

불확실성 지연시간 시스템의 모델추종제어

Model Following Control of Linear Time-Invariant System with Uncertain Time Delay

김혜경* · 김영철†
(Hye-Kyung Kim · Young Chol Kim)

Abstract - This paper presents a new approach to design a robust tracking controller for linear time-invariant systems with uncertain time-delay. By introducing the model following control (MFC) structure which consists of two loops in nature, we show that the controller is capable of having a predictive control action and effectively tracking the reference output with a desired transient response as well. Three design techniques to achieve good tracking performance are suggested. It is also analytically shown that the tracking performance of the proposed scheme is more robust than that of typical single-loop feedback structure. An illustrative example is given to compare the tracking performances of the proposed methods with a single loop method.

Key Words : Uncertain time-delay, Model following control, Characteristic ratio assignment (CRA), Robust tracking performance

1. 서론

화학 프로세스, 공압, 유압 시스템과 같은 대부분의 산업 시스템은 지연시간을 포함하고 있다. 지연시간 (time delay)의 발생요인은 (i) 입력되는 물질, 에너지, 정보 등의 전달 소요 시간 (transport delay), (ii) 다수의 저차 시스템이 종속적으로 결합된 시스템에서 응답지연 (time lag)의 누적, (iii) 감지기(sensor)와 제어기 등에서 처리시간 소요 (processing time) 등으로 요약할 수 있다[1]. 지연시간은 특성방정식을 무한차수로 나타내게 하고, 피드백 시스템에서 모델이나 기준입력 변동에 따른 오차 보상도 지연되도록 영향을 주기 때문에 동적시스템 안정도 해석이나 제어기 설계를 매우 어렵게 하는 요소이다[2, 3, 4]. 지연시간시스템 (time-delay systems)의 이런 문제에 대해 지난 수십 년 동안 많은 연구가 있었으며, 안정도 해석에 대한 주요 접근방법과 최근의 연구결과들을 조망한 문헌으로 [4-7] 등을 참고할 수 있다.

지연시간을 신중하게 고려해야하는 실제 프로세스의 제어기 설계는 뛰어난 현대적 기법(예, H_∞/H_2 강인최적제어, model predictive control)들이 제시되어 있음에도 불구하고 복잡성 때문에 대부분 간단한 구조의 고전적 제어기 설계기법을 적용하고 있다[8]. 이러한 접근방법의 대표적인 제어기 구조로 스미쓰 예측기(Smith predictor) [9]를 들 수 있는데

제어기가 예측기능을 갖도록 플랜트 모델과 지연시간에 대한 정보가 필요하다. 그러나 스미쓰 예측기는 모델과 지연시간 오차에 매우 민감하여 정확한 모델을 모를 경우 제어 성능을 크게 악화시키는 단점이 있다. 이러한 문제를 개선하기 위한 다양한 연구가 있었으며 참고문헌 [10]에 관련 연구 결과를 잘 소개하고 있다. 보다 간단한 설계기법은 플랜트의 지연시간을 Pade 근사화를 이용하여 유한차수의 전달함수로 대체하고 지연시간 없는 단일루프 제어기 설계기법을 적용하는 것이다. 이러한 접근방법에서는 안정도를 보장할 수 없기 때문에 대개 공칭모델에 대해 제어기를 설계한 후 Nyquist 안정도 판별법 등을 이용하여 페루프 안정도를 확인한다.

본 논문에서 고려하는 문제는 단일 입출력 선형시스템으로서 프로세스의 모델은 주어지고 지연시간은 불확실성을 갖는데 그 최솟값과 최댓값은 알 수 있다고 가정하였을 때, 미리 설정한 오버슈트와 정착시간을 만족하는 기준모델과 대응을 잘 추종할 수 있는 제어기 구조와 설계 기법을 제시하는 것이다. 이 문제의 핵심적인 요구사항은 (i) 제안한 제어기 구조가 예측기능을 포함해야 하며, (ii) 미리 주어진 시간응답을 만족하는 기준입력을 발생시킬 수 있어야 하며, (iii) 지연시간 불확실성에도 불구하고 추종성능을 크게 악화시키지 않아야 한다는 것이다.

본 논문에서는 2 루프 (two-loop) 모델추종제어기 (model following control: MFC) 구조를 도입하여 제어기가 예측기의 기능을 가질 수 있으며 두 루프의 제어기를 각각 독립적으로 설계할 수 있기 때문에 위 요구사항을 만족시키는 제어기 설계가 가능함을 보이고자 한다. MFC구조는 2 자유도 (degree of freedom: DOF) 내부모델제어(internal model control: IMC)의 변환 형태로서[11] 추종성능과 모델 불확실성에 대해 강인성을 높일 수 있는 특성이 있다 [12-14]. MFC 구조는 기본적으로 2개의 피드백 루프를 갖는데, 루프 1은 플랜트의 공칭모델(nominal model)을 근거로 기준모델

* Dept. of Electronics Eng., Chungbuk National University, Cheongju, Korea

† Corresponding Author : Dept. of Electronics Eng., and Research Institute for Computer & Information Communication, Chungbuk National Univ., Cheongju, Korea

E-mail : yckim@cbu.ac.kr

Received : April 3, 2014; Accepted : May 27, 2014

(reference model)을 생성하며 루프 2는 플랜트를 포함한 제어루프이다. 루프 1로부터 기준모델의 제어입력과 시간응답을 출력하여 루프 2의 입력신호로 인가되는 구조이다. 루프 1의 제어기는 그 출력이 원하는 최대오버슈트와 정착시간을 만족하는 과도응답을 갖도록 설계해야 하는데 여기서는 이 목적을 위해 특성비지정법 (characteristic ratio assignment: CRA)[15, 16]을 적용한다. CRA 기법은 일종의 모델정합방식(model matching method)으로서 기준 페루프 특성다항식을 극 대신 특성파라미터를 지정하여 합성하는 방식이다. 원하는 과도응답을 만족하는 단일루프 제어기 설계에 매우 효과적이다.

이러한 MFC구조의 제어기 설계에서 가장 중요한 부분은 루프 2의 제어기 설계인데, 지연시간 불확실성을 갖는 플랜트에 대해 페루프 안정도를 보장해야하며 또한 추종성을 만족해야 한다. 본 논문에서는 지연시간 불확실성에 대해 강인안정도를 보장하는 제어기 설계문제를 다루지는 않는다. 대신 지연시간을 포함한 공칭모델을 Pade 근사화하고 CRA를 이용하여 제어기를 설계한 뒤 지연시간의 변동 최대, 최소값에 대해 나이퀴스트 판별법으로 페루프 안정도를 검증하게 된다. 다시 말해 지연시간 플랜트에 대해 단일루프 피드백 제어기를 설계하는 경우와 유사하게 MFC 구조의 루프2의 안정한 제어기도 설계할 수 있다고 가정한다. 여기서 중요하게 다루는 문제는 페루프 안정도를 손상하지 않으면서 추종오차를 개선하는 루프 2 제어기의 설계방법을 제시하는데 있다. 기본적으로 2-파라미터 구조(two parameter configuration: TPC)를 이용하며 이 문제에 몇 가지 설계방법을 제시하고자 한다. TPC는 단일루프 피드백 시스템의 2 자유도 제어기 구조 중 가장 유리한 구조이며 최소 차수의 관측기 형태로 구현할 수 있는 장점이 있다[17]. 제안한 제어기 구조가 단일루프 제어기 구조에 비해 추종오차를 개선할 수 있음을 해석적으로 보이고 예제를 통하여 제안한 방법과 단일 피드백방식과의 추종성과 강인성 개선 특성을 비교하고자 한다.

2. 불확실성 지연시간 시스템의 과도응답 추종 제어기 설계문제

본 논문에서 고려하는 플랜트 정보와 제어기 설계 조건을 다음과 같이 가정한다.

(A.1) 플랜트는 선형시불변 단일입출력(single input single output: SISO) 모델로 표현되며 주어진다.

(A.2) 플랜트 모델은 불확실성 입력지연시간을 포함하며 그 상한 값과 하한 값을 주어진다.

(A.3) 제어기 주요 설계목적은 출력이 스텝기준입력에 대해 원하는 과도응답특성을 추종하는 것이다. 여기서 원하는 과도응답은 최대오버슈트와 정착시간(settling time)으로 정의된다.

(A.4) 제어기는 불확실성 지연시간에 대해 예측제어 특성을 가져야 하며, 또한 강인한 추종성을 추구한다.

이러한 제어기 설계 문제는 산업공정에서 매우 흔히 나타나는 문제이며 서론에서 언급한 바와 같이 여러 가지 현대적 제어기법을 이용할 수도 있으나 여기서는 가능한 간단한

설계 방법을 제시하고자 한다. 본 논문에서는 위 요구조건을 가능하게 하는 제어기 구조로서 그림 1과 같이 전체적으로는 MFC 제어기 구조를 취하고 각각의 루프 제어기는 2-파라미터 구조(TPC)를 갖는 시스템을 고려한다. 여기서 이러한 제어기 구조를 MFC-TPC라 부르기로 한다.

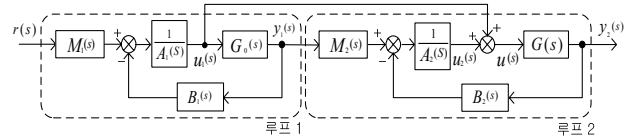


그림 1 MFC-TPC 제어기 구조
Fig. 1 Configuration of the MFC-TPC Controller

그림 1에서 플랜트 전달함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(s) = G_o(s)e^{-Ls} \tag{1}$$

여기서 $G_o(s) = N_o(s)/D_o(s)$ 는 지연시간이 없는 공칭모델이다. 불확실성 지연시간을 다음과 같이 정의한다.

$$L^- \leq L \leq L^+ \tag{2}$$

여기서 L^-, L^+ 은 지연시간의 하한 값, 상한 값을 나타낸다. 가정 (A.2)에 의해 이 값들은 주어진다.

루프 1의 TPC 제어기 $\{A_1(s), B_1(s), M_1(s)\}$ 와 루프 2의 TPC 제어기 $\{A_2(s), B_2(s), M_2(s)\}$ 는 모두 다항식이며 조건 (A.3)와 (A.4)를 만족하도록 각각 설계되어야 한다.

MFC의 설계원리를 따르면 루프 1은 원하는 응답특성을 갖는 기준모델(reference model)을 생성하도록 구성된다. 기준모델전달함수는

$$T_1(s) = \frac{y_1(s)}{r(s)} = \frac{M_1(s)N_0(s)}{\delta_1(s)} \tag{3}$$

여기서 $\delta_1(s)$ 는 루프 1의 특성다항식이며 다음과 같다.

$$\delta_1(s) = A_1(s)D_o(s) + B_1(s)N_0(s) \tag{4}$$

설계조건 (A.3)에 의하면 루프 1의 출력 $y_1(t)$ 는 플랜트가 추종해야할 루프 2의 기준입력이 되며 원하는 과도응답을 만족해야 한다. 다시 말해, 루프 1의 제어기 $\{A_1(s), B_1(s), M_1(s)\}$ 는 출력 $y_1(t)$ 가 주어진 최대오버슈트와 정착시간을 만족하도록 설계되어야 한다. 루프 1의 제어입력은

$$u_1(s) = \frac{1}{A_1(s)} \{M_1(s)r(s) - B_1(s)y_1(s)\} = \frac{D_o(s)M_1(s)}{\delta_1(s)} r(s) \tag{5}$$

여기서 주목해야할 점은 제안한 MFC-TPC 구조의 루프 1의 공칭 플랜트 $G_o(s)$ 에 지연시간을 포함하지 않도록 고려하기 때문에 이 루프 1의 출력 $y_1(t)$ 는 플랜트가 지연시간이 없을 경우(plant with delay free)의 페루프 응답이고, $u_1(t)$ 는 이 출력에 대응하는 제어입력이라는 것이다. 이 신호가 루프 2에 인가되기 때문에 $\{u_1(t), y_1(t)\}$ 는 루프 2에서 보면 지연시간의 변동에 영향을 받지 않는 예측제어 입력이라 할 수 있다.

그림 1에서 플랜트 출력은 (3)~(5)를 이용하면 다음과 같이 유도된다.

$$y_2(s) = \frac{M_2(s)N_o(s)e^{-Ls}}{\delta_2(s)}y_1(s) + \frac{A_2(s)N_o(s)e^{-Ls}}{\delta_2(s)}u_1(s) \\ = \frac{\{A_2(s)D_o(s) + M_2(s)N_o(s)\}M_1(s)N_o(s)e^{-Ls}}{\delta_1(s)\delta_2(s)}r(s). \quad (6)$$

여기서 $\delta_2(s)$ 는 루프 2의 특성다항식이며 다음과 같이 준다항식(quasi polynomial)이다.

$$\delta_2(s) = A_2(s)D_0(s) + B_2(s)N_0(s)e^{-Ls} \quad (7)$$

이제 스미쓰 원리(Smith's principle) [1]에 의거 기준입력 $y^*(t)$ 에 대한 지연시간 시스템의 이상적인 페루프 응답 $y^*(t)$ 를 정의하면 $y^*(t) := y_1(t-L)$ 로 놓게 된다. 즉, 지연시간 없는 페루프 시스템 응답을 L 만큼 지연시킨 것을 플랜트 출력이 추종해야 할 목표기준입력(target reference input)으로 정의한다. 따라서 (3)을 이용하면 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$y^*(s) := y_1(s)e^{-Ls} = \frac{M_1(s)N_o(s)e^{-Ls}}{A_1(s)D_0(s) + B_1(s)N_0(s)}r(s) \quad (8)$$

그리고 기준입력 추종오차를

$$e_{mfc}(t) := y^*(t) - y_2(t) \quad (9)$$

로 정의한다.

결국, 본 논문에서 고려한 설계 조건 (A.1)~(A.4)을 만족하는 제어기 설계문제는 (i) $y_1(t)$ 가 원하는 과도응답을 갖도록 루프 1 제어기 $\{A_1(s), B_1(s), M_1(s)\}$ 를 설계하고, (ii) (2)의 지연시간 불확실성에 대해 (9)의 추종오차를 최소화하도록 루프 2의 제어기 $\{A_2(s), B_2(s), M_2(s)\}$ 를 설계하는 문제로 변환되었다고 할 수 있다. 이것이 본 논문에서 다룰 주요 문제이다. 안정도 관점에서 보면 (4), (7)의 두 특성다항식을 안정화 되도록 각 루프의 제어기를 독립적으로 설계할 수 있다. 지연시간 불확실성에 대해 (7)을 안정화시키는 강인제어기 설계문제는 여기서는 고려하지 않기로 한다. 다만, 지연시간의 공칭값(여기서는 최소, 최댓값의 평균값으로 취하기로 함)을 기준으로 추종성능을 만족하도록 설계한 제어기가 나이퀴스트 판별법을 적용하여 지연시간 불확실성에 대해 적절한 안정도 여유를 갖는지 확인하게 된다.

3. 시간지연 시스템의 MFC-TPC 제어기의 설계

본 절에서는 앞 절 마지막에서 기술한 지연시간 시스템의 제어기 설계문제에 대해서, 각 루프의 제어기를 어떤 기준으로 설계하는지를 보이고 지연시간에 대해 추종오차를 최소화하기 위한 루프 2 제어기 설계방법을 제시하고자 한다. 또한 단일 피드백 제어기에 비해 추종오차에 대한 개선특성을 해석적으로 보이기로 한다.

3.1 과도응답명세를 만족하는 페루프 기준모델의 설계 : 루프 1 제어기의 설계

MFC-TPC구조에서 기준모델은 루프 1의 페루프 전달함수인 (3)에 의해 표현된다. CRA기법[15, 16]은 일종의 모델 정합방법(model matching method)으로서 먼저 원하는 과도응답을 낚는 목표전달함수, $T_1^*(s)$ 를 설정하고, 두 모델이 정합 되도록 (즉, $T_1(s) \equiv T_1^*(s)$) 제어기 계수를 대수적으로 계산하는 방법이다. 페루프 극 대신 특성비(characteristic

ratio)와 일반화시정수(generalized time constant)를 선택하여 $T_1^*(s)$ 를 합성한다는 것을 제외하면 극배치방식 (pole placement method)과 유사하다고 할 수 있다.

임의의 특성다항식

$$\delta(s) = \delta_n s^n + \delta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \delta_1 s + \delta_0, \quad (\delta_i > 0) \quad (10)$$

에 대해 특성비 α_k 와 일반화시정수 τ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha_1 := \frac{\delta_1^2}{\delta_0 \delta_2}, \alpha_2 := \frac{\delta_2^2}{\delta_1 \delta_3}, \dots, \alpha_{n-1} := \frac{\delta_{n-1}^2}{\delta_{n-2} \delta_n}, \quad (11)$$

$$\tau := \frac{\delta_1}{\delta_0}. \quad (12)$$

특성다항식 (10)의 각 계수는 임의의 δ_0 에 대해 특성비와 일반화시정수의 항으로 표현할 수 있다.

$$\delta_1 = \delta_0 \tau \quad (13)$$

$$\delta_k = \frac{\delta_0^k \tau^k}{\alpha_{k-1} \alpha_{k-2}^2 \dots \alpha_1^{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \quad (14)$$

Kim 등[15]은 단지 α_1 과 τ , 두 파라미터만으로 임의의 n차 다항식을 나타내는 다음의 소위 **K-다항식**을 정의하였다.

$$\delta_K(s, \alpha_1, \tau) = \delta_0 \left(\frac{\tau^n}{\prod_{i=1}^{n-1} (I_{n-i}^n \alpha_1)^i} s^n + \dots + \frac{\tau^2}{\alpha_1} s^2 + \tau s + 1 \right) \quad (15)$$

여기서,

$$\alpha_k = I_k^n \cdot \alpha_1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (16)$$

$$I_k^n := \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (17)$$

Kim 등[15, 16]에 따르면, **K-다항식**을 $\alpha_1 \geq 2$ 범위에서 선택하면 임의의 n차 다항식은 안정하고, α_1 증가에 대해 단조증가(monotonically increasing) 제동특성을 갖는다는 것을 보였으며 또한, 주어진 제동비에 대해 τ 만으로 응답속도를 결정할 수 있음을 보였다. 한 예로 **K-다항식**을 분모로 하는 전극전달함수(all poles transfer function: APTF)를 고려하자. 특성비를 고정하고 τ 를 증가시키면 대응하는 분모다항식의 모든 근을 동일한 제동비로 원점 방향으로 이동시켜 시간응답을 느리게 한다. 반대로 특성비를 고정하고 τ 를 감소시키면 대응하는 APTF의 시간응답은 동일한 오버슈트를 유지하면서 응답속도만 빨라지게 된다. 이러한 성질을 이용하여 고정된 영점을 갖는 기준모델을 오버슈트가 없고 원하는 정착시간을 갖도록 합성하는 방법을 제시하였다[16]. 그러나 이방법도 영점의 위치가 원점 근처에 놓인 경우에는 원하는 정착시간을 만족하는 기준모델을 합성하지 못할 수도 있다. 따라서 우리는 플랜트에 대해 다음 가정을 부가하기로 한다.

(A.5) 고려할 플랜트는 그 영점이 원점 근처에 존재하지 않으며, 또한 어떤 실수 영점도 복소평면의 우반평면에 존재하지 않는다.

가정 (A.5)에서 플랜트가 우반평면에 실수 영점을 갖지 않는 것은 오버슈트가 없는 피드백 제어기의 존재를 위한 필요충분조건이다[18].

Kim의 알고리즘[16]을 요약하면 다음과 같다. [알고리즘의 수치 예는 4절에서 보이기로 하고 이 절에서는 생략한다.]

[알고리즘 1] K-다항식을 이용한 원하는 과도응답을 갖는 기준모델의 합성: n 차 APTF모델의 경우.

(i) 임의로 $\delta_o = 1, \tau_1 = 1$ 로 설정하고, APTF 모델 $T_A^*(s) = \frac{\delta_o}{\delta_K(s, \alpha_1, \tau)}$ 의 스텝응답이 오버슈트를 일으키지 않는 α_1 은 미리 알 수 있다. (예를 들어 n=3, 4, 5, 6이면 은 2.836, 2.646, 2.538, 2.464 이다. [16]) 이 α_1 과 $\tau_1 = 1$ 을 (15)에 대입하여 $T_{A1}^*(s) = \frac{\delta_o}{\delta_K(s, \alpha_1, \tau_1 = 1)}$ 을 합성한 후 스텝응답을 구한다. 이 응답의 정착시간을 구하여 t_{s1} 이라고 하자.

(ii) 원하는 시간응답의 정착시간을 t_s^* 라고 하면 t_s^* 를 넣는 일반화시정수는 식 $\tau_2 = \frac{t_s^*}{t_{s1}} \tau_1$ 에 결정된다[16].

(iii) 스텝 (i)의 α_1 과 스텝 (ii)의 τ_2 를 다시 (15)에 대입하여 K-다항식을 계산한 후 $T_{A2}^*(s) = \frac{\delta_o}{\delta_K(s, \alpha_1, \tau_2)}$ 를 구성한다. 이 $T_{A2}^*(s)$ 는 오버슈트가 없으며 원하는 정착시간을 주는 n 차 APTF모델이다.

[알고리즘 2] K-다항식을 이용한 원하는 과도응답을 갖는 기준모델의 합성: 고정 영점을 갖는 n 차 모델의 경우.

고정 영점 다항식 $N(s)$ 는 가정 (A.5)를 만족하고, 고려할 n 차 기준전달함수를 다음과 같다고 하자.

$$T_N^*(s) = K_1 N(s) \quad T_{A3}^*(s) = \frac{KN(s)}{\delta_K(s, \alpha_1, \tau_3)} \quad (18)$$

(iv) [알고리즘 1]을 이용하여 $N(s) = 1$ 일 때의 APTF 모델에 대한 $\delta_K(s, \alpha_1, \tau_2)$ 를 구한다.

(v) τ_3 를 τ_2 보다 증가시켜 $T_N^*(s)$ 가 원하는 제동특성을 만족하는 τ_3 를 결정한다. 이 경우 정착시간은 증가하게 된다. 플랜트 영점 위치에 따라 오버슈트와 정착시간 모두를 만족시키지 못할 수도 있으며 이 경우에는 둘 사이에 균형을 고려하여 τ_3 를 선택한다.

이제 목표전달함수를 K-다항식을 분모다항식으로 하고 (3)에 따라 분자다항식에 $N_o(s)$ 를 포함하도록 구성하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_1^*(s) = \frac{m_o N_o(s)}{\delta_1^K(s)} \quad (19)$$

여기서 $T_1^*(s)$ 을 Type I이 되도록 하려면 $m_o = \delta_1^K(0)/N_o(0)$ 로 선택한다. 루프 1의 폐루프 시스템이 시간응답을 만족하는 목표전달함수 $T_1^*(s)$ 와 정합되도록 제어기를 설계하는 문제는 먼저 다음 디오판틴(Diophantine)식 (20)을 풀어 피드백 제어기 $\{A_1(s), B_1(s)\}$ 을 구하고, 루프 1의 스텝기준입력에 대해 $y_1(t)$ 의 정상상태오차를 고려하여 $M_1(s)$ 를 구하게 된다. 즉,

$$\delta_1^K(s) = A_1(s)D_o(s) + B_1(s)N_o(s) \quad (20)$$

$$M_1(s) = m_o = \frac{\delta_1^K(0)}{N_o(0)} \quad (21)$$

제어기의 차수 조건이 만족되면 (20)은 고유해를 가지며 대수적으로 풀 수 있다.

3.2 MFC-TPC의 루프 2 제어기의 설계

(1) 루프 1과 루프 2의 특성다항식과 폐루프 응답의 상관관계

먼저 MFC-TPC 피드백 시스템의 루프 1과 루프 2의 특성다항식의 근이 플랜트 응답 $y_2(t)$ 에 어떤 관계가 있는지 해석하기로 한다. 이 결과는 루프 2의 제어기 $\{A_2(s), B_2(s), M_2(s)\}$ 를 어떤 조건으로 설계되어야 하는지를 제공할 것이다. 대수적으로 접근하기 위해 지연시간을 Pade 근사화한 유리함수 $e^{-Ls} \approx L_n(s)/L_d(s)$ 로 나타내면 플랜트는

$$G(s) = G_o(s)e^{-Ls} \approx \frac{N_o(s) L_n(s)}{D_o(s) L_d(s)} = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} := G_p(s) \quad (22)$$

기준입력 $r(t)$ 를 단위스텝입력이라고 가정하면 출력 식 (6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_2(s) \approx \frac{\{A_2(s)D_o(s) + M_2(s)N_o(s)\}M_1(s)N_p(s)}{P(s)\delta_{2p}(s)} \quad (23)$$

여기서 $P(s) = s\delta_1(s)$ 이고, $\delta_{2p}(s)$ 는 다음과 같다.

$$\delta_{2p}(s) = A_2(s)D_p(s) + B_2(s)N_p(s) \quad (24)$$

(23)을 두 모드(mode)에 대해 부분분수로 전개하면

$$y_2(s) \approx \frac{m_2(s)}{\delta_{2p}(s)} + \frac{m_p(s)}{P(s)} \quad (25)$$

$m_2(s)$ 와 $m_p(s)$ 는 다음 관계로부터 구해진다.

$$m_2(s)P(s) + m_p(s)\delta_{2p}(s) = \{A_2(s)D_o(s) + M_2(s)N_o(s)\}M_1(s)N_p(s) \quad (26)$$

(25)를 라플라스 역변환 하여 $y_2(t) = y_n(t) + y_f(t)$ 로 나타내면, $y_n(t)$ 은 (25)의 우변 첫 번째 항의 역변환으로 자연응답(natural response)에 해당되고 $y_f(t)$ 은 (25)의 우변 두 번째 항의 역변환으로 강제응답(forced response)이라고 할 수 있다. $\delta_1(s), \delta_2(s) (\delta_{2p}(s))$ 가 안정하도록 각 루프의 제어기를 설계하기 때문에 과도응답 항 $y_n(t)$ 는 시간이 경과함에 따라 영으로 수렴하게 된다.

$y_f(t)$ 는 (8)의 목표기준입력 $y^*(t)$ 에 대응하며 루프 1 제어기에 의해 결정된다. $y_n(t)$ 는 루프 2 특성다항식에 의해 지배를 받으므로 안정한 범위에서 가능한 빠르게 감쇠하도록 루프 2의 제어기를 설계하는 것이 유리하다. 다시 말해, 각 루프의 목표특성다항식을 선택할 때 $\delta_1(s)$ 에 비해 $\delta_{2p}(s)$ 의 응답속도를 빠르게 고려하는 것이 추종성능을 개선시킬 수 있음을 의미한다. 이 성질은 3.1절에서 기술한 바와 같이 CRA를 이용하여 각 루프의 제어기 설계 시 목표특성다항식을 합성할 때 적용하게 된다.

(2) 추종오차 개선을 위한 루프 2 제어기 설계

2절에서 정의한 추종오차 (9)를 (6)과 (8)을 이용하여 정리하면 다음 식으로 유도된다.

$$\begin{aligned} e_{mfc}(s) &= y^*(s) - y_2(s) \\ &= \frac{\{B_2(s)e^{-Ls} - M_2(s)\}N_o(s)}{A_2(s)D_o(s) + B_2(s)N_o(s)e^{-Ls}} y^*(s) \\ &= \frac{\{B_2(s)e^{-Ls} - M_2(s)\}N_o(s)}{\delta_2(s)} y^*(s) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)로부터 $\delta_2(s)$ 가 안정하도록 제어기 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 를 설계하고, 동시에 다음을 만족하도록 $\{B_2(s), M_2(s)\}$ 를

구하면 추종오차는 영이 됨을 알 수 있다.

$$M_2(s) = B_2(s)e^{-L_0s} \quad (28)$$

그러나 지수함수는 무한차수이므로 (28)을 만족하는 유한 차수의 다항식 $B_2(s)$, $M_2(s)$ 는 존재하지 않는다. 이제 (28)의 근사 해와 함께 루프 2 제어기 $\{A_2(s), B_2(s), M_2(s)\}$ 를 설계하는 세 가지 방법을 제안하기로 한다. 이후 (28)에서 지연시간을 공칭값 $L_0 = (L^- + L^+)/2$ 로 가정한다.

A. 설계 방법 1

[단계1] (28)의 관계로부터 e^{-L_0s} 를 Pade 근사화 하여 먼저 $B_2(s)$, $M_2(s)$ 를 결정한다.

$$e^{-L_0s} \approx \frac{L_n(s)}{L_d(s)} \equiv \frac{M_2(s)}{B_2(s)} \Rightarrow B_2(s) = L_d(s), M_2(s) = L_n(s) \quad (29)$$

지연시간 L_0 이 아주 크지 않다면 (29)는 2차 Pade 근사화를 추천한다.

[단계2] 루프 2의 근사적 특성다항식인 (24)로부터 $A_2(s)$ 를 구한다. 페루프 안정하고 가능한 루프 1보다 빠른 응답을 갖도록 3.1절의 알고리즘을 이용하여 루프 2의 목표특성다항식, $\delta_{2p}^*(s) = \delta_a(s) L_d(s)$ 을 선택하면, (24)는

$$\delta_{2p}^*(s) = \delta_a(s) \cdot L_d(s) = A_2(s)D_0(s)L_d(s) + B_2(s)N_0(s)L_n(s) \quad (30)$$

(29)에 의해 (30)은

$$\delta_a(s) = A_2(s)D_0(s) + N_0(s)L_n(s) \quad (31)$$

이고 (31)로부터 $A_2(s)$ 를 구한다. [(31)의해를 구하는 방법은 아래 [부연 1]을 참조.]

[단계3] [단계1]과 [단계2]에서 구한 제어기 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 가 지연시간 불확실성 (2)에 대해 페루프 안정한지를 검증한다. 루프 2의 루프전달함수 $\frac{B_2(s)N_0(s)e^{-L_0s}}{A_2(s)D_0(s)}$ 에 대해 나이퀴스트 안정도 판별법을 적용하며 안정하지 않으면 [단계2]를 반복한다.

[부연 1] 위 방법1에서 (31)은 $A_2(s)$ 의 미지계수 수에 비해 항등식 수가 많아 유일 해를 구할 수 없다. 이러한 문제는 저차제어기 설계에서 유사하게 일어나는데 Jin 등[19]은 이 문제를 비볼록 제약조건(non-convex constraints)을 갖는 최적화문제로 정식화하고 해를 구하는 방법(여기서는 이것을 LOCD라고 부르기로 함)을 제시하였다. 이를 적용하기 위해 (31)을 다음 (32)로 수정한다.

$$\delta_a(s) = \overline{A_2}(s)D_0(s) + k_{B2}\{N_0(s)L_n(s)\} \quad (32)$$

LOCD를 이용하여 해 $\{\overline{A_2}(s), k_{B2}\}$ 를 구한 후 최종 루프 2 제어기를 $A_2(s) = \overline{A_2}(s)$, $B_2(s) = k_{B2}L_d(s)$, $M_2(s) = k_{B2}L_n(s)$ 로 놓는다.

B. 설계 방법 2

[단계1] (30)으로부터 먼저 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 를 구한다. 여기서 루프 2의 목표특성다항식, $\delta_{2p}^*(s)$ 는 방법1과 동일한 기준으로 3.1절의 알고리즘을 이용하여 선택한다. [저차제어기를 설계하는 경우에는 LOCD를 이용할 수 있다.]

[단계2] 방법1의 [단계3]과 유사하게 [단계1]에서 구한 제어기 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 가 지연시간 불확실성 (2)에 대해 페루프

안정한지 검증한다.

루프 2의 루프전달함수 $\frac{B_2(s)N_0(s)e^{-L_0s}}{A_2(s)D_0(s)}$ 에 대해 나이퀴스트 안정도 판별법을 적용하며 안정하지 않으면 [단계1]을 반복한다.

[단계3] (28)로부터 근사 해 $M_2(s)$ 를 구한다. 지연시간 항을 Taylor 급수로 대치하고 (28)의 우변을 $M_2(s)$ 의 차수(q) 항까지 근사화한 것으로 결정한다. 즉, [단계1]에서 구한 $B_2(s)$ 를 이용하여 (28)의 우변을 전개하면

$$B_2(s)e^{-L_0s} = B_2(s)(1 - L_0s + \frac{L_0^2}{2}s^2 \dots) \approx m_0 + m_1s + m_2s^2 \dots + m_qs^q := M_2(s) \quad (33)$$

여기서 $M_2(s)$ 의 차수, q 는 $\text{degree}[M_2(s)] \leq \text{degree}[A_2(s)]$ 조건에 따라 정한다.

C. 설계 방법 3

식 (8)을 (6)에 대입하면 페루프 시스템의 출력은 다음 관계로 나타난다.

$$y_2(s) = \frac{\{A_2(s)D_0(s) + M_2(s)N_0(s)\}}{\delta_2(s)} y^*(s) = T_{12}^*(s) y^*(s) \quad (34)$$

[단계1] y^* 와 y_2 간 기준모델 $T_{12}^*(s) = \frac{\nu^*(s)}{\delta_{2p}^*(s)}$ 을 선택한다.

여기서 $\delta_{2p}^*(s)$ 는 방법2와 동일한 방법으로 선택하며, $\nu^*(s)$ 는 그 영점이 $\delta_{2p}^*(s)$ 의 지배적인 극(dominant poles)의 위치보다 s 평면에서 좌측에 놓이도록 선택한다. 3.1절에서 설명한 K-다항식을 적용하면 쉽게 구할 수 있는데, α_1 은 $\delta_{2p}^*(s)$ 의 것과 동일한 τ 값으로 하되 다만 값을 작은 값으로 선택하여 $\nu^*(s)$ 를 합성할 수 있다. 이러한 선택은 $T_{12}^*(s)$ 의 시간응답이 영점의 영향을 보다 적게 받게 한다.

[단계2] (30)으로부터 방법 2처럼 $\delta_2(s)$ 가 안정하도록 먼저 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 를 설계하고 페루프 안정도를 확인한다.

[단계3] 다음 관계식으로부터 $M_2(s)$ 를 구한다.

$$A_2(s)D_0(s) + M_2(s)N_0(s) \approx \nu^*(s) \quad (35)$$

간단한 한 방법으로 (35)의 우변 다항식의 s 의 저차 항부터 좌변 저차 항과 등식이 성립하도록 $M_2(s)$ 의 계수 \hat{m}_i 를 계산할 수 있다. 즉, $\nu^*(s) = \nu_0^* + \nu_1^*s + \nu_2^*s^2 \dots + \nu_l^*s^l$ 이라고 하면,

$$\begin{aligned} \hat{m}_0 &= \frac{1}{n_0} \{\nu_0^* - a_0d_0\} \\ \hat{m}_1 &= \frac{1}{n_0} \{\nu_1^* - a_1d_0 - a_0d_1 - \hat{m}_0n_1\} \\ \hat{m}_2 &= \frac{1}{n_0} \{\nu_2^* - d_0 - a_1d_1 - a_0d_2 - \hat{m}_1n_1 - \hat{m}_0n_2\} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 $\hat{m}_i, a_i, d_i, n_i, (i=0, 1, \dots)$ 는 각각 다항식 $M_2(s), A_2(s), D_0(s), N_0(s)$ 의 계수이다.

[부연 2] 위 세 가지 설계방법의 차이점을 비교하면 다음과 같이 요약된다.

(i) [방법1]은 (28) 조건을 근사화 하는 $B_2(s), M_2(s)$ 를 먼저 구하고 페루프 안정도와 과도응답속도를 고려하여 (30)으로부터 부분정합방법으로 $A_2(s)$ 를 구하며, 추종오차를 감소시

키는 효과는 유리하나 (30)을 만족하는 $A_2(s)$ 에 제약이 크고 차수가 증가할 수 있다.

(ii) [방법2]와 [방법3]은 (30)으로부터 먼저 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 를 구하는 것은 동일하고, $M_2(s)$ 를 구할 때, [방법2]는 (33)에 의해 [방법3]은 (35)에 의해 구한다. [방법1]보다 안정도와 과도응답속도를 만족시키기가 용이하다.

3.2 MFC-TPC 제어기의 특성해석

(1) MFC-TPC 제어기와 단일 피드백 시스템의 추종 성능 비교

앞 절에서 제안한 MFC-TPC 제어기를 지연시간을 Pade 근사화 하여 설계하는 전통적인 단일 루프 제어기와 추종 성능을 비교하기로 한다. 두 방식에 동일한 기준입력 $y_1(t)$ 을 고려하기 위해 그림 2의 단일 루프 제어시스템을 고려한다. 즉, 그림 1의 루프 1과 그림 2의 루프 3을 동일하게 놓는다. 루프 4의 제어기 $\{A_{2s}(s), B_{2s}(s), M_{2s}(s)\}$ 는 플랜트 지연시간을 Pade 근사화한 모델 (22)와 특성다항식 (24)로부터 3.1절의 CRA 알고리즘을 이용하여 설계한다고 가정한다. 스미쓰원리에 따라 플랜트 출력 $y_2(t)$ 가 추종해야 할 이상적인 목표기준입력을 $y^*(t) = y_1(t-L)$ 로 정의하고 (9)에서 정의한 추종오차를 유도하여 추종성능을 비교하기로 한다.

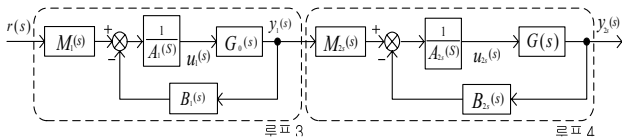


그림 2 기준입력을 추종하는 단일 피드백 제어시스템
Fig. 2 A single feedback control system following the reference model input

MFC-TPC 구조의 추종오차는 (27)로 유도되었으므로 그림 2 시스템에 대한 추종오차를 유도한다.

단일 피드백 시스템의 출력은

$$y_{2s}(s) = \frac{M_{2s}(s)N_0(s)}{A_{2s}(s)D_0(s) + B_{2s}(s)N_0(s)e^{-Ls}} \cdot y^*(s) \quad (37)$$

이고, 단일 피드백 시스템의 추종오차는 다음 식과 같다.

$$e_{sl}(s) = y^*(s) - y_{2s}(s) = \frac{A_{2s}(s)D_0(s) + (B_{2s}(s)e^{-Ls} - M_{2s}(s))N_0(s)}{A_{2s}(s)D_0(s) + B_{2s}(s)N_0(s)e^{-Ls}} y^*(s) \quad (38)$$

두 시스템의 추종성능을 단순 비교하기 위해 단일 피드백 시스템의 루프 4와 MFC-TPC 구조의 루프 2의 페루프 제어기를 거의 유사하게 설계하였다고 가정하자. 즉,

$$\{A_2(s), B_2(s), M_2(s)\} \cong \{A_{2s}(s), B_{2s}(s), M_{2s}(s)\} \quad (39)$$

이면, (38)은

$$e_{sl}(s) \geq e_{mf}(s) + \frac{A_{2s}(s)D_0(s)}{A_{2s}(s)D_0(s) + B_{2s}(s)N_0(s)e^{-Ls}} y^*(s) \quad (40)$$

(40)은 MFC-TPC 구조의 기준입력 추종성능이 단일 피드백 시스템에 비해 최소한 우변 두 번째 항만큼 개선할 수 있음을 의미한다. 더욱이 단일 피드백 시스템에서 $M_{2s}(s)$ 는 전달함수 $y_{2s}(s)/y_1(s)$ 의 정상상태 이득을 고려하여 설계하

기 때문에 MFC-TPC 구조의 경우처럼 (27)의 분자가 영이 되도록 설계할 수 없다. 따라서 실제로는 (27)이 (38)보다 훨씬 크게 개선될 수 있기 때문에 (40)의 부등호는 여기에서 기인한다. 이러한 특성은 MFC-TPC 구조가 지연시간 불확실성을 갖더라도 (28)을 고려하여 제어기를 설계하는 만큼 추종오차를 감소시킬 수 있기 때문에 기준입력 추종제어에 강인성을 갖는다고 주장할 수 있다.

(2) 루프1과 루프 2의 제어입력의 역할과 크기

그림 1의 MFC-TPC 구조에서 루프 1과 루프 2의 제어입력 u_1 과 u_2 가 어떤 역할을 하고 전체 제어입력 u 에 어느 정도의 영향을 갖는지를 규명하고자 한다. 2절에서 기술하였듯이 루프 1은 기준모델을 생성하기 위한 피드백 루프이고 루프 1의 출력 y_1 과 이 출력을 발생하기 위한 제어입력 u_1 은 (3)과 (5)에 유도하였다. 이제 루프 2의 제어입력 u_2 를 유도하기로 한다. 그림 1로부터

$$u_2(s) = \frac{1}{A_2(s)} \{M_2(s)y_1(s) - B_2(s)y_2(s)\} \quad (41)$$

(3)과 (6)을 (41)에 대입하여 정리하면

$$u_2(s) = \frac{\{M_2(s) - B_2(s)e^{-Ls}\}N_0(s)M_1(s)D_0(s)}{\delta_1(s)\delta_2(s)} r(s). \quad (42)$$

플랜트의 전체 제어입력 u 는 (5)와 (42)를 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$u(s) = u_1(s) + u_2(s) = \frac{\{A_2(s)D_0 + M_2(s)N_0(s)\}M_1(s)D_0(s)}{\delta_1(s)\delta_2(s)} r(s). \quad (43)$$

(42)와 (43)으로부터 u 에 대한 u_2 의 비를 구하면

$$\frac{u_2(s)}{u(s)} = \frac{\{M_2(s) - B_2(s)e^{-Ls}\}N_0(s)}{A_2(s)D_0(s) + M_2(s)N_0(s)} \quad (44)$$

3.2절의 세 가지 제어기 설계방법은 (28)이 성립하도록 $\{B_2(s), M_2(s)\}$ 의 근사해를 구하는 것이므로 (44)의 분자 항은 매우 작은 값을 갖게 되며, (44)의 분모 항은 (35)에 의해 등가적으로 $\delta_{2p}^*(s)$ 로 놓을 수 있다. 결과적으로 전체 제어입력 u 에는 u_1 이 지배적인 영향을 주며 u_2 의 크기는 상대적으로 매우 작음을 의미한다. 또한 (25)로부터 u_1 은 플랜트가 지연시간이 없을 경우에 출력이 원하는 응답을 갖도록 발생된 예측제어입력이고, u_2 는 주어진 지연시간의 영향을 보상하기 위한 피드백 제어입력이라고 할 수 있다. 다음절에서 이러한 특성을 수치 예를 통해 보이기로 한다.

(3) 3.2절의 설계방법 각각의 페루프전달함수

식 (3),(8)을 (6)에 대입하면 루프2의 y^* 로부터 출력 y_2 간 페루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{y_2(s)}{y^*(s)} = \frac{\{A_2(s)D_0(s) + M_2(s)N_0(s)\}}{\delta_2(s)} \quad (45)$$

만약 지연시간이 $L=L_0$ 이라면

$$\delta_2(s) \approx A_2(s)D_0(s)L_0(s) + B_2(s)N_0(s)L_0(s) = \delta_{2p}^*(s) \quad (46)$$

이므로, (46)을 (45)에 대입하면

$$\frac{y_2(s)}{y^*(s)} \approx \frac{\{A_2(s)D_0(s) + M_2(s)N_0(s)\}}{A_2(s)D_0(s)L_0(s) + B_2(s)N_0(s)L_0(s)} \quad (47)$$

이제 설계방법에 따른 페루프전달함수를 비교하기 위해

각 방법으로 구한 제어기를 (47)에 대입하기로 한다.

[설계방법 1]에서는 (29)에 의해 $B_2(s) = L_d(s)$, $M_2(s) = L_n(s)$ 이므로 대응하는 페루프전달함수는

$$\frac{y_2(s)}{y^*(s)} \approx \frac{\{A_2(s)D_o(s) + L_n(s)N_o(s)\}}{L_d(s)\{A_2(s)D_o(s) + L_n(s)N_o(s)\}} = \frac{1}{L_d(s)} \quad (48)$$

[설계방법 2]에서는 (33)에 의해 $M_2(s) = B_2(s)L_T(s)$ (여기서 $L_T(s)$ 는 지연시간의 테일러급수 근사식임)이므로 대응하는 페루프전달함수는

$$\begin{aligned} \frac{y_2(s)}{y^*(s)} &\approx \frac{\{A_2(s)D_o(s) + B_2(s)L_T(s)N_o(s)\}}{A_2(s)D_o(s)L_d(s) + B_2(s)L_n(s)N_o(s)} \\ &= \frac{\{A_2(s)D_o(s) + B_2(s)L_T(s)N_o(s)\}}{\delta_{2p}^*(s)} \end{aligned} \quad (49)$$

[설계방법 3]에서는 (30)과 (35)로부터 대응하는 페루프전달함수는

$$\frac{y_2(s)}{y^*(s)} \approx \frac{\{A_2(s)D_o(s) + M_2(s)N_o(s)\}}{A_2(s)D_o(s)L_d(s) + B_2(s)L_n(s)N_o(s)} \approx \frac{v^*(s)}{\delta_{2p}^*(s)} \quad (50)$$

(48),(49),(50)은 지연시간의 불확실성으로 비록 근사식이지만 각 방법의 차이점을 보여주고 있으며 특히 [설계방법 1]의 경우 지연시간이 공칭값을 가질 때 페루프 극이 $L_d(s)$ 만 남고 모두 상쇄되는 것은 흥미롭다.

4. 예 제

3절에서 제안한 MFC-TPC 제어기의 유용성을 예제를 통하여 보이고자 한다. 먼저, 스미쓰 제어기가 지연시간 불확실성에 의해 제어성능에 어떤 영향을 갖는지 보이고, 동일한 플랜트에 대해 세 가지 MFC-TPC 제어기를 설계하고 각각의 제어기의 성능을 비교하기로 한다. 추종성능은 기준입력의 과도응답특성과 어느 정도 일치하는지와 시간가중절대오차적분 (integral of the time weighted absolute errors: ITAE)지수를 이용하여 비교한다.

예제 1. 스미쓰 제어기를 포함한 그림 3의 피드백 시스템에서 플랜트 모델을 다음과 같이 고려한다.

$$G(s) = G_o(s)e^{-Ls} = \frac{e^{-Ls}}{(6s+1)(0.3s+1)} \quad (51)$$

여기서 지연시간 불확실성 범위는 $0 \leq L \leq 1$ 초이고, 공칭지연시간은 $L_o = 0.5$ 초라고 놓는다.

플랜트가 추종해야 할 기준입력의 시간응답 설계명세를 (i) 최대오버슈트 $\leq 1\%$, (ii) 2%정착시간 ≤ 7 초 라고 가정한다.

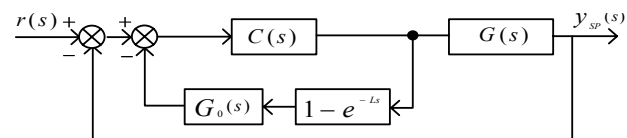


그림 3 스미쓰 예측기 구조
Fig. 3 Structure of Smith predictor

스미쓰 제어기 설계방식에 따라 지연시간 없는 모델 $G_o(s)$ 와 공칭지연시간 $L_o = 0.5$ 초에 대해 설계한 제어기는 다음과 같다.

$$C(s) = \frac{5.6437s + 3.5079}{s + 0.3769} \quad (52)$$

여기서 설계명세를 만족하는 기준특성다항식은 3.1절의 [알고리즘 1]을 이용하고 특성비 $\alpha_1 = 3$, 시정수 $\tau = 2.3214$ 을 선택하여 K-다항식을 구한 것이다. 스미쓰제어기는 제어기의 영점이 페루프 시스템의 영점으로 나타나기 때문에 오버슈트는 6.65%이고 정착시간은 6.7 초이다.

지연시간 불확실성 대한 추종성능을 비교하기 위해 플랜트의 지연시간이 각각 $L = 0, 0.5, 1$ 초 일 때 페루프 스텝응답을 보기로 한다. 그림 4에 보인 바와 같이 지연시간이 공칭값과 다를 때 과도응답이 상당히 다르게 나타남을 볼 수 있다.

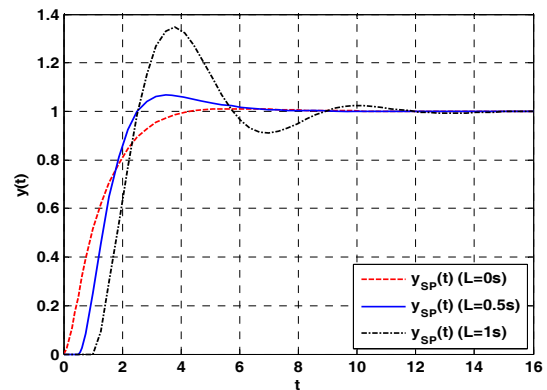


그림 4 지연시간 변동에 따른 그림 3 스미쓰 제어기의 페루프 스텝응답
Fig. 4 Step responses of Smith controller in Fig. 3 at different delays

예제 2. <예제 1>과 동일한 문제에 대해 3절에서 제시한 세 가지 설계방법을 적용하여 MFC-TPC 제어기를 설계하고 다음을 구한다.

- (i) 공칭지연시간에 대해 설계한 각 제어기가 플랜트 지연시간이 0, 0.5, 1.0 초일 때 출력의 추종성능 비교
- (ii) 공칭지연시간모델을 근거로 그림 2 구조의 단일 피드백 제어기를 설계하고 지연시간이 0, 0.5, 1.0 초일 때 출력의 추종성능 비교
- (iii) [설계방법 1]에 의한 공칭모델 제어기에 대해 지연시간이 0, 0.5, 1.0 초일 때 제어입력 u_1 , u_2 , u 의 비교
- (iv) 제시한 세 가지 설계방법과 단일 피드백 제어기의 추종성능에 대한 ITAE 비교

□ MFC-TPC의 루프 1 제어기, $\{A_1(s), B_1(s), M_1(s)\}$ 설계:
 $G_o(s)$ 는 2차이고 영점을 갖지 않으므로 3.1절의 알고리즘 1을 이용하여 원하는 시간응답을 주는 기준모델을 합성한다. 알고리즘 1에 따라 특성비 $\alpha_1 = 3$, 시정수 $\tau = 2.3214$ 을 선택하여 얻은 기준모델은 다음과 같다.

$$T_1^*(s) = \frac{\delta_o}{\delta_K(s, \alpha_1, \tau)} = \frac{2.158}{s^3 + 3.877s^2 + 5.010s + 2.158} \quad (53)$$

기준모델 (53)의 스텝응답은 오버슈트를 발생하지 않고 정착시간 6.5 초를 만족한다. (53)의 특성다항식을 (20), (21)에 대입하여 대수식을 풀면 루프 1의 제어기가 다음과 같이 구해진다.

$$A_1(s) = s + 0.377, \quad B_1(s) = 5.644s + 3.508, \quad M_1(s) = 3.885 \quad (54)$$

목표기준입력 $y^*(t)$ 는 루프 1의 출력 $y_1(t)$ 을 (8)에 의해 $L_0 = 0.5$ 초만큼 지연시킨 것으로 정확히 정착시간 7 초를 만족한다. 이 $y^*(t)$ 를 그림 5에 표시하였다.

□ MFC-TPC의 루프 2 제어기, $\{A_2(s), B_2(s), M_2(s)\}$ 설계:

$L = L_0$ 라고 가정하고 3.2절에서 제시한 세 가지 방법을 적용한다.

A. [설계 방법 1]을 이용한 설계:

공칭지연시간($L_0 = 0.5$ sec)의 2차 Pade 근사화로부터 (29)에 의해 먼저 $B_2(s), M_2(s)$ 를 결정한다.

$$B_2(s) = s^2 + 12s + 48, \quad M_2(s) = s^2 - 12s + 48 \quad (55)$$

루프 2의 정착시간의 루프 1의 정착시간보다 약 2.5배 빠른 응답을 갖도록 특성비 $\alpha_1 = 2.79$, 시정수 $\tau = 1.07$ 를 선택하여 목표특성다항식 $\delta_0^*(s)$ 를 구하고 (31)의 근사 해를 구한다. 여기서는 [부연 1]에 언급한 LOCD 도구를 이용하여 (32)로부터 다음을 얻었다.

$$\bar{A}_2(s) = s^2 + 2.44s + 94.68, \quad k_{B2} = 7.856 \quad (56)$$

최종 루프 2의 제어기는 다음 (57)을 얻는다.

$$\begin{aligned} A_2(s) &= \bar{A}_2(s) = s^2 + 2.44s + 94.68, \\ B_2(s) &= k_{B2} L_d(s) = 7.856(s^2 + 12s + 48), \\ M_2(s) &= k_{B2} L_n(s) = 7.856(s^2 - 12s + 48). \end{aligned} \quad (57)$$

(57)의 피드백 제어기 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 가 지연시간 불확실성 범위에서 페루프 안정한지를 판단하기 위해 나이퀴스트 판별법을 적용한 결과 안정하였으며, 제어기의 안정도 여유는 이득여유 8.04 [dB], 위상여유 65.62 [deg]이다.

B. [설계 방법 2]를 이용한 설계:

공칭지연시간 $L_0 = 0.5$ 초를 2차 Pade 근사화하여 등가플랜트 모델 (22)를 구하고, 루프 2의 목표특성다항식, $\delta_{2p}^*(s)$ 를 [설계방법 1]과 동일한 기준으로 3.1절의 알고리즘을 이용하여 선택한 후 (30)에서 제어기 $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 를 3차로 선택하면 유일 해를 구할 수 있다. 여기서는 성능 비교를 위해 세 가지 방법 모두 2차제어기를 설계하기로 하고 LOCD 도구를 이용하여 저차제어기를 구하였다. 특성비 $\alpha_1 = 2.4$, 시정수 $\tau = 1.55$ 로 6차 $\delta_{2p}^*(s)$ 를 선택하여 다음 결과를 얻었다.

$$\delta_{2p}^*(s) = s^6 + 24s^5 + 239.3s^4 + 1262.5s^3 + 3700s^2 + 5729s + 3696.2 \quad (58)$$

$$A_2(s) = s^2 + 1.944s + 36.37, \quad B_2(s) = 102.2 \quad (59)$$

나이퀴스트 판별법을 적용하면 (59)의 제어기는 지연시간 불확실성 범위에서 페루프 안정하며 이득여유 8.94 [dB], 위상여유 72.16[deg]를 보였다. 그리고 (59)의 $B_2(s)$ 를 (33)에 대입하여 $M_2(s)$ 를 구하면 (60)을 얻는다.

$$M_2(s) = 12.775s^2 - 51.1s + 102.2 \quad (60)$$

C. [설계 방법 3]를 이용한 설계:

[설계 방법 2]와 동일한 방식으로 $A_2(s), B_2(s)$ 를 설계하

고(즉, $\{A_2(s), B_2(s)\}$ 는 (59)와 동일함), $\delta_{2p}^*(s)$ 보다 응답속도가 빠르도록 $\alpha_1 = 2.4$, $\tau = 1.146$ 을 선택하여 다음 4차 $\nu^*(s)$ 를 구하였다.

$$\nu^*(s) = s^4 + 10.3s^3 + 44.14s^2 + 92.41s + 80.61 \quad (61)$$

(36)을 이용하여 $M_2(s)$ 를 구하면 (62)를 얻는다.

$$M_2(s) = 0.74s^2 - 64.74s + 108.72 \quad (62)$$

(i) 위 세 가지 설계방법에 의한 제어기의 추종성능을 비교하기 위해 각각 지연시간이 0, 0.5, 1.0 초일 때 스텝응답을 그림 5(a), 그림 5(b), 그림 5(c)에 보인다. 그림 5(b)의 응답은 지연시간을 정확히 아는 경우로 세 방식 모두 목표기준입력 $y^*(t)$ 를 잘 추종하고 있음을 보여준다. 플랜트 지연시간 $L = 1.0$ 초인 경우 그림 5(c)처럼 오버슈트가 약간 증가하였으나 스미쓰 제어기 보다 크게 개선된 성능으로 추종하고 있음을 알 수 있다.

(ii) 그림 2 구조의 단일 피드백 제어기 설계 및 추종성능 비교:

비교를 위해 그림 2의 기준모델(루프 3) 제어기 $\{A_{1s}(s), B_{1s}(s), M_{1s}(s)\}$ 를 MFC-TPC의 루프 1 제어기와 동일하게 놓는다. 루프 4의 제어기는 [방법 2]의 제어기와 같게 놓고 $M_{2s}(s)$ 는 간단한 단일 피드백 CRA 방법으로 구하였다. 즉,

$$\begin{aligned} A_{2s}(s) &= A_2(s) = s^2 + 1.944s + 36.37, \\ B_{2s}(s) &= B_2(s) = 102.2, \\ M_{2s}(s) &= 138.57. \end{aligned} \quad (63)$$

그림 6은 목표기준입력과 플랜트 지연시간이 0, 0.5, 1.0 초일 때 단일 피드백 제어기의 스텝응답을 보인다. 그림 5의 MFC-TPC에 비해 정착시간이 약 2초정도 늦음을 볼 수 있다.

(iii) 3.3절 (2)항에서 분석한 MFC-TPC 제어시스템의 제어입력 특성을 보기 위해 u_1, u_2, u 를 비교하기로 한다. 여기서 u_1 은 루프 1에서 생성되어 루프 2로 전향입력(feed forward)시킨 지연시간 없는 기준모델의 제어입력이고, u_2 는 루프 2 제어기에 의한 제어입력이고, $u = u_1 + u_2$ 는 플랜트의 제어입력을 상기하자. 공칭지연시간모델($L = 0.5$ 초)에 대해 [설계방법 1]를 적용한 예를 대표로 보이기로 한다. 다른 설계방법의 경우도 약간의 차이는 있지만 유사한 패턴을 보인다. 그림 7(a)~그림 7(c)는 각각 지연시간이 0, 0.5, 1.0 초일 때 그림 5의 응답에 대응하는 u_1, u_2, u 프로파일(profile)을 나타낸다. 그림 7(b)는 지연시간 불확실성이 없는 경우로 루프 2의 제어입력 u_2 가 거의 0이고, 지연시간이 공칭치와 다른 경우인 그림 7(b), 7(c)에서는 지연시간 오차만큼(식(42)참조) u_2 에 의해 보상이 이루어짐을 볼 수 있다. 이 결과는 3.3 절의 특성해석과 잘 일치하고 있다.

(iv) 제시한 세 가지 설계방법과 단일 피드백 제어기의 추종성능을 비교하기 위해 정착시간까지 ITAE 계산하여 표 1에 나타내었다. 본 예제에서는 [방법 1]이 가장 좋은 성능을 보였다.

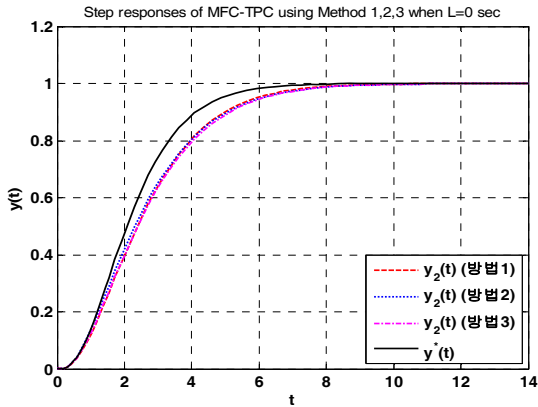


그림 5(a) 3 MFC-TPC 제어기의 시스템응답과 기준입력 ($L=0$ 초)
 Fig. 5(a) Step responses of three MFC-TPC and a reference input at $L=0$ sec.

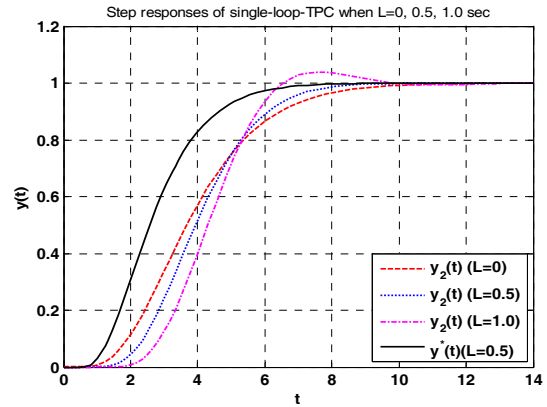


그림 6 그림 2 구조 단일 피드백 제어시스템의 시스템응답 (지연시간 $L=0, 0.5, 1.0$ 초)
 Fig. 6 Step responses of the single feedback system in Fig. 2 in cases of $L=0.0, 0.5, 1.0$ sec.

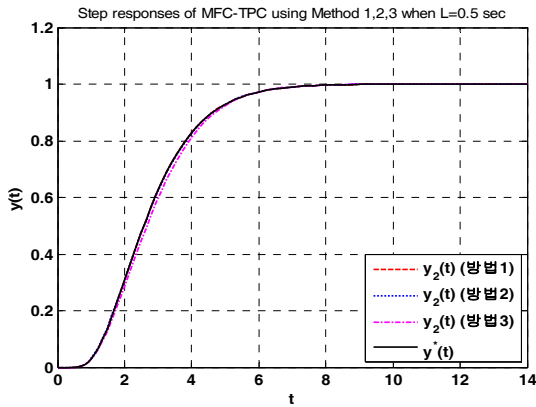


그림 5(b) 세 가지 MFC-TPC 제어기의 시스템응답과 기준입력 ($L=0.5$ 초)
 Fig. 5(b) Step responses of three MFC-TPC and a reference input at $L=0.5$ sec.

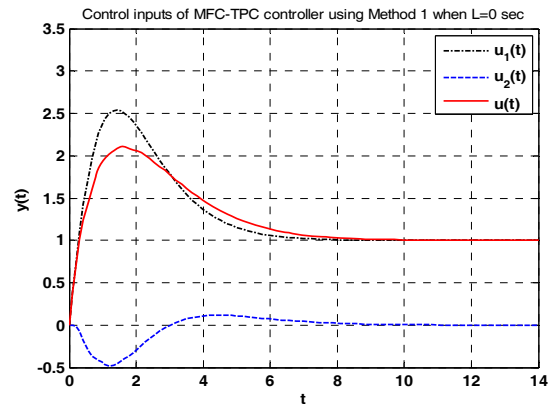


그림 7(a) 그림 5 [방법1]제어기의 응답에 대응하는 MFC-TPC 제어입력의 비교 ($L=0$ 초)
 Fig. 7(a) Comparison of control inputs for the case of MFC-TPC using Method 1 at $L=0$ sec.

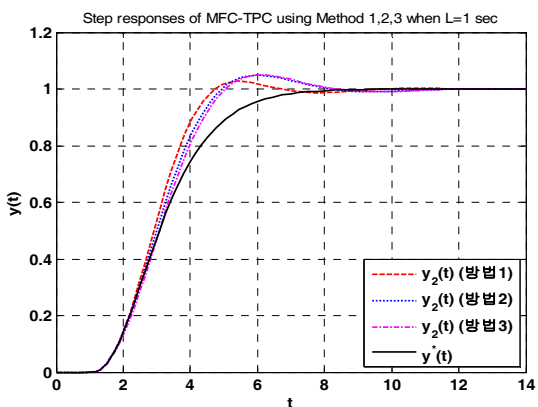


그림 5(c) 3 MFC-TPC제어기의 시스템응답과 기준입력 ($L=1.0$ 초)
 Fig. 5(c) Step responses of three MFC-TPC and a reference input at $L=1.0$ sec.

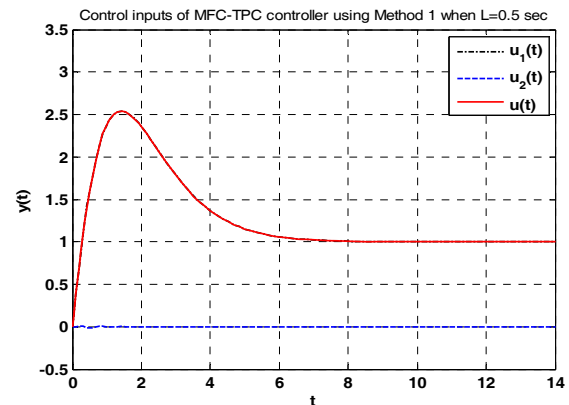


그림 7(b) 그림 5 [방법1]제어기의 응답에 대응하는 MFC-TPC 제어입력의 비교 ($L=0.5$ 초)
 Fig. 7(b) Comparison of control inputs for the case of MFC-TPC using Method 1 at $L=0.5$ sec.

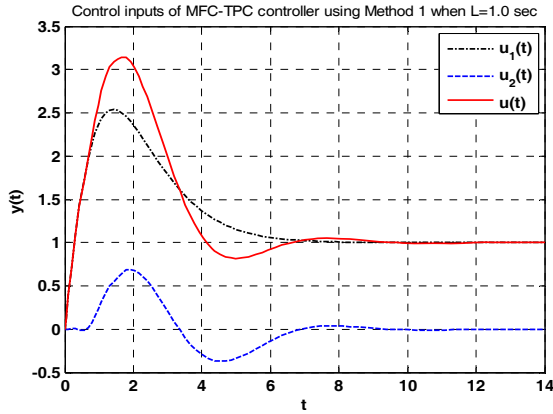


그림 7(c) 그림 5 [방법1]제어기의 응답에 대응하는 MFC-TPC 제어입력의 비교 (L=1.0 초)

Fig. 7(c) Comparison of control inputs for the case of MFC-TPC using Method 1 at L=1.0 sec.

표 1 설계방법에 따른 각 제어기의 ITAE 성능지수 비교
Table 1 Comparison of ITAE performance index for the controllers using different design methods when L=0.0, 0.5, 1.0 sec.

제어기 설계방법		L=0	L=0.5	L=1
MFC-TPC	방법 1	1.5150	0.00026	1.9855
	방법 2	1.5632	0.0337	2.2647
	방법 3	2.2431	1.5316	3.1132
단일 피드백시스템		5.6117	4.2015	4.4658

5. 결론

본 논문의 목적은 불확실성 지연시간을 갖는 단일 입출력 선형시스템에 대해 기준모델 과도응답을 잘 추종할 수 있는 제어기 구조와 설계 기법을 제시하는 데 있다. 이 문제의 중요 요구사항은 (i) 제안할 제어기 구조가 예측기능을 가져야 하며, (ii) 미리 주어진 시간응답(오버슈트, 정착시간)을 만족하는 기준입력을 발생할 수 있어야 하며, (iii) 지연시간 불확실성에도 불구하고 추종성능을 크게 악화시키지 않아야 한다는 것이다.

본 논문에서는 2 루프 모델추종제어기 (model following control: MFC)와 2 파라미터 제어기 구조(two parameter configuration :TPC)를 조합한 MFC-TPC구조를 도입하여 이 구조가 예측제어 기능을 가지며 두 루프의 제어기를 각각 독립적으로 설계할 수 있기 때문에 위 요구사항을 만족시키는 제어기 설계가 가능함을 해석적으로 보였다. 이러한 해석에 근거하여 강인한 추종성능을 갖는 세 가지 제어기 설계방법을 제안하였다.

MFC-TPC 제어기 구조는 두 개의 루프와 각 루프의 TPC 제어기로 구성된다. 루프 1은 원하는 시간응답을 출력하는 기준모델을 합성하는 부분으로 지연시간이 없는 플랜트 모델에 대해 일종의 모델정합방식인 CRA기법을 적용하면 쉽게 설계할 수 있다. 두 루프의 동적특성이 어떤 상관관계가 있는지 해석하여 루프 2의 응답특성을 루프 1보다

빠르게 설계하여야 추종성능 개선에 유리함을 보였다. 또한 MFC-TPC의 추종오차에 대한 관계식을 유도하고 이를 근거로 루프 2 제어기의 세 가지 설계방법을 제시하였다. 기본적으로 지연시간의 Pade근사식을 이용하여 대수적으로 제어기를 구하지만 설계된 제어기가 지연시간 불확실성에 대해 안정한지를 판단하는 것은 나이퀴스트 판별법을 이용하여 검증되어야 한다. 불확실성 지연시간에 대한 안정화 문제는 본 논문에서는 고려하지 않았다.

제안한 MFC-TPC가 단일 피드백 제어기 구조에 비해 추종성능이 개선됨을 해석적으로 보였으며 각 루프의 제어입력이 지연시간 불확실성에 대해 어떻게 역할을 하는지도 해석하였다.

마지막으로 예를 통해 MFC-TPC 제어기를 어떻게 설계하는지 수치적으로 보였으며 결과가 이론적 해석과 잘 일치함을 보였다. 또한, 기존의 스미쓰제어기, 단일 피드백 제어기 구조의 경우와 지연시간 불확실성에 대한 추종성능을 비교하여 현저한 성능 개선이 있음을 보였다.

감사의 글

본 연구는 2013년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- [1] J. E. Marshall, *Control of time-delay systems*, Peter Peregrinus Ltd. Stevenage, UK, 1979.
- [2] J. E. Normey-Rico, E. F. Camacho, "Unified approach for robust dead-time compensator design," *Journal of Process Control*, vol.19,pp.38-47, 2009.
- [3] Q. C. Zhong, *Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer, London, 2006.
- [4] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [5] V. L. Kharitonov, "Robust stability analysis of time-delay systems: A survey," *Annual Reviews in Control*, vol.23, pp.185-196, 1999.
- [6] J. P. Richard, "Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems," *Automatica*, vol.39 no.10, 1667 - 1694, 2003.
- [7] K. Gu and S. I. Niculescu, "Stability analysis of time-delay systems: A Lyapunov approach," *Advanced Topics in Control Systems Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences* vol.328, pp.139 - 170, 2006.
- [8] K. J. Åstöm and T. Hägglund, *Advanced PID Control*, ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, 2006.
- [9] O. J. M. Smith, "Closed control of loops with dead time," *Chemical Engineering Progress*, vol.53, pp.217 - 219, 1957.
- [10] J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho, *Control of*

Dead-Time Processes, Springer, Berlin, 2007.

- [11] G. Li, K. M. Tsang, and S. L. Ho, "A novel model following scheme with simple structure for electrical position servo systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 29, no.9, pp.959-969, 1998.
- [12] R. Osypiuk, "Simple robust control structure based on the model-following concept: A theoretical analysis," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol.20, pp.1920-1929, 2010.
- [13] S. Skoczowski, S. Domek, K. Pietruszewicz, and B. Broel-Plater, "A method for improving the robustness of PID control," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol.52, pp.1669 - 1676, 2005.
- [14] S. Skoczowski, "Robust model following control with use of a plant model," *International Journal of Systems Science*, vol.32, pp.1413-1427, 2001.
- [15] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Transient response control via characteristic ratio assignment," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.48, no.12, pp.2238 - 2244, 2003.
- [16] L. H. Keel, Y. C. Kim, and S. P. Bhattacharyya, "Transient response control," in the *Lecture Note on 'Advances in Three Term Control,' Tutorial Workshop of the 17th IFAC World Congress*, 2008.
- [17] C. T. Chen, *Analog & Digital Control System Design: Transfer-function, State-space, & Algebraic Methods*, Oxford University Press, Inc. 1993.
- [18] S. Darbha, "On the synthesis of controllers for continuous time LTI systems that achieve a non-negative impulse response," *Automatica*, vol.39, pp.159-165, 2003.
- [19] L. Jin and Y. C. Kim, "Fixed, Low-Order Controller Design with Time Response Specifications using Non-Convex Optimization," *ISA Transactions*, vol. 47, pp. 429-438, 2008.

저 자 소 개



김혜경 (金諤憬)

2012년 충북대학교 전자공학과 (공학사), 2014년 동 대학원 전자공학과(공학석사). 관심분야: 지연시간 시스템의 강인제어, 파라미터공간에서의 저차제어기 설계 등.



김영철 (金永喆)

1981년 고려대학교 전기공학과(공학사), 1983년 서울대학교 전기공학과(공학석사), 1987년 서울대학교 전기공학과(공학박사), 1988년~현재 충북대학교 전자공학부 교수. 1992년~1993년 미국 Texas A&M Univ. Post-Doctoral Fellow. 2001년~2002년 미국 Vanderbilt Univ./Tennessee State Univ. 방문교수. 2004년~2008년 KIEE 제어계측연구회장, 2006년~2008년 KIEE 정보 및 제어 부문회 부회장, 2009년~2010년 KIEE 정보 및 제어 부문회 회장, KIEE 부회장. 관심분야: 저차제어기 설계, 자율주행차 제어시스템, 시스템 모델링 등.