

설계변수의 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계[§]

임우철* · 장준용* · 김정호** · 나중호** · 이창근** · 김용석** · 이태희*†

* 한양대학교 공과대학 미래자동차공학과, **한국지엠

Reliability-Based Design Optimization Considering Variable Uncertainty

Woochul Lim*, Junyong Jang*, Jungho Kim**, Jongho Na**, Changkun Lee**, Yongsuk Kim**
and Tae Hee Lee*†

* Dept. of Automotive Engineering, College of Engineering, Hanyang Univ.

** Technical Center, GM Korea

(Received February 21, 2014 ; Revised April 7, 2014 ; Accepted April 21, 2014)

Key Words: Variable Uncertainty(변동 불확실성), Tolerance Information(공차정보), Akaike Information Criterion(아카이케 정보척도), Reliability-Based Design Optimization(신뢰성 기반 최적설계), Engine Cradle(엔진 크래들)

초록: 대부분의 신뢰성 기반 최적설계는 최적설계 과정에서 설계점이 이동함에도 불구하고 설계변수의 불확실성은 변하지 않는다. 하지만 실제 문제에서 설계변수의 값에 따라 불확실성이 변하는 경우가 있다. 예를 들어 철판의 두께가 설계변수이고, 철판의 제작공차가 불확실성인 경우, 철판의 두께에 따라 철판의 제작공차가 달라지기 때문에 설계변수의 값에 따라 그 값의 불확실성이 변한다. 본 연구에서는 설계변수의 값에 따라 불확실성이 변하는 것을 변동 불확실성으로 정의하고, 이를 신뢰성 기반 최적설계에 적용하는 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계 기법을 제안한다. 수학예제에서 변동 불확실성을 고려하지 않은 신뢰성 기반 최적설계와 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계의 비교를 통해 제안한 방법의 필요성을 확인한다. 또한 엔진 크래들의 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계를 통해 제안한 방법의 유용성을 확인한다.

Abstract: Although many reliability analysis and reliability-based design optimization (RBDO) methods have been developed to estimate system reliability, many studies assume the uncertainty of the design variable to be constant. In practice, because uncertainty varies with the design variable's value, this assumption results in inaccurate conclusions about the reliability of the optimum design. Therefore, uncertainty should be considered variable in RBDO. In this paper, we propose an RBDO method considering variable uncertainty. Variable uncertainty can modify uncertainty for each design point, resulting in accurate reliability estimation. Finally, a notable optimum design is obtained using the proposed method with variable uncertainty. A mathematical example and an engine cradle design are illustrated to verify the proposed method.

1. 서론

최적설계는 제한조건을 만족하면서 목적함수를 최소화하는 설계변수의 최적 값을 찾는 설계 방법

이다. 나아가 설계변수의 불확실성을 고려하여 성능의 신뢰도를 만족하면서 목적함수를 최소화하는 설계변수의 최적 값을 찾는 확률론적 최적설계 방법을 신뢰성 기반 최적설계라 하고, 성능의 신뢰도를 예측하는 과정을 신뢰성 해석이라 한다.

예측의 정확성 또는 예측의 효율성을 개선하기 위한 많은 연구들이 진행되었다. 대표적으로 성능 함수를 테일러 급수 전개하여 효율적으로 신뢰도

§ 이 논문은 대한기계학회 2013년도 학술대회(2013. 12. 18.-20., 강원랜드) 발표논문임

† Corresponding Author, thlee@hanyang.ac.kr

© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

를 예측하는 급속확률적분^(1~2)이 있고, 예측의 정확성을 높이기 위해 응답의 모멘트를 이용하는 모멘트법^(3,4) 등이 있다. 이러한 신뢰성 해석 기법들은 신뢰성 기반 최적설계에 적용되어 제한조건인 응답의 신뢰도를 예측하기 위해 활용된다.^(5,6)

이러한 연구들은 설계변수의 불확실성을 평균, 분산 등과 같은 모수로 정량화하고 일부 모수를 최적화 동안 변하지 않는 상수로 가정한다. 하지만 설계변수의 값에 따라 그 값의 불확실성이 달라지는 경우에는 설계점의 변화에 따른 신뢰도의 정확성을 보장할 수 없다. 따라서 설계변수의 변화에 따라 그 불확실성이 달라지는 경우에는 최적화 과정에서 변동 가능한 불확실성을 고려해야 한다. 예를 들어 철판의 두께에 대한 불확실성인 두께 공차는 철판의 두께에 따라 달라지기 때문에 최적화 과정에서 두께의 변화에 따른 적절한 공차를 적용해야 한다.

본 연구에서는 신뢰성 기반 최적설계의 설계점 이동에 따라 불확실성이 변하는 것을 변동 불확실성으로 정의한다. 이산정보인 변동 불확실성을 예측하기 위해 근사함수를 도입하고 이를 고려한 신뢰성 기반 최적설계를 제안한다. 설계변수의 분포를 정규분포로 가정하고 변동 불확실성을 정규분포의 모수인 분산으로 가정하여 평균이 달라짐에 따라 분산이 변하는 변동 불확실성을 고려한다. 수학예제를 통해 제안한 방법의 필요성을 확인하고 엔진 크래들 문제에 적용하여 제안한 방법의 유용성을 확인한다.

2. 변동 불확실성

철판의 두께에 대한 공차는 철판의 두께(Nominal thickness), 항복강도, 압연방법 등에 따라 달라진다. 일반적으로 두께가 두꺼울수록, 항복강도가 높을수록 넓은 공차 범위를 갖는다. 또한 냉간압연 보다 열간압연으로 생산된 철판이 더 넓은 공차 범위를 갖는다. 한국산업표준(KS D 3500)에서 제시하는 열간압연 철판의 두께 공차를 Table 1에 나타내었다. 철판의 두께가 두꺼울수록 두께 공차가 커짐을 알 수 있다. 최적설계의 관점에서 볼 때 설계변수인 철판의 두께가 변하면 두께에 대한 공차도 변하는 것을 확인할 수 있다. 일반적으로 최적설계에서 초기 설계점과 최적 설계점의 두께는 서로 다르기 때문에 초기 설계정보로 가정한 공차는 최적점에서의 공차와 달라진다. 따라서 신뢰도를 고려한 설계에서 설계점의 이동에 따른 불확실성의 변동을 고려해야 정확한 신뢰도 예측이 가능하며 정확한 최적설계점을 도출할 수 있다.

Table 1 Tolerance information of hot-rolled steel plates supervised by Korea Industrial Standards

Nominal thickness [mm]	Tolerance [mm]
$0.00 < t < 1.25$	± 0.16
$1.25 \leq t < 1.60$	± 0.18
$1.60 \leq t < 2.00$	± 0.19
$2.00 \leq t < 2.50$	± 0.20
$2.50 \leq t < 3.15$	± 0.22
⋮	⋮
$6.30 \leq t < 10.00$	± 0.55

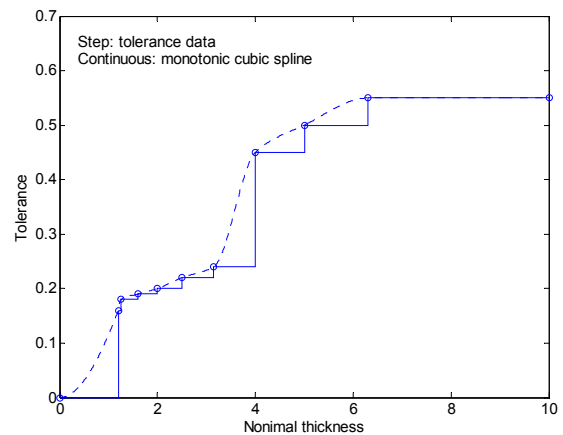


Fig. 1 Tolerance with respect to nominal thickness and monotonic cubic spline approximation of tolerance

일반적으로 이산정보인 공차는 Table 1, Fig. 1과 같이 계단함수와 같이 관리되고 있다. 본 연구에서는 민감도 기반 최적설계 알고리즘을 사용하기 위해 계단함수를 연속함수로 근사하여 함수의 연속성과 민감도의 연속성을 확보한다. 두께의 증가에 따라 공차가 커지기 때문에 단조증가를 만족하면서 주어진 공차 정보를 보간하는 Monotonic cubic spline⁽⁷⁾을 근사함수로 사용한다.

3. 신뢰성 기반 최적설계

신뢰성 기반 최적설계에서 제한조건은 성능의 신뢰도이며 이를 예측하는 과정을 신뢰성 해석이라 한다. 신뢰성 해석을 위해서는 불확실성에 대한 정보가 필요하다. 본 연구에서는 설계변수의 불확실성에 대한 정보가 연속함수가 아니라 이산정보로 주어진다고 가정하여 아카이케 정보척도를 이용한 신뢰성 해석 기법을 사용하여 신뢰도를 예측한다.

아카이케 정보척도는 이산정보를 확률밀도함수로 표현하기 위한 여러 후보 확률밀도함수 중에 가장 잘 추정된 확률밀도함수를 결정하는 방법이다. 아카이케 정보척도는 설계자가 정한 후보 확률밀도함수들의 최대수우량함수(f_{ml})와 모수의 개수(n_{free})를 이용하여 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.⁽⁸⁾

$$\varphi = 2(f_{ml} - n_{free}) \quad (1)$$

이산정보에 대해 φ 가 가장 작은 후보 확률밀도함수가 이산정보의 통계적 특성을 가장 잘 표현하는 확률밀도함수이며, 이를 이용하여 시스템의 신뢰도를 구한다.⁽⁹⁾

신뢰성 기반 최적설계는 식 (2)와 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{x} \\ &\text{to minimize} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && \text{Prob.}[G(\mathbf{X}) \leq 0] \geq R^{\text{target}} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 R^{target} 은 목표 신뢰도를 의미한다. 식 (1)의 아카이케 정보척도를 이용하여 구한 확률밀도함수를 이용하여 제한조건인 요구 성능을 만족할 확률을 예측한다. 또한 식 (2)에서 정의한 최적화 문제를 풀기 위해 Matlab의 민감도 기반 최적화 알고리즘인 fmincon을 사용한다.

4. 예제

설계변수의 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계를 수학예제와 공학예제인 엔진 크래들의 설계에 적용하여 제한한 방법의 필요성을 보여주고 유용성을 확인한다

4.1 수학예제

수학예제는 식 (3)과 같이 두 개의 설계변수와 세 개의 제한조건을 갖는다.

$$\begin{aligned} &\text{Find } x_i, \quad i = 1, 2 \\ &\text{to minimize } f(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 \\ &\text{subject to } \text{Prob.}[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] \geq 0.95, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 \leq x_i \leq 10$$

$$\begin{aligned} \text{where } G_1(\mathbf{X}) &= 1 - \frac{x_1^2 x_2}{20} \\ G_2(\mathbf{X}) &= 1 - \frac{(x_1 + x_2 - 5)^2}{30} - \frac{(x_1 - x_2 - 12)^2}{120} \\ G_3(\mathbf{X}) &= 1 - \frac{80}{(x_1^2 + 8x_2 + 5)} \\ X_i &= N(x_i, \sigma_i^2(x_i)) \end{aligned}$$

설계변수의 통계적 정보는 정규분포로 가정한다. 설계변수의 평균의 변화에 따른 표준편차 변동을

Fig. 1의 두께에 따른 공차 변동으로 가정한다. 초기점 $x_0 = (5, 5)$ 에서 표준편차는 두 설계변수 모두 0.5이다. 실제 문제에서 두께의 불확실성에 대한 정확한 분포를 알 수 없고 불확실성에 대한 측정치가 제한된 이산정보로 제공된다. 따라서 가정한 정규분포로부터 각 설계변수에 대해 100개의 샘플을 추출하여 신뢰도를 예측한다. 제한된 이산정보를 이용하여 신뢰도를 예측하기 위해 3장에서 설명한 아카이케 정보척도를 활용한다.

초기 설계와 변동 불확실성을 고려하지 않은 신뢰성 기반 최적설계와 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계의 결과를 Table 2와 Fig. 2에 나타내었다. 변동 불확실성을 고려하지 않은 신뢰

Table 2 Results of current, reliability-based design optimization and the proposed method for mathematical example

	Current design	RBDO	Proposed method
x_1	5.0000	5.9267	6.1713
x_2	5.0000	3.1978	2.7643
Tolerance of x_1	± 0.5000	± 0.5000 (0.5433)*	0.5491
Tolerance of x_2	± 0.5000	± 0.5000 (0.2440)*	0.2271
$\text{Prob.}[G_2(\mathbf{X}) \leq 0]$	1.0000	0.9500 (0.9985)**	0.9500
$\text{Prob.}[G_3(\mathbf{X}) \leq 0]$	0.9518	0.9500 (0.9515)**	0.9500
$f(\mathbf{x})$	0	-2.7288	-3.4070

* true tolerance

** true reliability

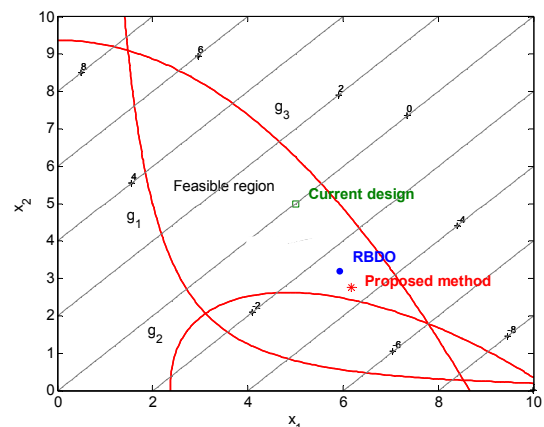


Fig. 2 Optimum point of current, reliability-based design optimization and the proposed method for mathematical example

Table 3 Results of current and the proposed method for engine cradle example

	Current design		Conventional RBDO		Proposed method	
	Normalized thickness	Tolerance	Normalized thickness	Tolerance	Normalized thickness	Tolerance
x_1	0.100	± 0.19	0.888	± 0.19 (0.2284)	0.893	± 0.2287
x_2	0.100	± 0.19	0.165	± 0.19 (0.1927)	0.163	± 0.1926
x_3	0.435	± 0.20	0.276	± 0.20 (0.1927)	0.275	± 0.1927
x_4	0.435	± 0.20	0.151	± 0.20 (0.1867)	0.147	± 0.1865
x_5	0.714	± 0.22	0	± 0.22 (0.1389)	0	± 0.1389
x_6	0.536	± 0.20	0	± 0.20 (0.1389)	0	± 0.1389
x_7	0.464	± 0.20	0	± 0.20 (0.1389)	0	± 0.1389
x_8	0.067	± 0.14	0	± 0.14 (0.1181)	0	± 0.1181
x_9	0.067	± 0.14	0	± 0.14 (0.1181)	0	± 0.1181
Prob. (G_{19})			0.9987 (0.9976)		0.9987	
Prob. (G_{37})			0.9987 (0.9989)		0.9987	
Normalized mass	1		0.9772		0.9778	

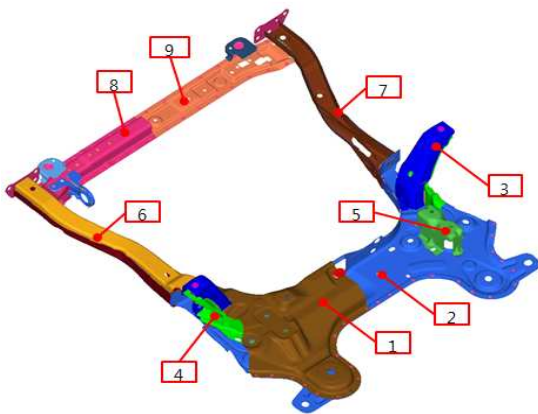


Fig. 3 Design variables of engine cradle

성 기반 최적설계에서 최적 설계점의 표준편차는 초기 설계와 같은 0.5 이다. 하지만 x_1 은 초기 설계보다 설계변수의 값이 커졌기 때문에 표준편차 역시 증가해야 하며, 반면 x_2 의 표준편차는 감소해야 한다. 불확실성의 변동을 반영하여 제한조건인 신뢰도를 다시 예측하면 목표 신뢰도인 95%와 다른 것을 확인할 수 있다. 활성 제한조건 G_2 와 G_3 의 신뢰도는 99.85%와 95.15%로 목표 신뢰도인 95% 보다 높기 때문에 과도설계라 할 수 있다.

제안한 방법으로 구한 설계변수의 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계의 해는 Fig. 1로 가정한 변동 불확실성을 고려했기 때문에 최적점에서의 표준편차가 초기 설계와 다르게 반영되며, 이에 따라 활성 제한조건의 신뢰도 또한 목표 신뢰도인 95%와 정확히 일치하는 것을 확인할 수

있다. 목적함수 관점에서 과도설계인 기존의 신뢰성 기반 최적설계보다 제안한 방법의 목적함수가 더 최소화 된 것을 확인할 수 있다.

4.2 엔진 크래들의 신뢰성 기반 최적설계

엔진 크래들은 엔진, 현가장치, 조향장치 등과 연결되어 차체에 고정되는 부품으로 강성, 내구, 충격 등 차량의 안전성 측면에서 매우 중요한 부품이다. 본 절에서는 한국지엠에서 생산하는 엔진 크래들에 철판 공차의 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계를 적용하여 제안한 기법의 유용성을 확인한다.

엔진 크래들의 신뢰성 기반 최적설계 정식화는 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Find } x_i, i = 1, \dots, 9 \\ & \text{to minimize mass} \\ & \text{subject to } \text{Prob.}[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] \geq 99.87\% (3\sigma) \quad (5) \\ & \quad \quad \quad LB_i \leq x_i \leq UB_i \end{aligned}$$

where

$$G_j(\mathbf{X}) = \text{stiffness}_j^{\text{target}} - \text{stiffness}_j(\mathbf{X}), j = 1, \dots, 27$$

$$G_j(\mathbf{X}) = \text{life}_j^{\text{target}} - \text{life}_j(\mathbf{X}), j = 28, \dots, 52$$

$$G_j(\mathbf{X}) = \text{perm}_j(\mathbf{X}) - \text{perm}_j^{\text{target}}, j = 53, \dots, 56$$

$$X_i = N(x_i, \sigma_i^2(x_i))$$

9 개의 설계변수와 56 개의 제한조건을 갖는 문제이다. 설계변수는 각 철판의 두께이며 이를 Fig. 3에 나타내었다. 철판의 두께에 대한 변동 불확실성은 Table 1을 사용한다. 제한조건은 엔진 크래들

의 성능에 대한 신뢰도이다. 56 개의 성능은 27 개의 강성, 25 개의 수명과 4 개의 영구변형량이며 사전에 구성된 56 개의 근사모델을 이용한다.

초기 설계와 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계의 결과를 Table 3 에 나타내었다. i 번째 설계변수의 값은 i 번째 설계변수의 하한 (LB_i) 및 상한 값 (UB_i)을 0 과 1 로 정규화한 값이다. 최적화 후 x_1 과 x_2 는 초기 설계보다 증가하며 그 외 변수는 모두 감소한다. 이에 따라 x_1 과 x_2 의 공차는 늘어나고 그 외 변수의 공차는 줄어야 한다. 기존 신뢰성 기반 최적설계는 불확실성의 변동을 고려하지 않기 때문에 최적점에서의 신뢰도가 정확하지 않다. 반면 변동 불확실성을 고려한 제안한 방법의 신뢰성 기반 최적설계는 최적점에 적절한 분산이 적용되어 강성 제한조건 (G_{19})과 수명 제한조건 (G_{37})은 활성 제한조건으로 신뢰도를 99.87% 만족하고 그 외 54 개의 제한조건은 비활성 제한조건으로 신뢰도를 100% 만족하면서 목적함수인 질량을 최소화하는 결과를 도출한다.

5. 결론

기존의 신뢰성 기반 최적설계는 설계점이 이동함에 따라 설계변수의 불확실성이 달라질 수 있음에도 불구하고 변하지 않는 값으로 가정한다. 하지만 초기 설계로부터 얻은 설계변수의 불확실성은 최적 설계점에서의 불확실성과 다르기 때문에 제한조건인 성능의 신뢰도의 정확성을 보장할 수 없다. 본 연구에서는 설계점의 이동에 따른 설계변수의 불확실성의 변동을 변동 불확실성으로 정의하고, 변동 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 최적설계 기법을 제안한다.

변동 불확실성을 고려한 수학예제를 통해 기존의 신뢰성 기반 최적설계 시 최적점에서 예측한 신뢰도의 부정확함을 보였다. 제안한 기법을 사용하여 제한조건인 신뢰도가 목표 신뢰도를 정확하게 만족하면서 목적함수를 최소화하는 결과를 도출하여 제안한 방법의 필요성을 확인하였다.

또한 공학예제인 엔진 크래들의 신뢰성 기반 최적

설계에서는 실제 생산되는 철판의 공차 정보를 변동 불확실성으로 고려하였다. 설계점의 이동에 따라 적절한 설계변수의 불확실성이 고려된 최적해를 도출함으로써 제안한 방법을 유용성을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국지엠의 지원으로 수행된 “차량구조의 위상최적화” 과제의 연구결과 중 일부임을 밝힙니다. 연구비 지원에 감사 드립니다.

참고문헌 (References)

- (1) Cornell, C. A., 1969, "A Probability-Based Structural Code," *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 66, No. 12, pp. 974~985.
- (2) Breitung, K., 1984, "Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals," *ASCE J Eng Mech*, Vol. 110, No. 3, pp. 357~366.
- (3) Lee, S. H., Kwak, B. M., 2006, "Response Surface Augmented Moment Method for Efficient Reliability Analysis," *Structural Safety*, Vol. 28, No. 3, pp. 261~272.
- (4) Rahman, S., Xu, H., 2004, "A Univariate Dimension-Reduction Method for Multi-Dimensional Integration in Stochastic Mechanics," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, No. 4, pp. 393~408.
- (5) Youn, B. D., Choi, K. K., Yang, R. J., Gu, L., 2004, "Reliability-Based Design Optimization for Crashworthiness of Vehicle Side Impact," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26, No. 3-4, pp. 272~283.
- (6) Aoues, Y., Chateauneuf, A., 2010, "Benchmark Study of Numerical Methods for Reliability-Based Design Optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 41, No. 2, pp. 277~294.
- (7) Fritsch, F. N., Carlson, R. E., 1980, "Monotonic Piecewise Cubic Interpolation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 17, No. 2, pp. 238~246.
- (8) Sakamoto, Y., Ishiguro, M., Kitagawa, G., 1986, *Akaike Information Criterion Statistics*, KTK Scientific Publishers.