

진입로 신호등 시스템을 위한 SDRE 기반 최적 비선형 관측기 제어기 설계

SDRE Based Optimal Nonlinear Observer-Controller Design for Ramp Metering System

이 기 호, 최 한 호*
 (Kiho Lee¹ and Han Ho Choi^{1,*})

¹Division of Electronics and Electrical Engineering, Dongguk University-Seoul

Abstract: In this paper, a near optimal decentralized observer-controller design method is proposed for ramp metering systems based on SDRE (State Dependent Riccati Equation) approach. The optimal nonlinear observer gain is parameterized in terms of the solution matrix of an SDRE. This paper gives a simple algorithm to compute the near optimal observer gain. The optimal control design problem is also considered. Finally, numerical simulation results are given to illuminate the effectiveness and practicality of the proposed design method.

Keywords: SDRE (State Dependent Riccati Equation), ramp metering, optimal observer, traffic flow, nonlinear system, control

I. 서론

진입로 신호등 제어 방법은 서구 선진국과 일본 등에서 많이 사용되고 있는 방법으로 도로의 효율성을 증가시켜 교통 혼잡을 줄여주는 매우 효과적인 방법으로 진입 램프의 출발과 정지신호의 점등 주기를 제어하여 도로로 진입하는 차량수를 통제하는 방법으로 실시간으로 교통량을 측정하여 이를 이용하여 신호등 제어하느냐 여부에 따라 폐환방식과 Open-loop 방식의 정주기식 방법으로 분류할 수 있다. 정주기식 방법은 루프감지기와 같은 교통량 측정을 위한 장치의 설치가 필요 없어 매우 효율적으로 값싸고 쉽게 구현할 수 있어 많이 쓰일 수 있으나 Open-loop 방식의 제어방식이라 교통혼잡 원인의 대부분을 차지하는 폭우나 폭설 등 갑작스러운 기상 이변, 빈번한 도로점거 시위나 집회, 공공 행사, 교통사고나, 도로공사 등 비정기적인 이유로 인한 교통혼잡시 해결책을 전혀 제공하지 못하는 단점이 있다. 교통량 감응 방법은 교통량을 루프감지기와 같은 센서로 실시간으로 측정하여 이에 따라 진입로 신호등의 점등 주기를 제어하는 폐환방식으로 최근 많은 나라에서 도입하고 있다[1-3].

SDRE (State Dependent Riccati Equation) 방법은 여러 다양한 비선형 제어 시스템 설계를 위해 성공적으로 사용되어 왔다[4-6]. 본 논문에서는 SDRE 접근법에 기반하여 최적 진입로 신호등 관측기 제어기 설계 방법을 제안한다.

II. 문제 설정

진입로 신호등 제어를 위해 그림 1처럼 이전 결과들 [1-3,7,8]를 참조하여 자동차 전용도로를 단위 섹션들로 나눌 것이다. 그림 1에서 u 는 진입로의 정규화된 차량 진입률을 의미하며 신호등 제어의 입력으로 쓰인다. q_{in} 은 섹션에 유입되는 시간당 자동차의 수를 의미하며 v 는 섹션내부 차량들의 평균속도, ρ 는 섹션 내부에서 단위길이당 자동차의 수, q 는 단위시간당 자동차의 수로 $q = \rho v$ 의 관계가 성립함에 유의해야 한다. 일반적으로 차량의 속도는 그림 1처럼 루프 감지기를 통해 측정된다. 그림 1과 이전 결과들 [1-3,6-8]를 참조하여 다음과 같은 단순화된 2차의 거시적인 교통 모델 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2 - k_2 x_1 - k_3 x_2 + u + d_1 \\ \dot{x}_2 &= -k_4 x_1 - k_5 x_2 - k_1 x_2^2 + d_2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 x_1 은 교통량 밀도오차로 $\rho - \rho_d$, x_2 는 평균속도 오차로 $v - v_d$, u 는 제어입력으로 정규화된 차량 진입률을 의미하며 d_1, d_2 는 모델링 오차나 외란을 감안한 값들이다. 그리고 $k_i, i = 1, \dots, 5$ 는 고려하는 단위 도로의 길이, 최고

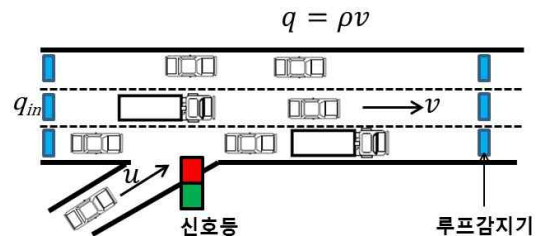


그림 1. 자동차 도로 단위 섹션.

Fig. 1. Motorway section.

* Corresponding Author

Manuscript received December 27, 2013 / revised January 17, 2014 / accepted April 1, 2014

이 기 호, 최 한 호: 동국대학교 전자전기공학부
 (kyo7077@naver.com/hhchoi@dongguk.edu)

※ 이 논문은 2012년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2012R1A1A2001439).

속도, 설정 교통량 밀도 (ρ_d), 설정 평균속도 (v_d), 포화 교통량 밀도 등 값들에 의존하는 상수값들이다. 루프감지기는 차량의 속도값은 매우 정확하게 산출해줄 수 있으나 교통량 밀도값의 측정에는 값비싼 시스템의 설치가 부가적으로 요구된다. 이러한 사정을 감안하여 본 논문에서는 x_2 값만이 출력된다고 가정한다. 결국 본 논문에서 고려하는 시스템은 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\dot{x} = A(x)x + Bu + d, \quad y = Cx + w \quad (2)$$

여기에서 y 는 출력이며 w 는 측정 노이즈이며, $x = [x_1, x_2]^T, d = [d_1, d_2]^T$ 이고

$$A(x) = \begin{bmatrix} -k_1x_2 - k_2 & -k_3 \\ -k_4 & -k_1x_2 - k_5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

행렬 $A(x)$ 는 다음처럼 상수행렬 A_0 와 섭동 행렬 $\Delta A(x)$ 의 합으로 표현할 수 있음에 유의해야 한다.

$$A(x) = A_0 + \Delta A(x) \quad (4)$$

여기에서

$$A_0 = \begin{bmatrix} -k_2 & -k_3 \\ -k_4 & -k_5 \end{bmatrix}, \quad \Delta A(x) = \begin{bmatrix} -k_1x_2 & 0 \\ 0 & -k_1x_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

III. 선형 모델에 대한 최적 관측기와 제어기

(2)에 주어진 모델을 평형점 $x=0$ 부근에서 선형화하여 다음과 같은 선형시불변 시스템을 얻을 수 있다.

$$\dot{x} = A_0x + Bu + d, \quad y = Cx + w \quad (6)$$

만약 d, w 가 독립적인 백색가우시안 잡음으로 $E(d) = 0, E(w) = 0, E(dd^T) = Q_e > 0, E(w^2) = r_e > 0$ 을 만족한다면 최적제어이론에 따라 성능지수 $E[(x-x_e)^T(x-x_e)]$ 를 최소화하는 최적관측기는 다음처럼 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{x}_e = A_0x_e + Bu + L_0(y - Cx_e) \quad (7)$$

여기에서 $x_e = [x_{e1}, x_{e2}]^T$ 는 x 의 관측값이며 관측기의 최적 이득 L_0 는 다음처럼 주어진다.

$$L_0 = \frac{1}{r_e} \Pi_0 C^T \quad (8)$$

그리고 $\Pi_0 > 0$ 는 다음을 만족시킨다.

$$A_0 \Pi_0 + \Pi_0 A_0^T - \frac{1}{r_e} \Pi_0 C^T C \Pi_0 = -Q_e \quad (9)$$

최적제어이론은 $(A_0^T, C^T, \sqrt{Q_e})$ 가 제어가능하며 관측가능하기만 하면 리카티 방정식 (9)의 해가 항상 존재함을 보장한다. 다음처럼 주어지는 제어기를 고려하자.

$$u = -K_0x \quad (10)$$

여기에서 이득 K_0 는 다음처럼 주어진다고 가정하자.

$$K_0 = \frac{1}{r_c} B^T P_0 \quad (11)$$

그리고 P_0 은 $Q_e > 0, r_c > 0$ 에 대하여 다음의 리카티 방정식을 만족시키는 양한정 해행렬이다.

$$P_0 A_0 + A_0^T P_0 - \frac{1}{r_c} P_0 B B^T P_0 = -Q_e \quad (12)$$

그러면 최적제어이론에 따라 (10)에 주어진 제어기는 선형시불변 시스템 (6)에서 $d=w=0$ 일 때 다음의 LQ 성능지수 $J = \int_0^\infty [x^T Q_e x + r_c u^2] dt$ 를 최소화하는 최적제어기이다.

최적제어이론에 따르면 성능지수 $E[x^T Q_e x + r_c u^2]$ 를 최소화하는 최적 관측기반 제어기는 다음임을 알 수 있다.

$$u = -K_0 x_e = -\frac{1}{r_c} B^T P_0 x_e \quad (13)$$

IV. 주요 결과

식 (13)에 주어진 제어기는 섭동행렬 $\Delta A(x)$ 를 무시하고 선형화된 모델 (6)에 기반한 제어기로 만약 원래의 비선형 모델 (2)에 적용하면 성능이 어느 정도 제한적일 수 있다. 이러한 문제는 이전의 SDRE 방법들을 참조하여 만약 리카티 방정식 (9)와 (12)대신에 다음의 SDRE들을 사용하면 해결할 수 있다.

$$A(x_e) \Pi(x_e) + \Pi(x_e) A^T(x_e) - \frac{1}{r_e} \Pi(x_e) C^T C \Pi(x_e) = -Q_e \quad (14)$$

$$P(x) A(x) + A(x) P^T(x) - \frac{1}{r_c} P(x) B B^T P(x) = -Q_e \quad (15)$$

1. 비선형 최적 관측기

[4-6]에 의해 SDRE (14)의 해가 항상 존재함을 알 수 있다. 그리고 다음의 안정도 정리를 얻을 수 있다.

정리 1: 비선형 시스템 (2)에 대하여 다음의 비선형 관측기를 고려하자.

$$\dot{x}_e = A(x_e)x_e + Bu + L(x_e)(y - Cx_e)$$

여기에서 관측기 이득은 다음처럼 주어진다.

$$L(x_e) = \frac{1}{r_e} \Pi(x_e) C^T$$

그러면 $x=0$ 이 안정하며 $d=w=0$ 인 상황에서 관측오차 $e = x - x_e$ 는 지수함수적으로 안정하다.

증명: (14)에 주어진 SDRE의 해 $\Pi(x_e)$ 는 상수행렬 Π_0 와 상태에 의존하는 행렬 $\Delta \Pi(x_e)$ 의 합의 형태로 $\Pi(x_e) = \Pi_0 + \Delta \Pi(x_e)$ 와 같이 표현할 수 있다. 마찬가지로 상태에 의존하는 이득 행렬도 $L(x_e) = L_0 + \Delta L(x_e)$ 로 나타낼 수 있다. 여기에서 $\Delta L(x_e) = \Delta \Pi(x_e) C^T / r_e, L_0 = \Pi_0 C^T / r_e$ 이다. 한편 관측기 오차 동역학을 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$\dot{e} = (A_0 - L_0 C)e + k_1 x_2 e - k_1 x_e e_2 - \Delta L(x_e) C e \quad (16)$$

$g(x_a) = k_1 (\|x\| + \|x_e\|) + \|\Delta L(x_e) C\|, x_a = [x^T, x_e^T]^T$ 로 정의

할 때 $\|k_1 x_2 e - k_1 x_e e_2 - \Delta L(x_e) C e\| \leq g(x_a) \|e\|$ 가 성립하며 $\|x_e\| \rightarrow 0$ 일 때 $g(x_a) \rightarrow 0$ 이 성립한다. 행렬 $A_0 - L_0 C$ 가 안정하기 때문에 $\|e^{(A_0 - L_0 C)t}\| \leq \zeta e^{-\beta t}$ 을 만족시키는 양수 ζ, β 가 존재한다. 이는 다음을 의미한다.

$$\|e(t)\| \leq \zeta e^{-(\beta - \rho\kappa)t} \|e(0)\| \leq \frac{\delta}{2} e^{-(\beta - \rho\kappa)t}$$

위 부등식은 $\|x_e\| \leq \delta$ 가 성립할 때만 만족된다. 그런데 $x=0$ 이 안정하고 $x_e = x - e$ 이므로 $\|x(0)\| \leq \delta_0$ 이 만족되면 $\|x(t)\| < \delta/2$ 이 보장됨을 의미하고 관측된 값 x_e 는 $\|x_e\| \leq \delta(1 + e^{-(\beta - \rho\kappa)t})/2$ 로 제한됨을 의미한다. 이는 결국 $e(t)$ 가 지수적으로 안정함을 의미한다. Q.E.D.

2. 비선형 최적 제어기

[4-6]을 참조하여 모든 x 에 대하여 $(A(x), B, \sqrt{Q_c})$ 는 제어가능하고 관측가능하므로 이전 결과 [4]에 의해 SDRE (15)의 해가 항상 존재함을 보일 수 있다. 그리고 다음의 안정도 정리를 얻을 수 있다.

정리 2: 다음의 비선형 제어기를 고려하자.

$$u = -K(x)x \quad (17)$$

여기에서 $K(x) = B^T P(x)/r_c$ 이다. 그러면 $d=w=0$ 인 상황에서 비선형 시스템 (2)와 제어기 (17)의 폐회로 시스템은 지수함수적으로 안정하다.

3. SDRE의 근사해

[4-6]을 통해 관측기 이득이 다음처럼 근사화 할 수 있음을 보일 수 있다.

$$L(x_e) = \frac{1}{r_c} \sum_{i=0}^{N_o} \Pi_i C^T x_{e2}^i = \sum_{i=0}^{N_o} L_i x_{e2}^i$$

여기에서 $L_i = \Pi_i C^T / r_c$ 이며 Π_i 는 아래 (18)-(20)를 통해 계산된 해행렬들이며, N_o 은 미리 계산된 일군의 방정식들의 개수를 의미한다.

$$A_0 \Pi_0 + \Pi_0 A_0^T - \frac{1}{r_c} \Pi_0 C^T C \Pi_0 + Q_c = 0 \quad (18)$$

$$(A_0 - \frac{1}{r_c} \Pi_0 C^T C) \Pi_1 - 2k_1 \Pi_0 + \Pi_1 (A_0 - \frac{1}{r_c} \Pi_0 C^T C)^T = 0 \quad (19)$$

⋮

$$(A_0 - \frac{1}{r_c} \Pi_0 C^T C) \Pi_i - 2k_1 \Pi_{i-1} + \Pi_i (A_0 - \frac{1}{r_c} \Pi_0 C^T C)^T - \frac{1}{r_c} \sum_{j=1}^{i-1} \Pi_j C^T C \Pi_{i-j} = 0 \quad (20)$$

마찬가지로 (17)을 근사화한 최적 제어기는 다음처럼 주어진다.

$$u = u_{N_c} = -\frac{1}{r_c} B^T \sum_{i=0}^{N_c} x_2^i P_i x = -\sum_{i=0}^{N_c} x_2^i K_i x$$

여기에서 $K_i = B^T P_i / r_c$ 이며 P_i 는 아래 (21)-(23)를 통해 계산된 해행렬들이며, N_c 는 미리 계산된 일군의 방정식들의 개수를 의미한다.

$$P_0 A_0 + A_0^T P_0 - \frac{1}{r_c} P_0 B B^T P_0 + Q_c = 0 \quad (21)$$

$$P_1 (A_0 - \frac{1}{r_c} B B^T P_0) - 2k_1 P_0 + (A_0 - \frac{1}{r_c} B B^T P_0)^T P_1 = 0 \quad (22)$$

⋮

$$P_i (A_0 - \frac{1}{r_c} B B^T P_0) - 2k_1 P_{i-1} + (A_0 - \frac{1}{r_c} B B^T P_0)^T P_i - \frac{1}{r_c} \sum_{j=1}^{i-1} P_j B B^T P_{i-j} = 0 \quad (23)$$

4. 최적 관측기반 제어기

정리 2: 비선형 시스템 (2)와 관측기반 제어기 (24)의 폐회로 시스템은 점근적으로 안정하다.

$$u = -K(x_e)x_e = -\frac{1}{r_c} B^T P(x_e)x_e \quad (24)$$

증명: [4-6] 참조하여 폐회로 시스템의 안정도를 증명할 수 있다. Q.E.D.

제어기 (24)은 다음처럼 근사화할 수 있다.

$$u = u_{N_c} = -\frac{1}{r_c} B^T \sum_{i=0}^{N_c} P_i x_e x_{e2}^i$$

여기에서 P_i 는 (21)-(23)를 만족시키는 해이며 x_e 는 다음의 비선형 관측기를 통해 관측된 상태값이며

$$\dot{x}_e = A(x_e)x_e + Bu + \frac{1}{r_c} \sum_{i=0}^{N_o} \Pi_i C^T (y - Cx_e) x_{e2}^i \quad (25)$$

그리고 Π_i 는 (18)-(20)를 만족시키는 해이다.

주 1: (25)의 관측기 이득행렬 Π_i 는 다음과 같이 Matlab 명령어 care와 lyap를 사용해서 쉽게 구할 수 있다.

PI0=care(A0', C', Qe, re); Q1=-2*k1*PI0;

A1=A0-PI0*C'*C/re;

⋮

PIi=lyap(Ai', Qi);

여기에서 PIj는 $\Pi_j (j=0,1,\dots,N_c)$ 를 A0, C, Qe, re, k1는 A_0, C, Q_c, r_c, k_1 를 각각 나타낸다. 마찬가지로 P_i 도 Matlab 명령어 care와 lyap를 사용해서 쉽게 구할 수 있다.

V. 수치적 예

이전 결과 [8]을 참조하여 상수 $k_i, i=1,\dots,5$ 들이 다음처럼 주어지는 시스템 (1)을 고려하자.

$$k_1 = 2, k_2 = 160, k_3 = 160, k_4 = 399.92, k_5 = 533.3$$

폐회로 제어시스템의 성능을 Matlab/Simulink를 통해 모의 실험하였다. $Q_c = I, r_c = 0.01$ 로 하여 IV 장의 주1에 주어진 알고리즘을 통해 $N_c = 1$ 으로 하여 다음의 비선형 준최적 관측기를 구할 수 있다.

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} -2x_{e2} - 160 & 120 \\ -400 & -2x_{e2} - 533 \end{bmatrix} x_e + Bu + \begin{bmatrix} -0.447 + 0.429x_{e2} \\ 0.011 - 0.004x_{e2} \end{bmatrix} (y - x_{e2})$$

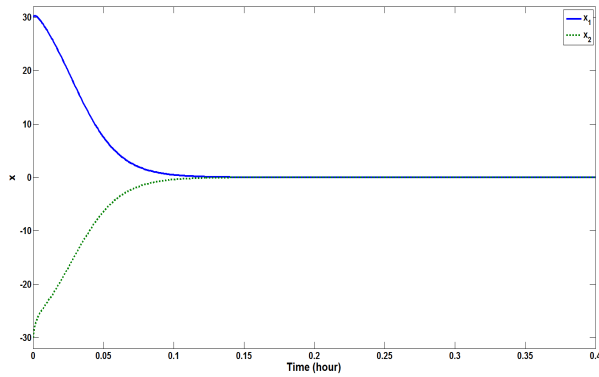


그림 2. 비선형제어기 (26)에 의한 결과.

Fig. 2. Results by nonlinear controller (26).

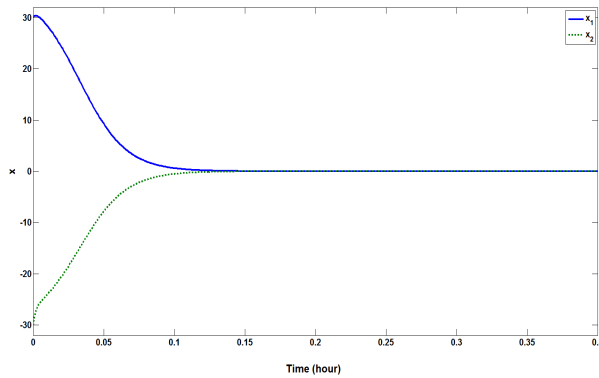


그림 3. 선형제어기 (28)에 의한 결과.

Fig. 3. Results by linear controller (28).

마찬가지로 IV 장의 주1에 주어진 알고리즘을 가지고 $Q_c = I, r_c = 0.01$ 로 하여 $N_c = 1$ 으로 하여 다음의 비선형 최적 제어기를 구할 수 있다.

$$u = -8.656x_{e1} + 2.307x_{e2} + 0.209x_{e1}x_{e2} - 0.152x_{e2}^2 \quad (26)$$

그림 2는 $x_1(0) = 30, x_2(0) = -30, x_{e1}(0) = x_{e2}(0) = 0$ 로 초기조건을 설정하고 d 를 평균 0, 분산 1을 갖는 가우시안 잡음으로 w 는 평균 0, 분산 0.01을 갖는 잡음으로 각각 잡았을 때 위의 비선형 최적 제어기에 의한 모의실험 결과를 보여준다. 식 (7)과 (13)을 통해 선형화된 모델 (6)에 대하여 LQ 성능지수 $E[x^T x + 0.01u^2]$ 를 최소화하는 최적의 관측기반 선형제어기는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} -160 & 120 \\ -400 & -533 \end{bmatrix} x_e + Bu + \begin{bmatrix} -0.447 \\ 0.011 \end{bmatrix} (y - x_{e2}) \quad (27)$$

$$u = -8.656x_{e1} + 2.307x_{e2} \quad (28)$$

그림 3은 선형관측기 (27)를 사용한 관측기반 선형제어기 (28)에 의한 시뮬레이션 결과를 보여준다. 시뮬레이션 결과를 통해 제안된 제어기가 절대 오차 적분에서 9.2%, 제곱 오차 적분에서 14.4%, 시간 가중 절대 오차 적분에서 12.0% 개선된 결과를 보임을 알 수 있다. 이는 제안된 비선형 제어방법이 선형제어기보다 훨씬 효과적으로 교통체증에 대처할 수 있음을 의미한다.

VI. 결론

본 논문에서는 진입로 신호등 제어를 위하여 SDRE 접근법을 사용하여 최적 관측기반 제어 시스템 설계 문제를 다루었다. SDRE를 사용해서 관측기와 제어기 이득을 얻기 위한 간단한 알고리즘을 제안하였다. 또한 수치적인 예를 제공해 제안된 방법의 효용성과 실용성을 보였다.

REFERENCES

- [1] M. Papageorgiou, C. Duakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos, and Y. Wang, "Review of road traffic control strategies," *Proc. of the IEEE*, vol. 91, no. 12, pp. 2043-2067, 2003.
- [2] U. Kiencke, L. Nielsen, R. Sutton, K. Schilling, M. Papageorgiou, and H. Asama, "The impact of automatic control on recent developments in transportation and vehicle systems," *Annual Reviews in Control*, vol. 30, pp. 81-89, 2006.
- [3] B. Sridhar, S. R. Grabbe, and A. Mukherjee, "Modeling and optimization in traffic flow management," *Proc. of the IEEE*, vol. 96, no. 12, pp. 2060-2080, 2008.
- [4] T. Cimen, "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the SDRE (State-Dependent Riccati Equation) method," *Annual Reviews in Control*, vol. 34, pp. 32-51, 2010.
- [5] T. D. Do, H. H. Choi, and J. W. Jung, "SDRE-based near optimal control system design for PM synchronous motor," *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 11, pp. 4063-4074, 2012.
- [6] H. H. Choi, "SDRE-based near optimal traffic controller design," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 12, pp. 1086-1089, Dec. 2012.
- [7] Y. Wang, M. Papageorgiou, and A. Messmer, "Investigation of the adaptive features of a real-time nonlinear freeway traffic state estimator," *Nonlinear Dynamics*, vol. 49, pp. 511-524, 2007.
- [8] G. Maeng and H. H. Choi, "Fuzzy observer design for traffic control system" *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 20, no. 1, pp. 18-21, Jan. 2014



이 기 호

2013년 8월 동국대학교 공과대학 전자전기공학부 졸업(공학사). 2013년 9월~현재 동 대학원 전자전기공학부 석사과정.

최 한 호

제어·로봇·시스템학회 논문지 2010년 제16권 제12호 참조.