

# 연속시간 다개체 시스템에 대한 LQ-역최적 상태일치 프로토콜 및 군집제어 응용

## LQ Inverse Optimal Consensus Protocol for Continuous-Time Multi-Agent Systems and Its Application to Formation Control

이 재 영, 최 윤 호\*  
(Jae Young Lee<sup>1</sup> and Yoon Ho Choi<sup>2,\*</sup>)

<sup>1</sup>Department of Electrical & Electronic Engineering, Yonsei University

<sup>2</sup>Department of Electronic Engineering, Kyonggi University

**Abstract:** In this paper, we present and analyze a LQ (Linear Quadratic) inverse optimal state-consensus protocol for continuous-time multi-agent systems with undirected graph topology. By Lyapunov analysis of the state-consensus error dynamics, we show the sufficient conditions on the algebraic connectivity of the graph to guarantee LQ inverse optimality and closed-loop stability. A more relaxed stability condition is also provided in terms of the algebraic connectivity. Finally, a formation control protocol for multiple mobile robots is proposed based on the target LQ inverse optimal consensus protocol, and the simulation results are provided to verify the performance of the proposed LQ inverse formation control method.

**Keywords:** inverse optimal consensus, multi-agent systems, formation control

### I. 서론

최근 들어 분산 네트워크 통신구조를 갖는 다개체 시스템의 일치제어(consensus control) 기법이 제어공학 분야에서 많은 주목을 받고 있으며, 이에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다[1-3]. 여기서 다개체 시스템(multi-agent system)이란, 이동로봇 등의 다수의 개체들이 분산 네트워크 통신을 이용하여 정보를 교환하는 하나의 시스템을 말하며, 일치제어란 다개체 시스템을 구성하는 각 개체들의 상태변수(state variable) 혹은 출력변수(output variable) 등의 제어변수가 모두 하나의 일치된 값을 갖도록 제어하는 것을 일컫는다[1,2]. 현재까지 다양한 제어공학적 관점에서 이러한 일치제어 기법에 대한 연구가 진행·확장되고 있으며[3-14], 일치제어에 기반한 다개체 이동로봇의 군집제어(formation control) 방법들이 제안되었다[15-17].

한편, 선형 다개체 시스템에 대한 최적 일치제어에 대한 연구가 진행되었다[8-12]. 그래프 토폴로지(graph topology)에 기반한 선형 이차(LQ: Linear Quadratic) 준최적(suboptimal) 제어가 [8]에서 제안하였으며, 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation) [8-11], 상태 관측기 [10,11], 동적 게임이론 [12] 등을 기반으로 하는 설계 방법들이 현재까지 꾸준히 제안되고 있다. 이러한 최적 설계방법의 가장 큰 장애물은

다개체 시스템의 분산 네트워크 구조로 인해 필연적으로 발생하게 되는 프로토콜 상의 구조적 제약사항들로, 이는 최적 일치제어 프로토콜의 설계 및 구현 뿐 아니라 제어기의 전역 최적성(global optimality)에 대한 분석을 더욱 어렵게 한다. 이에 따라 많은 최적 일치제어 기법들은 복잡한 최적화 절차를 거쳐야 하거나[12], 혹은 다개체 제어 시스템의 전역 최적성을 배제한 채, 그 안정도에만 초점을 맞춰 분석이 이루어졌다[8,10,11]. LQ-최적 제어기에서 나타나는  $\infty$ -이득여유(gain margin)과  $60^\circ$  이상의 위상여유(phase margin) 등의 강인한 특성을 보장하기 위해서는 제어기의 안정도 뿐만 아니라 최적성에 대한 분석도 이루어져야만 한다[19].

최적 일치제어 설계 방법의 상기 구조적 제약사항으로 인한 문제점을 해결하기 위한 방법으로 LQ-역최적(LQ inverse optimal) 설계방법이 제안되었다[9,13,14]. 보통의 최적제어 방법들과 달리 이러한 역최적 방법에서는, 최소화시키고자 하는 성능함수가 네트워크 토폴로지와 이미 설계된 일치제어 프로토콜에 의해 결정되며, 이를 통해 상기 구조적 제약사항으로 인한 문제점을 완화시킬 수 있다. 단일 적분기 모델에 대해 Qu, Simaan, Doug는 일치제어 프로토콜의 역최적성을 다양한 관점에서 분석하였으며[13], Cao와 Ren은 프로토콜의 LQ-역최적성을 보장하는 인접행렬의 종류와 제어이득 값을 제시하였다[9]. 더 나아가 최근 Movric과 Lewis는 일반적인 시불변(time-invariant) 선형 다개체 제어 시스템의 역최적 설계에 관한 연구를 진행하였으며, 역최적성을 보장하는 대수 리카티 방정식 기반의 프로토콜 설계방법을 제시하였다[14].

본 논문에서는 무방향 그래프 토폴로지(undirected graph

\* Corresponding Author

Manuscript received January 4, 2014 / revised January 10, 2014 / accepted February 4, 2014

이재영: 연세대학교 전기전자공학과(jyounglee@yonsei.ac.kr)

최윤호: 경기대학교 전자공학과(yhchoi@kyonggi.ac.kr)

\* 본 논문은 2013년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(NRF-2013R1A1A2012851).

topology)를 갖는 시불변 선형 다개체 제어 시스템에 대한 일치제어 프로토콜을 제시/분석한다. 제시되는 대상 프로토콜은 대수 리카티 방정식을 기반으로 설계된 [14]의 LQ-역 최적 프로토콜과 동가이며, 고이득 형태의 제어이득 값을 취하지 않아 보다 단순화된 형태를 가진다. 본 논문의 상태 일치(state-consensus) 오차에 대한 리아프노브(Lyapunov) 분석을 통해, 대상 프로토콜의 전체 다개체 페루프 제어 시스템의 LQ-역최적성 조건과 보다 완화된 안정도 조건을 통신 네트워크의 대수적 연결도(algebraic connectivity)와 관련하여 제시한다. 마지막으로, 대상 LQ-역최적 프로토콜에 대한 응용 예로서 이동로봇들의 군집제어 알고리즘을 제시하고, 모의 실험을 통해 그 성능을 검증한다.

수학적 기호: 본 논문에서 벡터  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 에 대한 노름(norm)  $\|x\|$ 은  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ 과 같이 정의된 유클리드 노름(Euclidean norm)을 의미한다. 또한  $\lambda_k(X)$  ( $k=1,2,\dots,n$ )는 주어진 정방행렬  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 에 대한 고유값(eigenvalue)을 나타내며, 그 실수부의 크기의 따라 편의상 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$\text{Re } \lambda_1(X) \leq \text{Re } \lambda_2(X) \leq \dots \leq \text{Re } \lambda_n(X)$$

또한, 정방행렬  $X$ 에 대한 노름을  $\|X\| = \lambda_n(X^T X)$ 로 정의한다. 따라서 벡터 노름  $\|x\|$ 과 행렬 노름  $\|X\|$  사이에는  $\|Xx\| \leq \|X\|\|x\|$ 와 같은 관계식이 성립한다. 모든 성분이 '1'인  $\mathbb{R}^N$ 상의 벡터는  $\mathbf{1}_N := [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$ 으로 표기하기로 한다.

## II. 그래프 이론

본 논문에서는 다개체 시스템의 통신 네트워크를 그래프  $G = \{N, E, A\}$ 로 나타내며, 이는 각 개체(agent)를 나타내는 노드(node)들의 집합  $N := \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 과 노드들의 순서쌍을 원소로 갖는 간선(edge)집합  $E \subseteq N \times N$ , 가중치 인접행렬(weighted adjacent matrix)  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 로 구성된다. 다개체 시스템의  $i$ 번째 개체가  $j$ 번째 개체의 정보를 직접적으로 전달 받는 경우, 그러한  $i, j \in N$ 에 대해  $(j, i) \in E$ 로 표기하며  $a_{ij} > 0$ 인 값으로 가중치 인접행렬  $A$ 가 주어진다. 그렇지 않은 경우 (즉  $(j, i) \notin E$ ),  $a_{ij} = 0$ 이다. 노드  $i \in N$ 로부터 노드  $j \in N$ 로의 경로는 어떤  $l \in N$ 에 대해  $i_1 = i, i_l = j$ 을 만족하는 간선들의 순서집합  $((i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l))$ 로 정의되며, 모든  $k=1, 2, \dots, l$ 에 대하여  $(i_{k-1}, i_k) \in E$ 이다. 본 논문에서는 그래프  $G$ 에 대해 다음을 가정한다.

가정 1: 그래프  $G$ 는 단순 무방향성(simple undirected)이다. 즉, 모든  $i, j \in N$ 에 대해  $a_{ii} = 0, a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ 이다.

가정 2: 그래프  $G$ 는 연결(connected)되어 있다. 즉, 임의의 두 노드  $i, j \in N$ 에 대해 노드  $i$ 로부터 노드  $j$ 까지의 경로가 항상 존재한다.

본 논문에서는,  $i$ 번째 개체로 직접적으로 정보를 전달할

수 있는 이웃 집합  $\mathfrak{N}_i$ 을  $\mathfrak{N}_i := \{j : (j, i) \in E\}$ 로 표기하며, 라플라시안(Laplacian) 행렬  $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 을  $L := D - A$ 와 같이 정의한다. 여기서  $D$ 는  $D := \text{diag}\{A \cdot \mathbf{1}_N\}$ 이다. 가정 1을 만족시키는 단순 무방향 그래프의 경우,  $A$ 와  $L$ 이 대칭행렬(symmetric matrix)이고, 따라서 모든 고유값이 실수인 것을 쉽게 확인할 수 있다. 또한, 이 경우, 거쉬고린 디스크 정리(Gershgorin's disk theorem)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = \lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_N(L) \quad (1)$$

정리 1 [2,20]: 그래프  $G = \{N, E, A\}$ 가 가정 1~2를 만족시키는 연결되어 있는 단순 무방향 그래프이면,

$$“\lambda_2(L) > 0, \text{rank}(L) = n - 1”$$

이고, 그 역도 또한 성립한다. □

단순 무방향 그래프  $G = \{N, E, A\}$ 의 라플라시안 행렬  $L$ 에 대한 고유값  $\lambda_2(L)$ 는 일치제어의 수렴속도와 관련이 있으며, 이를 그래프  $G$ 의 대수적 연결도라 부른다.

보조정리 1: 만일 그래프  $G$ 가 가정 1~2를 만족시킨다면, 다음을 만족시키는 직교행렬(orthogonal matrix)  $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 와 행렬  $H \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 가 존재한다.

- 1)  $U^T L U = \Lambda \equiv \text{diag}(0, \lambda_2(L), \lambda_3(L), \dots, \lambda_N(L))$
- 2)  $U = [\mathbf{1}_N / \sqrt{N} \quad H]$
- 3)  $H^T H = I_{N-1}, \mathbf{1}_N^T H = 0$

증명: 그래프  $G$ 가 가정 1~2를 만족하므로, 정리 1에 의해  $L$ 의 고유값 '0'의 중복도(multiplicity)는 1이다. 이 경우,  $L$ 은 대칭행렬이므로

$$U^T L U = \Lambda \equiv \text{diag}(0, \lambda_2(L), \lambda_3(L), \dots, \lambda_N(L))$$

를 만족시키는 직교행렬  $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 가 존재한다. 이 경우,  $\mathbf{1}_N$ 은 단순 고유값 '0'에 대응되는 고유벡터이므로, [4]에서와 같이  $U$ 를  $H^T H = I_{N-1}$ 과  $\mathbf{1}_N^T H = 0$ 을 만족시키는 행렬  $H \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 에 대해  $U$ 를  $U = [\mathbf{1}_N / \sqrt{N} \quad H]$ 와 같이 나타낼 수 있다. ■

## III. LQ-역최적 상태일치 프로토콜

### 1. 상태일치 문제정의

본 논문에서는 각 개체가 (2)와 같은 선형시스템으로 표현된 선형 다개체 시스템에 대한 LQ-역최적 상태일치 프로토콜을 다룬다.

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad i \in N \quad (2)$$

여기서  $x_i \in \mathbb{R}^n$ 와  $u_i \in \mathbb{R}^m$ 는 각각  $i$ 번째 개체에 대한 상태 변수와 제어입력이며,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 와  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 은 시불변 행렬이다. 문제 정의를 위해 다음을 가정한다.

가정 3:  $(A, B)$ 는 안정화 가능(stabilizable) 시스템이다. 즉, 모든  $i=1, 2, \dots, n$ 에 대해  $\text{Re } \lambda_i(A - BK) < 0$ 인 제어

이득행렬  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 가 존재한다.

- 다개체 시스템의 상태일치 문제: 각  $i$ 번째 개체가 이웃한 개체의 정보  $x_{-i} = \{x_j : j \in \mathfrak{N}_i\}$ 만을 이용하여, 상태일치, 즉

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathfrak{N} \quad (3)$$

를 달성하는 상태일치 프로토콜  $u_i = u_i(x_i, x_{-i})$ 을 설계한다.  $\square$

## 2. LQ-역최적 상태일치 프로토콜

본 논문에서는 다개체 시스템 (2)에 대한 상태일치 문제의 LQ-역최적 해법으로, [14]의 상태일치 프로토콜로부터 단순화된 다음과 같은 프로토콜을 고려한다.

$$u_i(x_i, x_{-i}) = K \sum_{j \in \mathfrak{N}_i} a_{ij}(x_j - x_i) \quad (4)$$

여기서 이득행렬  $K$ 는 양한정(positive definite) 행렬  $Q > 0$ 와  $R > 0$ 에 대한 대수 리카티 방정식

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5)$$

의 해  $P > 0$ 에 대해  $K = R^{-1}B^T P$ 와 같이 주어진다. 상태일치 프로토콜 (4)는 라플라시안 행렬  $L$ 을 이용하여

$$u_i(x_i, x_{-i}) = - \sum_{j=1}^N l_{ij} K x_j, \quad (6)$$

와 같이 쓸 수 있고, 전역(global) 상태변수  $x \in \mathbb{R}^{nN}$ 와 전역 제어입력  $u \in \mathbb{R}^{mN}$ 를

$$x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T, \quad u := [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]^T$$

와 같이 정의하면, 식 (7)과 같이 더욱 간략화된 형태로 나타낼 수 있다.

$$u = -(L \otimes K)x \quad (7)$$

여기서  $X \otimes Y$ 는 행렬  $X$ 와  $Y$ 에 대한 크로넬커(Kronecker) 곱이다.

보조정리 2: 그래프  $G$ 가 가정 1을 만족시킨다면, 상태일치 프로토콜 (4)에 대해  $\sum_{i=1}^N u_i = 0$ 이 성립한다.

증명: 그래프  $G$ 가 가정 1을 만족시킨다면, 라플라시안 행렬  $L$ 에 대해  $\mathbf{1}_N^T L = 0$ 이 성립한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^N u_i = (\mathbf{1}_N^T \otimes L_m)u = -(\mathbf{1}_N^T L \otimes K)x = 0 \quad \blacksquare$$

## 3. 상태일치 오차

본 논문에서는 시스템 (2)에 대한 상태일치 오차  $e_i \in \mathbb{R}^n$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$e_i := x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j, \quad \forall i \in \mathfrak{N} \quad (8)$$

이를 이용하면, 상태일치 프로토콜 (6)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i(e_i, e_{-i}) = K \sum_{j \in \mathfrak{N}_i} a_{ij}(e_j - e_i) = - \sum_{j=1}^N l_{ij} K e_j \quad (9)$$

$$u = -(L \otimes K)e \quad (10)$$

또한, 식 (2)와 (9), 보조정리 2를 통해 상태일치 오차  $e_i$ 에 대한 동적 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\dot{e}_i = A e_i - \sum_{j=1}^N l_{ij} B K e_j \quad (11)$$

이는  $e = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ 와 같이 정의되는 전역 상태오차  $e$ 와 크로넬커 곱의 성질  $(X_1 \otimes Y_1)(X_2 \otimes Y_2) = X_1 X_2 \otimes Y_1 Y_2$ 을 이용하여 식 (12)와 같이 표현 가능하다.

$$\dot{e} = [(I_N \otimes A) - (L \otimes BK)]e \quad (12)$$

보조정리 3: 그래프  $G$ 가 가정 1-2를 만족하고, 임의의 벡터  $\xi = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ 가 보조정리 1의 직교행렬  $U$ 에 대해  $\xi = (U^T \otimes I_n)e$ 를 만족시키면, 보조정리 1의 직교행렬  $H$ 에 대해 다음이 항상 성립한다.

- 1)  $\xi_1 = 0$
- 2)  $\zeta = (H^T \otimes I_n)e$ , ( $\zeta = [\zeta_2^T, \dots, \zeta_N^T]^T$ )

증명: 보조정리 1의 2)에 의해  $\xi = (U^T \otimes I_n)e$ 는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \zeta \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} (\mathbf{1}_N^T / \sqrt{N}) \\ H^T \end{bmatrix} \otimes I_n \right) e = \begin{bmatrix} (\mathbf{1}_N^T / \sqrt{N}) \otimes I_n \\ H^T \otimes I_n \end{bmatrix} e$$

따라서  $\zeta = (H^T \otimes I_n)e$ 임을 확인할 수 있으며, 또한 다음과 같이  $\xi_1 = 0$ 이 성립한다.

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n) e = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N e_i = 0$$

여기서  $\bar{x}$ 를  $\bar{x} := \sum_{j=1}^N x_j$ 로 정의하면,  $\sum_{i=1}^N e_i = 0$ 인 것을 식 (8)에 의해 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^N e_i = \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x} \left(1 - \frac{N}{N}\right) = 0 \quad \blacksquare$$

## 4. 안정도와 최적성 분석

이제, 식 (8)과 같이 정의된 상태일치 오차  $e_i$ 를 기반으로 프로토콜 (4)의 안정도와 LQ-역최적성을 논한다. 이를 위해 다음과 같은 보조정리가 필요하다.

보조정리 4: 시스템 (2)의 행렬  $A, B$ 에 대해  $A_\otimes$ 와  $B_\otimes$ 를  $A_\otimes := I_N \otimes A, B_\otimes := I_N \otimes B$ 와 같이 정의하면,

$$\begin{cases} \Pi := L \otimes P, \Gamma := I_N \otimes R \\ \Theta := L \otimes Q + (L^2 - L) \otimes (PBR^{-1}B^T P) \end{cases} \quad (13)$$

로 정의된  $\Pi, \Theta, \Gamma \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$A_\otimes^T \Pi + \Pi A_\otimes + \Theta - \Pi B_\otimes \Gamma^{-1} B_\otimes^T \Pi = 0 \quad (14)$$

$$\Gamma^{-1}B_{\otimes}^T\Pi = (L \otimes K) \quad (15)$$

증명: 대수 리카티 방정식 (5)와  $K = R^{-1}B^T P$ , 크로넬 커곱의 성질  $(X_1 \otimes Y_1)(X_2 \otimes Y_2) = X_1 X_2 \otimes Y_1 Y_2$ 을 이용하면, 다음과 같은 등식이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} 1) & A_{\otimes}^T \Pi + \Pi A_{\otimes} + \Theta - \Pi B_{\otimes} \Gamma^{-1} B_{\otimes}^T \Pi \\ &= (L \otimes A^T P) + (L \otimes PA) + \Theta - \Pi (I \otimes BR^{-1} B^T) \Pi \\ &= L \otimes (A^T P + PA) + \Theta - L^2 \otimes PBR^{-1} B^T P \\ &= L \otimes (A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q) = 0 \\ 2) & \Gamma^{-1} B_{\otimes}^T \Pi = (I_N \otimes R^{-1} B^T) (L \otimes P) \\ &= (L \otimes R^{-1} B^T P) = (L \otimes K) \end{aligned}$$

■  
보조정리 3과 4를 바탕으로 안정도와 LQ-역최적성에 대한 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 2: 가정 1과 2를 만족시키는 그래프 G와 가정 3을 만족하는 선형 시스템 (1)을 고려하면 그래프 G의 대수적 연결도  $\lambda_2(L)$ 에 대해 다음이 성립한다.

1) 상태일치 안정도: 만일 대수적 연결도가  $\lambda_2(L) \geq 1/2$ 를 만족하면, 분산 프로토콜 (4)은 상태일치 조건 (3)를 달성하며, 이에 대한 상태일치 오차  $e$ 에 대해 양의 상수  $\gamma, \beta > 0$ 가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\|e(t)\| \leq \gamma e^{-\beta t} \|e(0)\|, \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

2) LQ-역최적성: 만일  $\lambda_2(L) \geq 1$ 가 성립하면, 분산 프로토콜 (4)은 전역 성능함수 (16)를 최소화시키는 최적해이다.

$$J(e(0), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} (e^T \Theta e + u^T \Gamma u) dt \quad (16)$$

증명: 증명을 위해 보조정리 1과 3의 직교행렬  $U$ 와 이를 이용한 상태변환  $\xi = (U^T \otimes I_n)e$ 을 고려하자. 보조정리 3에 의해  $\xi_1 = 0$ 이고, 따라서  $\xi$  및  $\zeta = [\xi_2^T, \dots, \xi_N^T]^T$ 에 대한 동적방정식은 식 (12)와  $e = (U \otimes I_n)\xi$ , 보조정리 1로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (U^T \otimes I_n)[(I_N \otimes A) - (L \otimes BK)](U \otimes I_n)\xi \\ &= [(I_N \otimes A) - (L \otimes BK)]\xi \\ \Rightarrow \dot{\zeta} &= [(I_{N-1} \otimes A) - (\hat{L} \otimes BK)]\zeta \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\hat{L}$ 는  $\hat{L} := \text{diag}(\lambda_2(L), \lambda_3(L), \dots, \lambda_N(L))$ 와 같이 정의되는 대각행렬(diagonal matrix)이다. 이제  $\zeta$ 에 대한 리아프노브 함수로  $V(\zeta) = e^T \Pi e$ 를 고려하자. 여기서  $\Pi$ 는 보조정리 4에서  $\Pi = L \otimes P$ 와 같이 정의된 행렬이다. 함수  $V(\zeta)$ 는 보조정리 1과 3에 의해

$$\begin{aligned} V(\zeta) &= e^T (L \otimes P) e = \xi^T (A \otimes P) \xi = \zeta^T (\hat{A} \otimes P) \zeta \\ &= \sum_{i=2}^N \lambda_i(L) \xi_i^T P \xi_i > 0 \end{aligned}$$

를 만족시키므로 양함수이다.  $V(\zeta)$ 를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &= 2e^T \Pi \dot{e} \\ &= e^T (A_{\otimes}^T \Pi + \Pi A_{\otimes}) e - 2e^T \Pi (L \otimes BK) e \end{aligned}$$

이는  $L \otimes BK = B_{\otimes} \Gamma^{-1} B_{\otimes}^T \Pi$ 와 보조정리 4의 식 (13)과 (14)을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &= -e^T (\Theta + \Pi B_{\otimes} \Gamma^{-1} B_{\otimes}^T \Pi) e \\ &= -e^T (L \otimes Q + (2L^2 - L) \otimes (PBR^{-1} B^T P)) e \end{aligned} \quad (18)$$

또한, 보조정리 1과 3,  $\xi = (U^T \otimes I_n)e$ 에 의해 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\xi^T (A \otimes Q + (2A^2 - A) \otimes (PBR^{-1} B^T P)) \xi \\ &= -\sum_{i=2}^N \lambda_i(L) \cdot \xi_i^T [Q + (2\lambda_i(L) - 1)(PBR^{-1} B^T P)] \xi_i \end{aligned} \quad (19)$$

조건  $\lambda_2(L) \geq 1/2$ 에 의해 모든  $i = 2, 3, \dots, N$ 에 대해  $\lambda_i(L) \geq 1/2$ 이고, 따라서  $2\lambda_i(L) - 1 \geq 0$ 가 되므로, 식 (19)와  $Q > 0$ 에 의해 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta) &\leq -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \xi_i^T Q \xi_i \leq -\frac{1}{2} \zeta^T (I_{N-1} \otimes Q) \zeta \\ &\leq -\kappa V(\zeta) < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $\kappa > 0$ 는  $\kappa := \lambda_1(Q)/2\lambda_N(\Pi)$ 와 같이 정의된다. 따라서 리아프노브 안정도 판별법 [21]에 의해  $\zeta$ -시스템 (17)는 지수적으로 안정(exponentially stable)하며, 따라서  $\zeta$ 의 초기조건  $\zeta(0)$ 에 대해

$$\|\zeta(t)\| = \alpha e^{-\beta t} \|\zeta(0)\| \quad (21)$$

를 만족시키는 양의 상수  $\alpha, \beta > 0$ 가 존재한다. 또한, 보조정리 3에 의해  $\xi_1 = 0$ 이고, 따라서  $\|\xi(t)\| = \|\zeta(t)\|$ 가 성립하며,  $e$ 와  $\xi$ 는  $e = (U \otimes I_n)\xi$ ,  $\xi = (U^T \otimes I_n)e$ 의 관계가 있으므로, 식 (21)을 통해 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|U \otimes I_n\| \cdot \|\zeta(t)\| \leq \alpha \|U \otimes I_n\| \cdot e^{-\beta t} \|\xi(0)\| \\ &\leq \alpha \|U \otimes I_n\|^2 e^{-\beta t} \|e(0)\| \equiv \gamma e^{-\beta t} \|e(0)\| \end{aligned}$$

따라서 일치오차 동적방정식 (12)은 지수적으로 안정하며, 프로토콜 (4)는 상태일치 (3)을 달성한다.

이제 LQ-역최적성을 보이기 위해 비교정리(comparison lemma) [21, Lemma 3.4]를 식 (20)에 적용하면,

$$0 < V(\zeta(t)) \leq V(\zeta(0)) e^{-\kappa t} < \infty$$

를 얻을 수 있고, 따라서 어떤 초기조건에 대해서도  $V(\zeta)$ 가 잘 정의된 유한한 값을 가짐을 확인할 수 있다. 또한 (10)과 보조정리 4의 식 (15)를 이용하면, 식 (18)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\dot{V}(e) = e^T \Theta e + u^T \Gamma u \quad (22)$$

여기서  $V(e)$ 는  $V(e) = V(\zeta)$ 로  $\zeta$ 에 관한 리아프노브 함수  $V(\zeta)$ 가 상태일치 오차  $e$ 에 관한 함수임을 나타낸다. 식 (22)를 시간에 대해 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(e(0)) &= -\left[\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) - V(e(0))\right] \\ &= \int_0^{\infty} (e^T \Theta e + u^T \Gamma u) dt \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $\Theta$ 는 보조정리 4의 식 (13)에서 정의되며,

$$\Theta = (U \otimes I_n)(A \otimes Q + (\Lambda^2 - \Lambda) \otimes (PBR^{-1}B^T P))(U^T \otimes I_n)$$

와 같이 표현할 수 있다.  $\lambda_2(L) \geq 1$ 에 의해  $\Lambda^2 - \Lambda \geq 0$ 가 성립함을 이용하면,  $\Theta$ 가 준양행렬 행렬임을 보일 수 있고, 이와 비슷하게  $V(e) = e^T \Pi e$ 의 행렬  $\Pi$  또한 준양행렬이다.

보조정리 4에 의해 행렬  $\Pi$ ,  $\Theta$ ,  $\Gamma$ 와 행렬  $A_{\otimes}$ 와  $B_{\otimes}$ 는 대수 리카티 방정식 (14)를 만족시키며, 식 (10)와 (15)에 의해 식 (23)에 대한 최적해  $u^* = -\Gamma^{-1}B_{\otimes}^T \Pi e$ 는  $u^* = u$ 를 만족함을 아래와 같이 확인할 수 있다.

$$u^* = -\Gamma^{-1}B_{\otimes}^T \Pi e = -(L \otimes K)e = u$$

따라서  $u$ 는 비용함수 (16)에 대한 최적해이다. ■

참조 1: 만일 그래프  $G$ 의 대수적 연결도  $\lambda_2(L)$ 가 " $0 < \lambda_2(L) < 1/2$ "가 되어 정리 2에서 제시된 안정도 조건 " $\lambda_2(L) \geq 1/2$ "과 역최적성 조건 " $\lambda_2(L) \geq 1$ "을 만족시키지 못한다면, 충분히 큰 양의 상수  $c > 1$ 에 대하여  $L_c = cL$ 로 정의되는 가중치 인접 행렬  $A_c$ 를 갖는 그래프

$$G_c = \{N, E, A_c\} \quad (A_c = cA)$$

에 대한 LQ-역최적 상태일치 프로토콜

$$u_i(x_i, x_{-i}) = cK \sum_{j \in \mathfrak{s}_i} a_{ij}(x_j - x_i) \quad (4')$$

을 고려할 수 있다. 식 (4')은 [14]에서 제안된 것과 동일한 형태로, 이는 식 (4)로부터 라플라시안 행렬  $L$  또는 가중치 인접행렬  $A$ 의 계수를 조절하여 쉽게 얻을 수 있다. 이 경우, 그래프  $G_c$ 의 대수적 연결도  $\lambda_2(L_c)$ 는  $c\lambda_2(L)$ 과 같으며, 따라서 정리 2에 의해 만약 기존 그래프  $G$ 의 대수적 연결도  $\lambda_2(L)$ 에 대해 상수  $c$ 가

$$c \geq \frac{1}{2\lambda_2(L)}$$

를 만족시킨다면, 상태일치 프로토콜 (4')은 전체 상태일치 안정도를 보장하며, 상수  $c$ 가

$$c \geq 1/\lambda_2(L)$$

을 만족하면, 상태일치 프로토콜 (4')은 전체 다개체 제어 시스템의 LQ-역최적성을 보장한다.

#### IV. 모의실험: 다개체 자율이동로봇의 군집제어

본 장에서는 상기 LQ-역최적 상태일치 프로토콜 (4) 기반의 다개체 자율이동로봇 군집제어 알고리즘을 제안하고, 그 성능을 모의실험을 통해 검증한다. 대상이 되는 각 자율이동로봇의 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다[15-18].

$$\dot{p}_{x,i} = v_i \cos \theta_i, \quad \dot{p}_{y,i} = v_i \sin \theta_i, \quad \dot{\theta}_i = w_i \quad (i \in N) \quad (24)$$

여기서  $(p_{x,i}, p_{y,i}) \in \mathbb{R}^2$ 와  $\theta_i \in \mathbb{R}$ 는 각각  $i$ 번째 이동로봇의  $xy$ -위치와 방위를,  $v_i \in \mathbb{R}$ 와  $w_i \in \mathbb{R}$ 는 각각  $i$ 번째 이동로봇의 선속도와 각속도를 나타낸다. 각  $i$ 번째 로봇의 군집 대형 오차를 로봇의 군집 목표 대형을 묘사하는 상수벡터  $d_{x,i}$ ,  $d_{y,i}$ 에 대해  $e_{x,i} := p_{x,i} - d_{x,i}$ ,  $e_{y,i} := p_{y,i} - d_{y,i}$ 로 정의하고, 이에 대한 미분을 동적 입력변환

$$u_i = \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -v_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & v_i \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad \dot{v}_i = a_i \quad (25)$$

을 이용하여 정리하면, 식 (2)과 같은 형태의 선형 동적 방정식을 얻을 수 있다. 여기서 각 상태변수와 행렬은 다음과 같이 주어진다[15].

$$x_i = [e_{x,i} \ e_{y,i} \ \dot{p}_{x,i} \ \dot{p}_{y,i}]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (26)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2} \quad (27)$$

상기 식 (27)에 대한 리카티 방정식 (5)의 해  $P$ 는 LQ-역최적 프로토콜 (4)의 제어이득  $K = -R^{-1}B^T P$ 을 결정하며, 이에 기반한 군집제어 프로토콜은 식 (25)를 통해 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_i \\ w_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -v_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & v_i \cos \theta_i \end{bmatrix}^{-1} \cdot u_i \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -v_i^{-1} \sin \theta_i & v_i^{-1} \cos \theta_i \end{bmatrix} \cdot K \cdot \left( \sum_{j \in \mathfrak{s}_i} a_{ij}(x_j - x_i) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

본 장에서는 상기 군집제어 프로토콜 (28)에 대한 모의실험을 위해 다음과 같은  $\lambda_2(L) = 1$ 의 라플라시안 행렬을 갖는 그래프 토폴로지를 고려하였다 ( $N=3$ ).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

또한, 다음과 같은 각 이동로봇의 초기조건과 목표 대형  $d_i := [d_{x,i}, d_{y,i}]^T$ 에 대해 모의실험을 수행하였다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{x,1}(0) \\ p_{y,1}(0) \\ \theta_1(0) \\ v_1(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\pi/4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_{x,2}(0) \\ p_{y,2}(0) \\ \theta_2(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_{x,3}(0) \\ p_{y,3}(0) \\ \theta_3(0) \\ v_3(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ d_1 &= [0 \ 1]^T, \quad d_2 = [2 \ 0]^T, \quad d_3 = [0 \ -1]^T \end{aligned}$$

여기서 초기 선속도  $v_i(0)$ 의 경우, 프로토콜 (28)의 분모가 '0'이 되는 것을 방지하기 위하여 '0'이 아닌 값을 이용하였다. 한편, 본 모의실험에서는 식 (27)에서 주어진 행렬  $A$ ,  $B$ 와  $Q = I_4$ ,  $R = I_2$ 에 대한 대수 리카티 방정식 (5)의 해  $P$ 에 대해 다음과 같이 주어진 제어이득  $K$ 을 이용하였다.

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.7321 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.7321 \end{bmatrix}$$

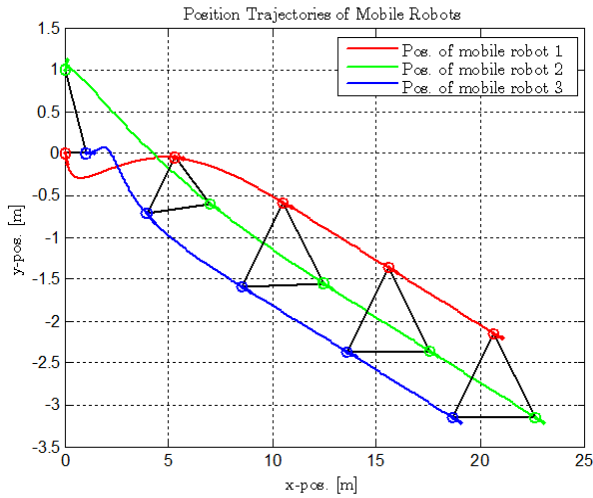


그림 1. 각 이동로봇의 위치와 군집대형의 궤적.  
Fig. 1. Position and formation trajectories of mobile robots.

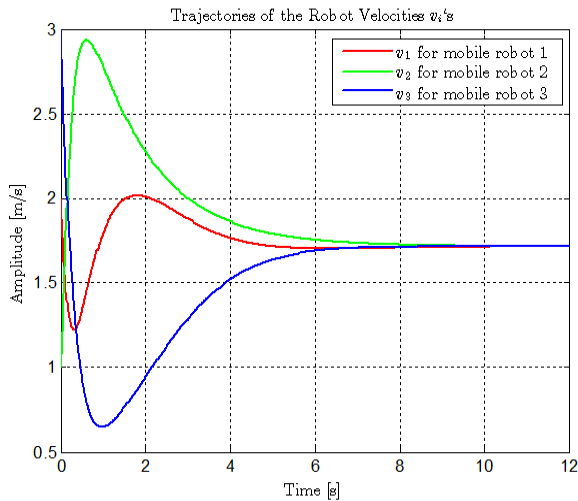


그림 2. 각 이동로봇의 선속도  $v_i$ 의 궤적과 상태일치.  
Fig. 2. Trj. and consensus of  $v_i$ 's of the mobile robots.

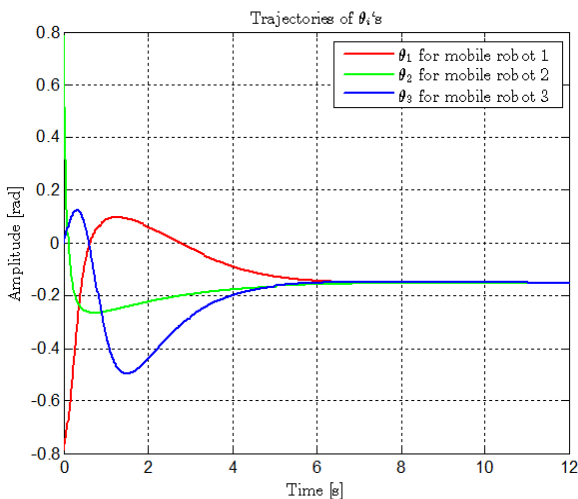


그림 3. 각 이동로봇의 방위  $\theta_i$ 의 궤적과 상태일치.  
Fig. 3. Trj. and consensus of  $\theta_i$ 's of the mobile robots.

그림 1-3은 다개체 이동로봇의 군집제어에 대한 모의실험 결과를 나타낸다. 그림 1을 통해 모든 이동로봇 개체가 시간이 경과함에 따라 정해진 삼각대형을 갖추어 가는 것을 확인할 수 있으며, 그림 2에서 볼 수 있듯이 군집대형을 이룬 후 속도 역시 모두 동일한 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 이는 모두 상태일치 프로토콜 (28)에 의한 결과임을 쉽게 유추할 수 있다. 한편, 각 이동로봇의 방위  $\theta_i$ 의 경우에도, 그림 1와 3에서 볼 수 있듯이 프로토콜 (28)에 의해 간접적으로 상태일치에 도달하게 되어 모든 이동로봇들이 동일한 방향을 가지고 이동하는 것을 확인할 수 있다.

**V. 결론**

본 논문에서는 연결되어 있는 단순 무방향 그래프 토폴로지를 갖는 시불변 선형 다개체 제어 시스템에 대한 일치 제어 프로토콜 (4)에 대한 상태오차를 정의하고, 리아프노브 분석을 통해 LQ-역최적 조건 ( $\lambda_2(L) \geq 1$ )과 이보다 완화된 안정도 조건 ( $\lambda_2(L) \geq 1/2$ )을 대수적 연결도  $\lambda_2(L)$ 에 대해 유도하였다. 이러한 결과는 등가 프로토콜 (4')에 대해 쉽게 확장 가능하다(참조 1). 또한, LQ-역최적 프로토콜을 응용한 이동로봇들의 군집제어 알고리즘을 제안하고, 모의 실험을 통해 그 성능을 검증하였다. 본 논문에서 제시된 안정도 조건 및 LQ-역최적 조건은 그래프 인접행렬 계수 및 토폴로지에 따라 변화하며(참조 1), 따라서 안정도/LQ-역최적 조건과 연관된 인접행렬 최적화 기법 연구 및 일반화된 그래프 토폴로지에 대한 프로토콜 분석/확장 등의 연구가 추후 요구된다.

**REFERENCES**

- [1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," In: *Proceedings of IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007.
- [2] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control," *IEEE Control Systems Magazine.*, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, 2007.
- [3] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, 2004.
- [4] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and L. Xie, "Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols," *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 1986-1995, 2013.
- [5] S. J. Yoo, "Distributed consensus tracking for multiple uncertain nonlinear strict-feedback systems under a directed graph," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 24, no. 4, pp. 666-672, 2013.
- [6] H. Kim, H. Shim, and J. H. Seo, "Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 1, pp. 200-206, 2009.

- [7] P. Lin, Y. Lia, and L. Li, "Distributed robust  $H_\infty$  consensus control in directed networks of agents with time-delay," *Systems & Control Letters*, vol. 57, no. 7, pp. 643-653, 2008.
- [8] F. Borelli and T. Keviczky, "Distributed LQR design for identically dynamically decoupled systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 8, pp. 1901-1912, 2008.
- [9] Y. Cao and W. Ren, "Optimal linear-consensus algorithms: an LQR perspective," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics -Part B. Cybernetics*, vol. 40, no. 3, pp. 819-830, 2010.
- [10] H. Zhang, F. L. Lewis, and A. Das, "Optimal design for synchronization of cooperative systems: state feedback, observer, and output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 8, 2011.
- [11] W. Dong, "Distributed optimal control of multiple systems," *International Journal of Control*, vol. 83, no. 10, pp. 2067-2079, 2010.
- [12] E. S.-Kazerooni and K. Khorasani, "Multi-agent team cooperation: a game theory approach," *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2205-2213, 2009.
- [13] Z. Qu, M. Simaan, and J. Doug, "Inverse optimality of cooperative control for networked systems," In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control Jointly with 28th Chinese Control Conference, Shanghai, Chana*, pp. 1651-1658, 2009.
- [14] K. H. Movric and F. L. Lewis, "Cooperative optimal control for multi-agent systems on directed graph topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 3, pp. 769-774, 2014
- [15] H. Kim, H. Shim, J. H. Seo, and J. Back, "Formation control algorithm for coupled unicycle-type mobile robots through switching interconnection topology," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 5, pp. 439-444, 2012.
- [16] W. Dong, "Flocking of multiple mobile robots based on backstepping," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics -Part B: Cybernetics*, vol. 41, no. 2, pp. 414-424, 2011.
- [17] E. S.-Kazerooni and K. Khorasani, "Optimal consensus algorithms for cooperative team of agents subject to partial information," *Automatica*, vol. 44, no. 11, pp. 2767-2777, 2008.
- [18] B. S. Park, *Adaptive Formation Control for Non-holonomic Mobile Robots Including Actuator Dynamics*, Ph.D. thesis, Yonsei University, Department of Electric and Electronics, South Korea, 2011.
- [19] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [20] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [21] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall Upper Saddle River, 2002.



이재영

2006년 광운대학교 정보제어공학과(공학사). 2007년~현재 연세대학교 전기전자공학과 박사과정. 관심분야는 적응형 최적제어, 강화학습, 군사 동적 계획법, 비선형 제어, 다개체 시스템, 로봇 제어, 무인 자동차 및 전력 시스템 응용.



최윤호

1980년 연세대학교 전기공학과(공학사). 1982년 연세대학교 전기공학과(공학석사). 1991년 연세대학교 전기공학과(공학박사). 1993년~현재 경기대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 비선형 적응 제어, 지능 제어, 다개체 군집 제어, 로봇틱스, 웨이블릿 변환 및 응용, ADP 기반 최적 제어.