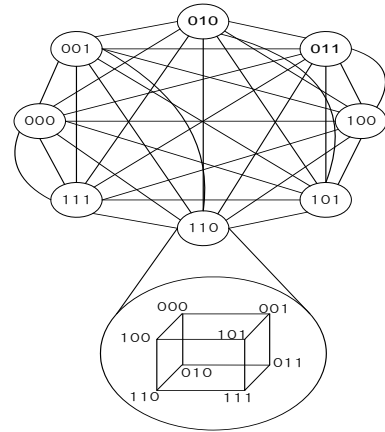
본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 하이퍼큐브와 스타그래프의 변형 그래프인 HCN, HON, Odd 연결망, 하프팬케익그래프의 성질에 대하여 알아보고, 3장에서는 스타그래프와 하프팬케익 그래프 및 HCN과 HON 사이의 임베딩을 분석하고 4장에서 결론을 맺는다.

2. 관련 연구

하이퍼큐브 Q_n의 노드는 n개 이진비트스트링으로 나타내고, 에지는 1비트 주소가 다른 두 노드 $U=x_1x_2...x_i...x_n$ 와 $V=x_1x_2...x_i...x_n$ 사이에 에지가 존재한다(1 ≤ i ≤ n). 노드 수는 2ⁿ이고, 분지수와 지름은 각각 n이다. 하이퍼큐브 Q_n에서 노드 중복이 없는 두 개의 Q_{n-1}을 찾는 방법은 n가지이다.

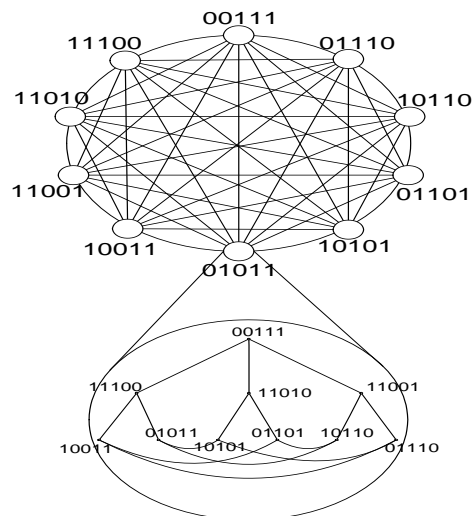
상호연결망 HCN(n,n)은 n-차원 하이퍼큐브를 기본 모듈로 사용하는 계층적 연결망이다. HCN(n,n)은 2²ⁿ개의 노드들을 포함하고 (n+1)2²ⁿ⁻¹개 에지를 포함하며, 분지수는 n+1이다. HCN(n,n)의 노드는 (I,J)로 나타내고, I는 기본모듈 주소이고, J는 기본모듈 내부의 주소이다. 외부에지는 지름에지(diameter link)와 비지름에지(non-diameter link)로 구분한다. 지름에지는 노드의 주소가 0 ≤ I ≤ (2ⁿ-1)와 0 ≤ J ≤ (2ⁿ-1)를 만족하

는 노드 (I,I)와 (J,J)를 연결하는 외부에지를 말하고, 이때 주소 I와 J는 보수 관계이다. 지름에지가 아닌 외부에지를 비지름에지라 하고 (I,J)와 (J,I)를 연결하는 에지이다(I ≠ J). <그림 1>은 HCN(3,3)의 구조를 나타내고 있고, <그림 1>의 각 기본 모듈은 3차원 하이퍼큐브 Q₃을 나타낸다.



<그림 1> 하이퍼큐브 Q₃와 HCN(3,3)

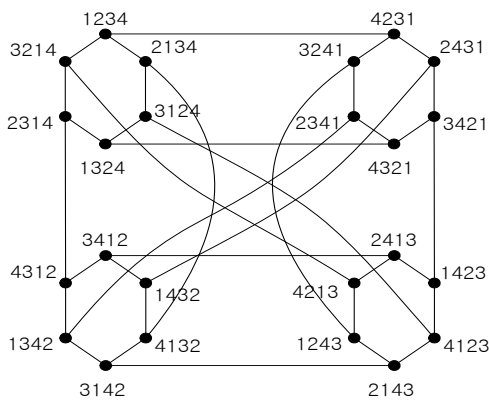
Odd 연결망 O_d의 노드수는 (2d-1)C_d이고, 분지수는 d이며 지름은 d-1이다. 각 노드의 주소는 2d-1개의 이진비트스트링으로 구성되어 있고, x₁x₂...x_i...x_{2d-1}로 나타낸다. 각 노드의 주소를 나타내는 이진비트스트링에서 1의 개수가 0의 개수보다 하나 많으며, 두 노드 $U=x_1x_2...x_i...x_{2d-1}$ 와 $V=\overline{x_1x_2...x_i...x_{2d-1}}$ 사이에 에지가 존재한다(1 ≤ i ≤ 2d-1).



<그림 2> 오드 연결망 O₃와 HON(C₃,C₃)

HON 연결망은 Odd 연결망을 기본 모듈로 갖는 계층 구조이고, $HON(C_d, C_d)$ 은 C_d 개의 기본 모듈로 구성된다. 노드는 (I, J) 주소로 표현하며, I 와 J 를 구성하는 비트스트링의 개수는 같다. I 는 기본 모듈 주소이고, J 는 기본 모듈 내부의 주소이다. 각 노드는 $d+1$ 혹은 $d+2$ 개의 에지를 갖는다. $I \neq J$ 인 경우 기본 모듈과 기본 모듈을 연결하는 에지가 존재하고, 그렇지 않은 경우에는 기본 모듈과 기본 모듈을 연결하는 에지가 존재하지 않는다. 이 에지를 외부에지라고 하며, 두 노드 (I, J) 와 (J, I) 를 연결한다. $HON(C_d, C_d)$ 의 분지수는 $d+2$ 이다. 지금까지 지름, 분지수, 망비용, 방송, 임베딩 등이 분석되었다[8][12]. <그림 2>는 $HON(C_3, C_3)$ 의 구조를 나타내고 있다. <그림 2>의 기본 모듈은 3차원 오드 연결망 O_3 이다.

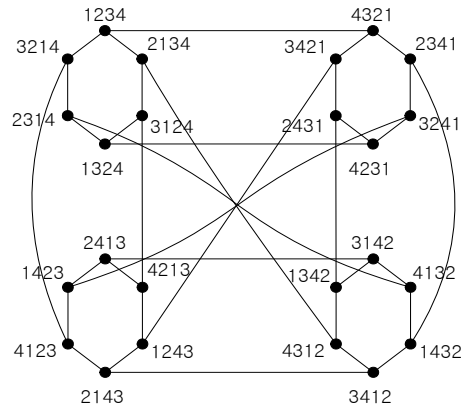
스타그래프 S_n 의 노드 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 w 의 비트 스트링에서 첫 번째 심볼과 나머지 $n-1$ 개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. 스타그래프 S_n 은 $n!$ 개 노드와 분지수가 $n-1$ 이다. 4-차원 스타 그래프 구조가 <그림 3>에 있다.



<그림 3> 4-차원 스타 그래프

n -차원 하프팬케익 HP_n 의 노드는 $\langle N \rangle = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 순열로 표현하고, 노드를 연결하는 에지는 P_n 과 P_k 로 구성되어 있으며 다음과 같다 ($2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$). 에지 P_n 은 노드 주소는 나타내는 순열에서 n 번째 원소부터 첫번째 원소까지 성분의 순서를 뒤집어 생성된 순열을 연결하는 에지이다. 에지 P_k 는 k 번째 원소에서 첫 번째 원소

까지 성분의 순서를 뒤집어 생성된 순열을 연결하는 에지이다. 하프팬케익 HP_n 의 노드 개수는 $n!$ 개 이고, 분지수는 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 개다. <그림 4>은 4-차원 하프팬케익 HP_4 의 예제이다.



<그림 4> 4-차원 하프팬케익 HP_4

3. 임베딩 분석

상호연결망의 임베딩(embedding)은 어떤 연결망 G 가 다른 연결망 H 에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G 에서 개발된 알고리즘들을 연결망 H 에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 의미를 갖는다.

연결망 G 의 노드 집합, 에지 집합, 경로 집합을 각각 $V(G)$, $L(G)$, $P(G)$ 라고 표현하겠다. 상호연결망 $G(V, L)$ 을 $G'(V', L')$ 로 임베딩 하는 함수 (ϕ, ρ) 은 $V(G)$ 의 노드들을 $V'(G')$ 의 노드들로 사상하고, $L(G)$ 의 에지들을 $P(G')$ 의 경로들로 사상하는 것을 말한다. 즉, $\phi: V \rightarrow V'$ 이고, $\rho: L \rightarrow P(G')$ 이다. 임베딩의 비용을 나타내는 대표적인 척도로 연장율(dilation), 확장율(expansion), 밀집율(congestion) 등이 있다. 상호연결망의 연장율은 연결망 G 의 한 에지가 G' 에 사상되었을 때의 경로 길이를 나타내고, 확장율은 G 가 G' 에 사상되었을 때 G 와 G' 의 노드들의 비율을 나타낸다. 밀집율은 G 가 G' 에 사상되었을 때 G' 의 한 에지를 사용하는 G 의 에지 개수를 나타낸다. 연장율은 어떤 그래프를 다른 그래프에서 시뮬레이션할 때 요구되는 통신비용을 나타내고, 밀집도는 시뮬레이션 할 때 호스트 그래프 H 의 한 에지에 걸리는

부하를 나타낸다. 그리고 확장율은 그래프 G 를 시뮬레이션하기 위해 필요한 호스트 그래프 H 의 최소 프로세서의 수를 나타내며 하드웨어 비용과 관련된다.

상호연결망 G 의 한 노드 S 에 인접한 노드 S' 가 있다고 가정하자. 이때 노드 S 와 S' 를 연결하는 에지가 P_k 라고 한다면 노드 S 와 S' 의 관계를 다음과 같이 표현하겠다. 본 논문의 상호연결망은 무방향 그래프이기 때문에 노드 $P_k(S)=S'$ 이고, $P_k(S')=S$ 로 표현할 수 있다. 또한 노드의 주소를 순열로 표현할 수 있으므로 순열을 노드 주소와 동일한 의미로 사용한다. 예를 들어 하프팬케익 그래프의 정의에 의해 임의의 노드 S 의 순열을 $s_1s_2s_3 \dots s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \dots s_{n-1}s_n$ 이라 하자. 노드 S 와 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(S)$ 의 순열 $P_n(S)=s_n s_{n-1} \dots s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots s_3 s_2 s_1$ 으로 표현한다. 에지 P_k 도 동일하게 표현할 수 있다.

정리 1 계층적 상호연결망 $HCN(n,n)$ 은 $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 에 연장율 3, 확장율 $\frac{(C_{n+1})^2}{2^{2n}}$ 에 임베딩 가능하다.

증명 계층적 상호연결망 $HCN(n,n)$ 의 임의의 한 노드를 $S=(s_1s_2\dots s_n, s_{n+1}\dots s_{2n})=(I,J)$ 라 하고, I 의 보수를 $\bar{I}=\overline{s_1s_2\dots s_n}$, J 의 보수를 $\bar{J}=\overline{s_{n+1}s_{n+2}\dots s_{2n}}$ 라 하며, I 의 첫 번째 비트스트링을 제거한 비트스트링을 $I^1=s_2\dots s_n$, J 의 첫 번째 비트스트링을 제거한 노드를 $J^1=s_{n+2}\dots s_{2n}$ 라고 하겠다. 노드 S 와 인접한 노드를 $S'=(s'_1s'_2\dots s'_n, s'_{n+1}\dots s'_{2n})=(K,L)$ 라 하자. 노드 $S=(I,J)$ 와 $S'=(K,L)$ 는 하이퍼큐브 정의에 의해 u 번째 비트스트링이 서로 다른 노드이고, 이때 노드 $S=(I,J)$ 와 $S'=(K,L)$ 를 연결하는 에지를 u -차원 에지라 한다($1 \leq u \leq 2n$). 증명을 위해 3개의 이진 비트스트링 $v_1, v_2, 1$ 을 연속으로 연결한 비트스트링을 v_1v_21 라고 표현하겠다. $HCN(n,n)$ 의 임의의 노드 S 는 $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 의 노드에 다음과 같이 임베딩 한다. $\phi(S)=(\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1})$. 임의의 한 에지를 e 라고 하면, $e \in E(HCN(n,n))$ 이다. 에지 e 의 발생 조건에 따라 다음의 4가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1) 에지 e 가 지름 에지인 경우

에지 e 에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $S=(I,J)$ 와 $T=\bar{S}=(\bar{I}, \bar{J})$ 라고 하자. 그러면 노드 S 가 임베딩 된 노드는 $\phi(S)=(\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1})$ 이고, 노드 T 가 임베딩 된 노드는 $\phi(T)=(\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1})$ 이다. $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 에 임베딩 된 두 노드 $\phi(S)$ 와 $\phi(T)$ 사이의 경로는 다음과 같다. $\rho(e)=(\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1}) - (\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1}) - (\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1}) - (\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1})$. 그러므로 에지 e 가 지름 에지인 경우에는 연장율 3으로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예 1) $S=(00,00), T=(11,11) \rightarrow \phi(S)=(00111,00111), \phi(T)=(11001,11001)$
 $\rho(e)=(00111,00111) - (00111,11001) - (11001,00111) - (11001,11001)$.

경우 2) 에지 e 가 비지름 에지인 경우

에지 e 에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $S=(I,J)$ 와 $T=(J,I)$ 라고 하자. 그러면 노드 S 가 임베딩된 노드는 $\phi(S)=(\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1})$ 이고, 노드 T 가 임베딩된 노드는 $\phi(T)=(\bar{J}\bar{1}, \bar{I}\bar{1})$ 이다. $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 에 임베딩된 노드 $\phi(S)$ 와 $\phi(T)$ 사이의 경로는 다음과 같다. $\rho(e)=(\bar{I}\bar{1}, \bar{J}\bar{1}) - (\bar{J}\bar{1}, \bar{I}\bar{1})$. 그러므로 에지 e 가 비지름 에지인 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예 2) $S=(11,00), T=(00,11) \rightarrow \phi(S)=(11001,00111), \phi(T)=(00111,11001)$
 $\rho(e)=(11001,00111) - (00111,11001)$.

경우 3) $n+1 \leq u \leq 2n$ 이고, $s_{n+1} \neq s'_{n+1}$ 인 경우

에지 e 에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $S=(I,0J^1)$ 와 $T=(I,1J^1)$ 라고 하자. 그러면 노드 S 가 임베딩 된 노드는 $\phi(S)=(\bar{I}\bar{1}, 0J^1\bar{J}^1)$ 이고, 노드 T 가 임베딩 된 노드는 $\phi(T)=(\bar{I}\bar{1}, 1J^1\bar{J}^1)$ 이다. $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 에 임베딩 된 노드 $\phi(S)$ 와 $\phi(T)$ 사이의 경로는 다음과 같다. $\rho(e)=(\bar{I}\bar{1}, 0J^1\bar{J}^1) - (\bar{I}\bar{1}, 1\bar{J}^1J^1) - (\bar{I}\bar{1}, 1J^1\bar{J}^1)$. 그러므로 에지 e 가 $n+1 \leq u \leq 2n$ 이고, $s_{n+1} \neq s'_{n+1}$ 인 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예 3) $S=(11,00), T=(11,10) \rightarrow \phi(S)=(11001,00111), \phi(T)=(11001,10011)$.

$$\rho(e)=(11001,00111)-(11001,11100)-(11001,10011).$$

경우 4) $n+1 \leq u \leq 2n$ 이고, $s_i \neq s'_i$ 인 경우($n+2 \leq i \leq 2n$)

에지 e 에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $S=(I, xv_1 0v_2)$ 와 $T=(I, xv_1 1v_2)$ 라고 하자. x 는 0 혹은 1이고, v_1 과 v_2 는 임의의 이진비트스트링을 나타낸다($0 \leq |v_1, v_2| \leq n-1$). 그러면 노드 S 가 임베딩된 노드는 $\Phi(S)=(\bar{I}\bar{1}1, xv_1 0v_2 \bar{x} \bar{v}_1 1 \bar{v}_2 1)$ 이고, 노드 T 가 임베딩된 노드는 $\Phi(T)=(\bar{I}\bar{1}1, xv_1 1v_2 \bar{x} \bar{v}_1 0 \bar{v}_2 1)$ 이다. $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 에 임베딩된 노드 $\Phi(S)$ 와 $\Phi(T)$ 사이의 경로는 다음과 같다. $\rho(e)=(\bar{I}\bar{1}1, xv_1 0v_2 \bar{x} \bar{v}_1 1 \bar{v}_2 1) - (\bar{I}\bar{1}1, \bar{x} \bar{v}_1 1 \bar{v}_2 xv_1 1v_2 0) - (\bar{I}\bar{1}1, xv_1 1v_2 \bar{x} \bar{v}_1 0 \bar{v}_2 1)$. 그러므로 에지 e 가 $n+1 \leq u \leq 2n$ 이고, $s_i \neq s'_i$ 인 경우에는 연장을 2로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예 4) $S=(00,10), T=(00,11) \rightarrow \Phi(S)=(00111,10011), \Phi(T)=(00111,11001)$.

$$\rho(e)=(00111,10011)-(00111,01110)-(00111,11001).$$

□

정리 2에서는 첫 번째 비트스트링이 1과 0으로 구성된 노드들의 집합을 각각 A^1 과 A^0 라고 하겠다.

정리 2 $HON(C_d, C_d)$ 를 $HCN(2d-1, 2d-1)$ 에 임베딩 하는 비용은 $O(d)$ 이다.

증명 $HON(C_d, C_d)$ 의 임의의 노드를 $S=(I, J)=(s_1 s_2 \dots s_d s_{d+1} \dots s_{2d-1}, t_1 t_2 \dots t_d t_{d+1} \dots t_{2d-1})$ 라고 하고, I 의 보수를 $\bar{I}=\overline{s_1 s_2 \dots s_d s_{d+1} \dots s_{2d-1}}$, J 의 보수를 $\bar{J}=\overline{t_1 t_2 \dots t_d t_{d+1} \dots t_{2d-1}}$ 라고 하며, I 의 첫 번째 비트스트링을 제거한 비트스트링을 $I^1=s_2 \dots s_{2d-1}$, J 의 첫 번째 비트스트링을 제거한 노드를 $J^1=t_2 \dots t_{2d-1}$ 라고 하겠다. 노드 S 와 인접한 노드를 $S'=(K, L)=(s'_1 s'_2 \dots s'_d s'_{d+1} \dots s'_{2d-1}, t'_1 t'_2 \dots t'_d t'_{d+1} \dots t'_{2d-1})$ 이라 하자. 노드 $S=(I, J)$ 와 $S'=(K, L)$ 는 $HON(C_d, C_d)$ 의 내부 에지 정의에 의해 $J=L$ 일 때, I 와 K 의 u 번째 비트스트링만 같고 나머지 비트스트링이 서로 다른 노드이다. 이때 노드 $S=(I, J)$ 와 $S'=(K, L)$ 를 연결하는 내부 에지를 u -차원 에지라 한다($1 \leq u \leq 2d-1$). 노드 $S=(I, J)$ 와 $S'=(K, L)$ 는 $HON(C_d, C_d)$ 의 외부 에지 정의에 의해 $I=L$ 이고

$J=K$ 인 노드이다. I 또는 $J \in A^0$ 이면, $\Phi(I)=0I^1$ 또는 $\Phi(J)=0J^1$ 이고, I 또는 $J \in A^1$ 이면, $\Phi(I)=0\bar{I}^1$ 또는 $\Phi(J)=0\bar{J}^1$ 이다. 그러면 $\Phi(I)$ 또는 $\Phi(J)$ 의 비트스트링의 길이는 $2d-1$ 이고, $|1|=|0| \pm 1$ 이다. 임의의 한 에지를 e 라고 하면, $e \in E(HON(C_d, C_d))$ 이다. 에지 e 가 $u=1$ 이고, $s_1=s'_1=1$ 인 경우의 임베딩을 통해 $HON(C_d, C_d)$ 을 $HCN(2d-1, 2d-1)$ 에 임베딩 하는 비용이 $O(d)$ 임을 보인다.

경우 1) 에지 e 가 $u=1$ 이고, $s_1=s'_1=1$ 인 경우

에지 e 에 의해 연결되어 있는 $HON(C_d, C_d)$ 의 두 노드는 $S=(1s_2 \dots s_d s_{d+1} \dots s_d, J)$ 와 $S'=(1s_2 \dots s_d s_{d+1} \dots s_d, J)$ 이다. S 와 S' 가 $HCN(2d-1, 2d-1)$ 에 임베딩된 노드는 $\Phi(S)=(0s_2 \dots s_d s_{d+1} \dots s_d, 0\bar{J}^1)$ 와 $\Phi(S')=(0s_2 \dots s_d s_{d+1} \dots s_d, 0\bar{J}^1)$ 이다. 내부에지에 의해 연결되어 있기 때문에 두 노드 $\Phi(S)$ 와 $\Phi(S')$ 의 거리는 $2d-2$ 이다. 그러므로 $HON(C_d, C_d)$ 를 $HCN(2d-1, 2d-1)$ 에 임베딩 하는 연장의 비용은 $O(d)$ 임을 알 수 있다.

□

정리 3 스타그래프 S_n 은 하프팬케익 HP_n 에 연장을 11, 확장을 1에 임베딩 가능하다.

증명 스타그래프 S_n 의 임의의 노드 S 의 순열을 $S=(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n)$ 이라 하자. 스타그래프 S_n 의 순열에서 임의의 두개 심벌이 교환된 노드 즉, 노드 S 와 인접한 노드를 $S'=(s_1 s_2 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_n)$ 이라 하고, 노드 S 와 S' 를 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하자($2 \leq i \leq n$).

하프팬케익 HP_n 의 임의의 노드 H 의 순열을 $H=(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n)$ 이라 하고, 순열 H 와 인접한 노드를 $H'=(h_1 h_2 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_n)$ 라고 하자($2 \leq i \leq n$). 하프팬케익 H_n 의 노드 H 와 H' 를 연결하는 에지는 그래프 정의에 의해 2가지가 있다.

본 논문에서 스타그래프를 하프팬케익에 사상하는 것은 S_n 의 노드 S 를 하프팬케익 HP_n 의 노드 H 로 사상하고, 노드 S' 를 노드 H' 에 사상하도록 한다. 이때 하프팬케익 HP_n 의 에지를 정의한 연산을 적용하여 노드 H 에서 H' 의 순열로 변환 과정에서 적용하는 에지의 개수가 임베딩의 연장이 된다. 본 증명에서는 스타그래프 S_n 의 i -차

원 에지가 갖는 i 의 값에 따라 2가지 경우로 나누어 생각한다($2 \leq i \leq n$). 스타그래프의 i -차원 에지에서 2가지 경우는 하프팬케익 그래프의 에지 종류 2가지를 의미한다.

경우 1) $i \leq (n/2)+1$ 인 경우

스타그래프의 i -차원 에지는 $i \leq 3$ 인 경우와 $4 \leq i \leq (n/2)+1$ 인 경우로 나눌 수 있다.

경우 1-1) $2 \leq i \leq 3$ 인 경우

스타그래프의 2-차원, 3-차원 에지는 하프팬케익 HP_n 의 에지 p_k 에서 $k=2, k=3$ 인 경우와 동일함을 쉽게 알 수 있다. 예를 들어 스타그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 3-차원 에지에 인접한 노드 $S'(=s_1s_2s_1...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 이다. 하프팬케익 HP_n 의 순열 $H(=h_1h_2h_3...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 에서 에지 $P_{k=3}$ 에 인접한 노드 $H'(=h_3h_2h_1...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 이다. 따라서 스타그래프의 2-차원, 3-차원 에지는 연장을 1에 임베딩 가능하다.

경우 1-2) $4 \leq i \leq (n/2)+1$ 인 경우

이 경우 노드 $S(=s_1s_2...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 를 연결하는 에지는 i -차원 에지이다($2 \leq i \leq (n/2)+1$). 하프팬케익 HP_n 의 순열 $H(=h_1h_2...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 에서 $H'(=h_1h_2h_3...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 까지 라우팅을 위해 필요한 하프팬케익의 에지 시퀀스는 $\langle p_{i-1}, p_i, p_2, p_i, p_{i-1} \rangle$ 이다.

하프팬케익의 순열 H 에서 에지 시퀀스 $\langle p_{i-1}, p_i, p_2, p_i, p_{i-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달하는 노드가 H' 임을 보인다. 노드 $H(=h_1h_2...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 에서 에지 p_{i-1} 에 인접한 노드 $p_{i-1}(H)=h_{i-1}h_{i-2}...h_3h_2h_1h_i h_{i+1}...h_n$ 이고, 순열 $p_{i-1}(H)$ 에서 에지 p_i 에 인접한 노드 $p_i(p_{i-1}(H))=h_i h_1 h_2 h_3...h_{i-2}h_{i-1}h_{i+1}...h_n$ 이다. 순열 $p_i(p_{i-1}(H))$ 에서 에지 p_2 에 인접한 노드 $p_2(p_i(p_{i-1}(H)))=h_1h_i h_2 h_3...h_{i-2}h_{i-1}h_{i+1}...h_n$ 이다. 논문의 기술 편의상 노드 $p_2(p_i(p_{i-1}(H)))$ 를 순열 β 라 하자. 순열 β 에서 에지 p_i 에 인접한 노드 $p_i(\beta)=h_{i-1}h_{i-2}h_{i-3}...h_3h_2h_1h_i h_{i+1}...h_n$ 이다. 순열 $p_i(\beta)$ 에서 에지 p_{i-1} 에 인접한 노드는 $p_{i-1}(p_i(\beta))=h_i h_2 h_3...h_{i-3}h_{i-2}h_{i-1}h_1 h_{i+1}...h_n$ 이다. 결국 하프팬케익의 순열 $H(=h_1h_2...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 에서 에지 시퀀스 \langle

$p_{i-1}, p_i, p_2, p_i, p_{i-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달한 순열 $p_{i-1}(p_i(p_2(p_i(p_{i-1}(H))))))$ 은 순열 $H'(=h_1h_2h_3...h_{i-1}h_i h_{i+1}...h_n)$ 와 동일함을 알 수 있다.

따라서 스타그래프의 노드 S 와 S' 를 연결하는 i -차원 에지는 하프팬케익의 순열 H 에서 에지 시퀀스 $\langle p_{i-1}, p_i, p_2, p_i, p_{i-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달한 노드와 동일한 순열임을 알 수 있고, 그 연장을 5임을 알 수 있다($2 \leq i \leq (n/2)+1$).

경우 2) $i \geq (n/2)+2$ 인 경우

스타그래프에서 노드 $S(=s_1s_2...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 경우 2에 의해 인접한 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 이다. 스타그래프의 노드 S 와 S' 를 연결하는 에지는 i -차원 에지에서 i 의 범위는 $((n/2)+2) \leq i \leq n$ 이다. 본 경우 2에서 순열을 간단하게 표현하기 위해 $k=(n/2+2)$ 이라고 가정한다. 노드 S 의 순열을 k 를 이용하여 표현하면 $S(=s_1s_2...s_{k-1}s_k s_{k+1}...s_n)$ 이고, 노드 S 에 인접한 노드 $S'(=s_k s_2 s_3...s_{k-1}s_i s_{k+1}...s_n)$ 이다 ($k=(n/2+2)$). 하프팬케익 HP_n 에서 $k=(n/2+2)$ 을 이용하여 노드 H 와 H' 의 순열을 다시 표현하면 $H(=h_1h_2...h_{k-1}h_k h_{k+1}...h_n)$ 이고, $H'(=h_k h_2 h_3...h_{k-1}h_1 h_{k+1}...h_n)$ 이다. 노드 H 에서 H' 까지 라우팅을 위해 필요한 하프팬케익의 에지 시퀀스는 $\langle p_{k-1}, p_n, p_{n-j}, p_{k-2}, p_{k-1}, p_2, p_{k-1}, p_{k-2}, p_{n-j}, p_n, p_{k-1} \rangle$ 이다.

하프팬케익의 순열 H 에서 에지 시퀀스 $\langle p_{k-1}, p_n, p_{n-j}, p_{k-2}, p_{k-1}, p_2, p_{k-1}, p_{k-2}, p_{n-j}, p_n, p_{k-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달하는 노드가 H' 임을 보인다. 노드 $H(=h_1h_2h_3...h_{k-1}h_k h_{k+1}...h_n)$ 에서 에지 p_{k-1} 에 인접한 노드 $p_{k-1}(H)=h_{k-1}h_{k-2}...h_3h_2h_1h_k h_{k+1}...h_n$ 이고, 순열 $p_{k-1}(H)$ 에서 에지 p_n 에 인접한 노드 $p_n(p_{k-1}(H))=h_n...h_{j+1}h_j...h_{k+1}h_k h_1 h_2 h_3...h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 에지 p_{n-j} 에 인접한 순열을 나타내기 위해 원소 h_j 와 h_{j+1} 를 순열의 원소로 잠정적으로 추가하였다. 순열 $p_n(p_{k-1}(H))$ 에서 에지 p_{n-j} 에 인접한 노드 $p_{n-j}(p_n(p_{k-1}(H)))=h_{j+1}...h_n h_j...h_{k+1}h_k h_1 h_2 h_3...h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 논문의 기술 편의상 노드 $p_{n-j}(p_n(p_{k-1}(H)))$ 를 순열 β 라 하자. 순열 β 에서 에지 p_{k-2} 에 인접한 노드 $p_{k-2}(\beta)=h_k h_{k+1}...h_j h_n...h_{j+1}h_1 h_2 h_3...h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 순열 $p_{k-2}(\beta)$ 에서 에지 p_{k-1} 에 인접한 노드 $p_{k-1}(p_{k-2}(\beta))=h_1 h_{j+1}...h_n h_j...h_{k+1}h_k h_2 h_3...h_{k-2}h_{k-1}$ 이고, 순열 $p_{k-1}(p_{k-2}(\beta))$ 에서 에지 p_2 에 인접한 노드

$p_2(p_{k-1}(p_{k-2}(\beta)))=h_{j+1}h_1\dots h_n h_j\dots h_{k+1}h_k h_2 h_3\dots h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 논문의 기술 편의상 노드 $p_2(p_{k-1}(p_{k-2}(\beta)))$ 를 δ 라 하자. 노드 δ 에서 에지 p_{k-1} 에 인접한 노드 $p_{k-1}(\delta)=h_k h_{k+1}\dots h_j h_n\dots h_1 h_{j+1} h_2 h_3\dots h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 노드 $p_{k-1}(\delta)$ 에서 에지 p_{k-2} 에 인접한 노드 $p_{k-2}(p_{k-1}(\delta))=h_1\dots h_n h_j\dots h_{k+1}h_k h_{j+1} h_2 h_3\dots h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 논문의 기술 편의상 노드 $p_{k-2}(p_{k-1}(\delta))$ 를 ε 라 하자. 순열 ε 에서 에지 p_{n-j} 에 인접한 노드 $p_{n-j}(\varepsilon)=h_n\dots h_1 h_j\dots h_{k+1}h_k h_{j+1} h_2 h_3\dots h_{k-2}h_{k-1}$ 이다. 노드 $p_{n-j}(\varepsilon)$ 에서 에지 p_n 에 인접한 노드 $p_n(p_{n-j}(\varepsilon))=h_{k-1}h_{k-2}\dots h_3 h_2 h_{j+1} h_k h_{k+1}\dots h_j h_1\dots h_n$ 이다. 순열 $p_n(p_{n-j}(\varepsilon))=h_{k-1}h_{k-2}\dots h_3 h_2 h_{j+1} h_k h_{k+1}\dots h_j h_1\dots h_n$ 에서 원소 h_j 와 h_{j+1} 은 에지 p_{n-j} 에서 임의로 생성한 원소이므로 삭제한 후 순열을 표현해도 문제가 없다. 따라서 순열 $p_n(p_{n-j}(\varepsilon))=h_{k-1}h_{k-2}\dots h_3 h_2 h_k h_1 h_{k+1}\dots h_n$ 로 나타낼 수 있다. 노드 $p_n(p_{n-j}(\varepsilon))$ 에서 에지 p_{k-1} 에 인접한 노드 $p_{k-1}(p_n(p_{n-j}(\varepsilon)))=h_k h_2 h_3\dots h_{k-2}h_{k-1} h_1 h_{k+1}\dots h_n$ 이다. 결국 하프팬케익의 순열 $H(=h_1 h_2\dots h_{i-1} h_i h_{i+1}\dots h_n)$ 에서 에지 시퀀스 $\langle p_{k-1}, p_n, p_{n-j}, p_{k-2}, p_{k-1}, p_2, p_{k-1}, p_{k-2}, p_{n-j}, p_n, p_{k-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달한 순열은 $H'(=h_k h_2 h_3\dots h_{i-1} h_i h_{i+1}\dots h_n)$ 와 동일함을 알 수 있다.

따라서 스타그래프의 노드 S 와 S' 를 연결하는 i -차원 에지는 하프팬케익의 순열 H 에서 에지 시퀀스 $\langle p_{k-1}, p_n, p_{n-j}, p_{k-2}, p_{k-1}, p_2, p_{k-1}, p_{k-2}, p_{n-j}, p_n, p_{k-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용하여 도달한 노드와 동일한 순열임을 알 수 있고, 그 연장율이 11임을 알 수 있다($i \geq (n/2)+2$). □

정리 4 하프팬케익 HP_n 은 스타그래프 S_n 으로 임베딩 연장율은 $O(n)$ 이다.

증명 하프팬케익 HP_n 을 스타그래프 S_n 으로 임베딩 하는 것은 HP_n 의 노드 H 를 스타그래프 S_n 의 노드 S 로 사상하고, 하프팬케익 HP_n 의 노드 H' 를 스타그래프의 노드 S' 에 사상하도록 한다. 이때 스타그래프 S_n 에서 노드 S 에서 S' 의 최단 경로로 순열을 변환 과정에서 적용하는 에지의 개수가 임베딩의 연장율이 된다. 본 증명에서는 하프팬케익 HP_n 의 에지 P_n 과 P_k 가 갖는 값에 따라 2가지 경우로 나누어 생각한다.

경우 1) 에지 P_n

하프팬케익 HP_n 의 임의의 노드 $H(=h_1 h_2\dots h_k\dots h_n)$ 와 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(H)(=h_n h_{n-1} h_{n-2}\dots h_3 h_2 h_1)$ 이다. 스타그래프 S_n 의 임의의 노드 $S(=s_1 s_2\dots s_i\dots s_j\dots s_n)$ 에서 임의의 두개 심별 s_1 과 s_i 가 교환된 노드 즉, 노드 S 와 인접한 노드를 $S'(=s_1 s_2\dots s_i\dots s_n)$ 라고 하고 노드 S 와 S' 를 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하자($2 \leq i \leq n$).

스타그래프 S_n 의 순열 S 에서 2개의 심별 s_i 와 s_j 의 위치를 서로 교환한 순열 $s_1 s_2\dots s_j\dots s_i\dots s_n$ 까지 도달하기 위해서는 3개의 차원 에지 $\langle i, j, i \rangle$ 를 순서대로 적용해야 한다. 순열 $S(=s_1 s_2\dots s_i\dots s_j\dots s_n)$ 에서 i -차원 에지에 의해 인접한 노드 $i(S)=s_i s_2\dots s_1\dots s_j\dots s_n$ 이고, 노드 $i(S)$ 에서 j -차원 에지에 의해 인접한 노드 $j(i(S))=s_j s_2\dots s_1\dots s_i\dots s_n$ 이고, 노드 $j(i(S))$ 에서 i -차원 에지에 의해 인접한 노드 $i(j(i(S)))=s_1 s_2\dots s_j\dots s_i\dots s_n$ 이다. 따라서 스타그래프 S_n 의 순열 S 에서 $(n-1)$ 개의 심별을 원하는 위치로 이동하기 위해 필요한 에지 개수는 $\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor$ 이다. 따라서 하프팬케익 HP_n 의 임의의 노드 H 와 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(H)$ 을 스타그래프 S_n 의 임의의 노드 S 와 S' 로 각각 사상하기 위해 필요한 연장비율은 $O(n)$ 이다.

경우 2) 에지 $P_k, 2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

하프팬케익 HP_n 의 임의의 노드 $H(=h_1 h_2\dots h_{k-1} h_k h_{k+1}\dots h_n)$ 와 에지 P_k 에 인접한 노드 $P_k(H)(=h_k h_{k-1} h_{k-2}\dots h_3 h_2 h_1\dots h_{k+1}\dots h_n)$ 이다. 노드 H 와 에지 P_k 에 의해 인접한 노드 $P_k(H)$ 의 순열에서 순서가 뒤집혀 있는 심별 개수는 최대 k 개이다. 따라서 스타그래프 S_n 의 순열 S 에서 $(k-1)$ 개의 심별을 원하는 위치로 이동하기 위해 필요한 에지 개수는 $\lfloor \frac{3(k-1)}{2} \rfloor$ 이다. 여기서 k 가 가질 수 있는 최댓값이 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 이므로 임베딩을 위한 연장율은 $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$ 이므로 $O(n)$ 이다. □

따름정리 5 스타그래프 S_n 을 하프팬케익 HP_n 에 임베딩 할 때 평균 연장율은 8 이하이다.

증명 스타그래프 S_n 의 정의에 의해 한 노드에 인접한 i -차원 에지는 $n-1$ 개 있다. $n-1$ 개의 i -차

원 에지는 $i \leq 3$ 인 경우에 에지 2개가 있고, $4 \leq i \leq (n/2)+1$ 인 경우에 에지 $(n/2)-2$ 개가 있고, $i \geq (n/2)+2$ 인 경우 에지 $(n/2)-1$ 개가 있다. i -차원 에지에서 $i \leq 3$ 인 경우의 2개 에지의 연장율은 각각 1이고, $4 \leq i \leq (n/2)+1$ 인 경우의 $(n/2)-2$ 개 에지의 연장율은 5이고, $i \geq (n/2)+2$ 인 경우의 $(n/2)-1$ 개 에지의 연장율은 11이다. 스타그래프 S_n 은 정규연결망이므로 한 노드에 인접한 연장율의 합을 노드의 인접한 에지 개수로 나누어 평균연장율을 구할 수 있다. 따라서 평균 연장율은 $(1 \times 1) + (1 \times 1) + 5 \left(\frac{n}{2} - 2\right) + 11 \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{8n-19}{n-1}$ 이므로 8 이하임을 알 수 있다. □

4. 결론

병렬 처리를 위한 다중 컴퓨터 시스템에서 상호연결망은 전체 시스템의 성능 및 확장성에 큰 영향을 미친다. 상호연결망을 평가하는 척도는 지름, 분지수, 망비용, 고장허용도, 병렬 경로, 고장 지름, 임베딩 등이 있다.

임베딩은 어떤 연결망 G 의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망 H 의 프로세서와 통신링크들로 사상(mapping)하는 방법이다. 임베딩은 연결망 G 에서 이미 개발된 알고리즘을 새로운 연결망 H 에서 효율적으로 사용할 수 있는 방법을 제공하기 때문에 상호연결망을 평가하는 척도 중의 하나이다.

하이퍼큐브와 스타그래프는 대표적인 상호연결망이다. 하이퍼큐브의 단점을 개선한 연결망으로 계층적 형태로 표현한 HCN 과 HON 등이 있다. 팬케익그래프와 스타그래프의 망비용을 개선하기 위해 하프팬케익 연결망이 제안되었다.

본 논문에서는 하이퍼큐브의 단점을 개선한 HCN 과 HON 사이의 임베딩을 분석하였다. $HCN(n,n)$ 은 $HON(C_{n+1}, C_{n+1})$ 에 연장율 3, 확장율 $\frac{(C_{n+1})^2}{2^n}$ 에 임베딩 가능함을 보였고, $HON(C_d, C_d)$ 를 $HCN(2d-1, 2d-1)$ 에 임베딩 하는 비용은 $O(d)$ 임을 보였다. 또한 스타그래프와 하프팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 스타그래프 S_n 은 하프팬케익 HP_n 에 연장율 11, 확장율 1에 임베딩

가능하고 평균 연장율이 8 이하임을 보였다. 또한 하프팬케익 HP_n 은 스타그래프 S_n 으로 임베딩 연장율은 $O(n)$ 임을 보였다. 본 연구 결과는 HCN 연결망과 스타그래프에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 HON 연결망과 하프팬케익 연결망에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미한다.

참고 문헌

- [1] Feng, T-Y. (1981). A Survey of Interconnection Networks. *IEEE Trans. computers*, 14(12), 12-27.
- [2] Akers, S. B., & Krishnamurthy, B., (1989). A Group Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks, *IEEE Trans. Computers*, 38(4), 555-566.
- [3] Bettayeb, S., Cong, B. Girou, M., & Sudborough, I. H. (1996). Embedding Star Networks into Hypercubes. *IEEE Trans. Computers*, 45(2), 186-194.
- [4] Hamdi, M., & Song, S. W. (1997). Embedding Hierarchical Hypercube Networks into the Hypercube. *IEEE Trans. Parallel Distributed Systems*, 8(9), 897-902.
- [5] Shen, X., Liang, W., & Hu, Q. (1997). On Embedding between 2D Meshes of the Same Size. *IEEE Trans. Computers*, 46(8), 880-889.
- [6] Deng, W., & Luo, Q. (2012). Embedding Complete Binary Trees into Locally Twisted Cubes" *Advanced Engineering Forum*, 6-7, 70-75.
- [7] Dong, Q., Zhou, J., Fu, Y., & Yang, X. (2012). Embedding a mesh of trees in the crossed cube. *Information Processing Letters*, 112(14-15), 599 - 603.
- [8] Kim, J.-S., & Lee, H.-O., (2013) Embedding Algorithms between HFN and HON. *International Conference on Advanced in Communication Technology*, 102-106.
- [9] Ghose, K., & Desai, K. R. (1995). Hierarchical Cubic Networks. *IEEE Trans.*

Parallel Distributed Systems, 6(4), 427-436.

- [10] Ghafoor, A., & Bashkow, T. R. (1991). A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks. *IEEE Trans. Computers*, 40(2), 225-232.
- [11] Kim, J.-S., Eddie Cheng, & Lee, H.-O.,(2013) Embedding hypercubes, rings, and odd graphs into hyper-stars, *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 86, no. 5, pp. 771-778.
- [12] Kim, J., & Lee, H. (2009). Hierarchical Odd Network(HON): A New Interconnection Network based on Odd Network. *Journal of KIISE : Computer Systems and Theory*, 36(5), 344-350.
- [13] 김종석 · 이형욱 · 김성원 (2013). 폴디드하이퍼큐브와 HFN 네트워크 사이의 임베딩 알고리즘, **정보처리논문지(컴퓨터 및 통신시스템)**, 2(4), 151-154.
- [14] Kim, J.-S., Kim M.-H., Lee, H.-O., & Sim. H., (2011). Embedding method for Bubblesort, Pancake, and Matrix-star Graphs, *Communications in Computer and Information Science*, vol. 150, pp. 243-252.
- [15] Kim, M.-H., Kim, D.-Y., & Lee, H.-O., (2010) Embedding Algorithms for Star, Bubble-Sort, Rotator-Faber-Moore, and Pancake Graphs, *LNCS*, vol. 6082, pp. 348-357.
- [16] 김종석 · 김성원 · 이형욱 (2010) 스타그래프와 팬케익, 버블정렬 그래프 사이의 임베딩 알고리즘, **컴퓨터교육학회논문지**, 13(5), 91-102.
- [17] 김주봉 (2014). **하프팬케익 Graph의 설계와 분석**. 석사 학위 논문, 순천대학교.

2004 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사)

2008 Oklahoma State University

컴퓨터과학과 박사후과정

2012 영남대학교 정보통신공학과 연구교수

2012~현재 University of Rochester

컴퓨터과학과 박사후과정

관심분야: 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 분석

E-Mail: rockhee7@gmail.com

이형욱



1994 순천대학교

전산학과(이학사)

1996 전남대학교

전산통계학과(이학석사)

1999 전남대학교 전산통계학과(이학박사)

1999 ~ 2002 한국정보화진흥원(선임연구원)

2002 ~ 현재 순천대학교 컴퓨터교육과 교수

2006 ~ 2007 University of Texas at Dallas

방문학자

관심분야: 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 보안

E-Mail: oklee@sunchon.ac.kr



김종석

1995 순천대학교

전자계산학과(이학사)

2001 순천대학교

컴퓨터과학과(이학석사)