

# 볼-빔 시스템에서 AC와 DC 노이즈가 포함된 상태 궤환 제어기 설계 및 분석

## Design and Analysis of a State Feedback Controller for a Ball and Beam System under AC and DC Noise

오 상 영, 최 호 림\*  
(Sang-Young Oh<sup>1</sup> and Ho-Lim Choi<sup>1,\*</sup>)

<sup>1</sup>Department of Electrical Engineering, Dong-A University

**Abstract:** In this paper, we propose a controller for a ball and beam system which reduces the measurement error effect under AC and DC noise. The ball and beam system measures data through a sensor. If sensor noise is included in a controller via the feedback channel, the signal is distorted and the entire system cannot work normally. Therefore, some appropriate action for the measurement error effect is essential in the controller design. Our controller is equipped with a gain-scaling factor and a compensator to reduce the effect of measurement error in the feedback signal. Effectively, our proposed controller can reduce the AC and DC noise of a feedback sensor. We analyze the proposed controller by Laplace transform technique and illustrate the improved control performance via an experiment for a ball and beam system.

**Keywords:** ball and beam system, input-output feedback linearization, measurement error, gain-scaling factor, compensator

### I. 서론

볼-빔(ball and beam) 시스템은 모터와 빔이 연결되어 모터의 제어를 통해 볼의 위치를 제어하는 시스템이다. 로봇, 선박 및 비행체의 자세 제어 등에 기본이 되는 볼-빔 시스템은 비선형적인 요소를 포함하고 있기 때문에 불안정한 시스템의 안정화에 다양하게 응용이 가능하다[7]. 볼-빔 시스템은 센서를 통해 데이터들을 측정하고 시스템이 동작하게 되는데 센서 잡음이 포함되면 궤환(feedback) 신호를 왜곡시키고 이로 인하여 볼-빔 시스템이 정상적으로 작동할 수 없게 만든다[5]. 따라서 이러한 측정 노이즈에 대한 영향을 최소화 하기 위해 센서 잡음이 포함된 데이터들을 분석 처리하는 적절한 조치가 필수적이다[2,3,8]. 기존의 논문 [4,9]에서는 볼-빔 시스템에서 저역 통과 필터를 추가하여 AC 측정 노이즈를 최소화 시켰다. 하지만 우리의 경우는 AC 측정 노이즈 뿐만 아니라 DC 측정 노이즈가 함께 포함된 볼-빔 시스템을 다루었다. 이와 관련된 연구는 [6]에서 AC와 DC 측정 노이즈가 포함된 상태 변수에 이득조절 요소(gain-scaling)와 보상기(compensator)를 적용한 상태 궤환 제어기로 측정 노이즈를 최소화 시켰다. 또한 스윙칭 제어 기법을 혼용하여 제어기의 수렴속도를 개선하였다.

본 논문에서는 볼-빔 시스템의 위치 센서에 AC와 DC 측정 노이즈가 발생함을 가정한다. 볼-빔 시스템에 입-출력 궤환 선형화(input-output feedback linearization) 기법을 통하여 시스템의 비선형적인 요소를 선형화 시킨 후 이득조절 요소와 보상기를 적용한 제어기를 설계한다. 그리고 위치센서에 잡음이

포함되어 임의의 AC와 DC 측정 노이즈가 발생함을 가정하였다. AC 측정 노이즈는 미지의 정현파 함수로, DC 측정 노이즈는 알 수 없는 상수 값으로 나타남을 가정하고 볼-빔 시스템에 제안된 제어기를 적용하였다. 또한 추가적으로 스윙칭 제어 기법을 적용하여 수렴속도를 개선하였다[10]. 따라서 이득조절 요소와 보상기가 추가된 상태 궤환 제어기는 출력인 볼의 위치의 최종 수렴범위(ultimate bound)를 최소화 하였다. 제안된 제어기가 인가된 볼-빔 시스템을 라플라스 변환 기법으로 분석을 하였고 실제 볼-빔 시스템에 적용하여 제어기의 성능을 실험을 통해 검증하였다.

### II. 볼-빔 시스템의 입-출력 궤환 선형화

그림 1은 실험에 사용된 QUANSER사의 BB011(ball-beam)과 SRV02(DC Servo motor)로 제어입력인 SRV02의 입력전압을 조절하여 모터의 각을 변화시키고 다시 모터의 각은 빔의 각을 변화시킴으로써 볼의 위치를 제어하는 시스템이다.

볼-빔 시스템의 동역학 방정식은 다음과 같다[7,11].

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= K_{bb} \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{1}{\tau} \dot{\theta} + \frac{K}{\tau} u \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $r$  은 볼의 위치,  $\theta$  는 SRV02의 부하 각,  $K_{bb}$  는 BB01의 모델 이득,  $K$  는 SRV02의 정상상태 이득,  $\tau$  는 SRV02의 시정수,  $u$  는 SRV02의 입력 전압이다. 식 (1)을 상태 방정식으로 나타내기 위하여 식 (2)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} r &= x_1 (\text{볼의 위치}) \\ \dot{r} &= x_2 (\text{볼의 속도}) \\ \theta &= x_3 (\text{SRV02의 부하 각}) \\ \dot{\theta} &= x_4 (\text{SRV02의 부하 각속도}) \end{aligned} \quad (2)$$

\* Corresponding Author

Manuscript received January 2, 2014 / revised March 14, 2014 / accepted March 26, 2014

오상영, 최호림: 동아대학교 전기공학과  
(rkdeh99@hanmail.net/hlchoi@dau.ac.kr)

\* 본 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

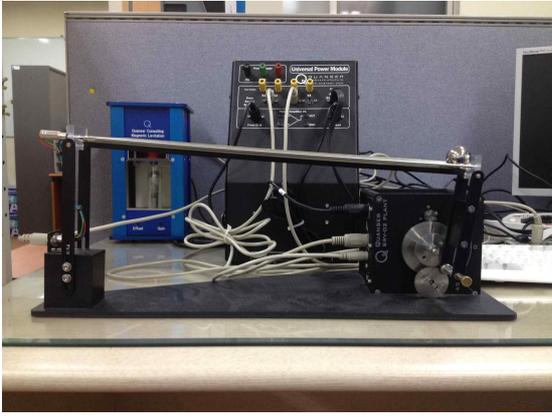


그림 1. 볼-빔 시스템.

Fig. 1. Ball-beam system.

동역학 방정식 (1)에서 식 (2)를 적용하여 상태 방정식으로 나타내면 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_{bb} \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{\tau} x_4 + \frac{K}{\tau} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

볼-빔 시스템의 상태방정식 (3)을 입-출력 변환 선형화 기법을 적용해 선형화된 형태로 나타내면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 (= x_2) \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 (= K_{bb} \sin x_3) \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 (= K_{bb} \cos x_3 x_4) \\ \dot{\xi}_4 &= v (= k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 + k_4 \xi_4) \\ v &= -x_4^2 K_{bb} \sin x_3 - \frac{1}{\tau} x_4 K_{bb} \cos x_3 + \frac{1}{\tau} K_{bb} K \cos x_3 u \\ y &= \xi_1 (= x_1) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $v(x, u) = \beta(x) + \alpha(x)u$  로 선정하면  $\alpha(x), \beta(x)$  는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{\tau} K_{bb} K \cos x_3 \\ \beta(x) &= -x_4^2 K_{bb} \sin x_3 - \frac{1}{\tau} x_4 K_{bb} \cos x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

따라서 식 (4)를 행렬로 나타내면 다음과 같이 선형화된 형태로 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

### III. 시스템의 문제의 정의

입-출력 변환 선형화된 볼-빔 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= v \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad (8)$$

$$y = C\xi \quad (9)$$

여기서  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^T \in R^4$  은 상태,  $v \in R$  는 입력,  $y \in R$  는 출력,  $A = [a_{ij}] \in R^{4 \times 4}$  ( $j = i + 1$  일 때  $a_{ij} = 1$ , 그 외의 경우는  $a_{ij} = 0$ ),  $B = [0, 0, 0, 1]^T \in R^{4 \times 1}$ ,  $C = [1, 0, 0, 0] \in R^{1 \times 4}$  이다. 이 시스템에서 상태 변환 제어기는 다음과 같다[1].

$$v = K\xi \quad (10)$$

$K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$  으로 정의한다. 식 (8)로부터 식 (10)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 폐루프 시스템(closed-loop system)으로 표현할 수 있다.

$$\dot{\xi} = (A + BK)\xi \quad (11)$$

여기서  $A + BK$  가 Hurwitz이기 위한  $K$  의 값을 선택하면  $\xi \rightarrow 0$  이 되어 전체 폐루프 시스템은 안정하게 된다. 하지만 볼-빔 시스템에서 위치센서의 오작동으로 측정 노이즈가 포함되는 것을 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\xi}_1 = \xi_1 + d_1(t) \quad (12)$$

$\bar{\xi}_1$  는 위치센서에 측정 노이즈가 포함된 상태변수이고  $d_1(t)$  는 측정 노이즈이다. 측정 노이즈가 포함된 폐루프 시스템으로 표현하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + BK\bar{\xi} \\ &= A\xi + BK(\xi + d(t)) \\ &= (A + BK)\xi + BKd(t) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서  $d(t) = [d_1(t), 0, 0, 0]^T$  의 영향으로  $\xi$  의 모든 성분의 최종 수렴범위가 커지게 된다. 그리고 이득  $K$  값과 연동되어 AC와 DC 측정 노이즈가 포함된 상태 변환 제어기는 측정 노이즈의 영향을 제어하는데 어려움이 있음을 알 수가 있다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위하여 IV 장에서 이득조정 요소와 보상기가 추가된 제어기를 제안한다. 그리고 이득조정 요소로 늦어지는 수렴속도를 개선하기 위해 V 장에서 스위칭 제어 기법을 통해 수렴속도를 줄이는 방법을 제시하고 VI 장에서 제안된 제어기가 인가된 볼-빔 시스템의 실험을 통하여 유효성을 검증한다.

**Assumption 1:** 볼-빔 시스템에서 위치센서의 오작동으로 상태변수  $\xi_1$  에 포함되는 측정 노이즈를 다음과 같은 AC와 DC 성분으로 나타남을 가정한다.

$$d_1(t) = d_1 + \alpha_1 \sin \omega_1 t \quad (14)$$

여기서  $d_1 \geq 0$  는 DC 측정 노이즈의 크기,  $\alpha_1 \geq 0$  는 AC 측정 노이즈의 크기,  $\omega_1 \geq 1$  는 AC 측정 노이즈의 주파수이다. 그리고  $d_1, \alpha_1, \omega_1$  는 알 수 없는 임의의 값으로 가정한다.

**Remark 1:** 볼-빔 시스템에서  $\xi_i (= x_i)$  는 위치를 나타내는 상태변수이다. 위치센서를 통해 얻어진 데이터로 입력전압을 조절하여 모터의 각을 변화시키고 다시 모터의 각은 빔의 각을 변화시킴으로써 볼의 위치를 제어 하게된다. 하지만 위치센서에 측정 노이즈가 포함되면 폐환 신호를 왜곡시켜 시스템이 정상적으로 작동할 수 없게 만든다. 각도센서는 측정 노이즈가 포함되어 있어도 그 영향은 무시할만큼 미미하지만 위치센서에 측정 노이즈가 포함된다면 노이즈의 영향이 크게 나타나 시스템을 제어하기가 쉽지 않다. 따라서 위치센서에 측정 노이즈의 영향을 제어하고 제어기의 효과를 검증하기 위해  $\xi_1$  에 측정 노이즈가 포함되었음을 가정하였다.

**Remark 2:** 일반적으로 AC 측정 노이즈는 정현파 함수에 대한 사례를 주로 가지고 있다[2,8]. AC 측정 노이즈는 미지의 정현파 함수로, DC 측정 노이즈는 임의의 상수 값으로 나타남을 가정하였다. 기존의 논문 [2,8] 에서는 알고 있는 외부 시스템으로부터 발생하는 정현파 AC 측정 노이즈를 가정하여 에러의 크기와 주파수를 알 수 있음을 가정한 반면, 우리의 경우는 미지의  $\alpha_1, \omega_1$  를 가정하고 추가적으로 DC 측정 노이즈로 인해 발생하는 알 수 없는  $d_1$  를 더하여 노이즈에 대한 조건을 더 일반화시켰다.

#### IV. 위치센서에 AC와 DC 측정 노이즈가 포함된 볼-빔 시스템 제어 및 분석

##### 1. 이득조절 요소가 추가된 볼-빔 시스템

선형화된 볼-빔 시스템에서 위치센서의 오작동으로  $y = \xi_1 = x_1$  에 포함된 센서잡음을 제어하기 위해 이득조절 요소가 추가된 제어기를 식 (15)와 같이 제안한다.

$$v = \frac{k_1}{\gamma^4} (\xi_1 + d_1 + \alpha_1 \sin \omega_1 t) + \frac{k_2}{\gamma^3} \xi_2 + \frac{k_3}{\gamma^2} \xi_3 + \frac{k_4}{\gamma} \xi_4 \quad (15)$$

제안된 제어기를 적용하여 페루프 시스템으로 표현하면 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= \frac{k_1}{\gamma^4} (\xi_1 + d_1 + \alpha_1 \sin \omega_1 t) + \frac{k_2}{\gamma^3} \xi_2 + \frac{k_3}{\gamma^2} \xi_3 + \frac{k_4}{\gamma} \xi_4 \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \quad (16)$$

응답을 확인하기 위해 라플라스 변환을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s\Xi_1(s) - \xi_1(0) &= \Xi_2(s) \\ s\Xi_2(s) - \xi_2(0) &= \Xi_3(s) \\ s\Xi_3(s) - \xi_3(0) &= \Xi_4(s) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} s\Xi_4(s) - \xi_4(0) &= \frac{k_1}{\gamma^4} \left( \Xi_1(s) + \frac{d_1}{s} + \frac{\alpha_1 \omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \right) \\ &+ \frac{k_2}{\gamma^3} \Xi_2(s) + \frac{k_3}{\gamma^2} \Xi_3(s) + \frac{k_4}{\gamma} \Xi_4(s) \end{aligned}$$

여기서  $k_1 < 0, k_2 < 0, k_3 < 0, k_4 < 0, \gamma > 0$  일 때, 극점의 음수 항은 최종치 정리(final value theorem)를 통해 0으로 수렴하고 최종치 정리를 할 수 없는 아래의 항이 남게 된다.

$$\begin{aligned} \Xi_1(s) &= \frac{k_1 d_1}{s(\gamma^4 s^4 - k_4 \gamma^3 s^3 - k_3 \gamma^2 s^2 - k_2 \gamma s - k_1)} \\ &+ \frac{k_1 \alpha_1 \omega_1}{(s^2 + \omega_1^2)(\gamma^4 s^4 - k_4 \gamma^3 s^3 - k_3 \gamma^2 s^2 - k_2 \gamma s - k_1)} \end{aligned} \quad (18)$$

출력을 확인하기 위해 계산하면,

$$\Xi_1(s) = -\frac{d_1}{s} + \frac{Ps + Q}{s^2 + \omega_1^2} \quad (19)$$

$$x_1(t) = -d_1 + P \cos \omega_1 t + \frac{Q}{\omega_1} \sin \omega_1 t \quad (20)$$

$$y(t) = -d_1 + \sqrt{P^2 + \left(\frac{Q}{\omega_1}\right)^2} \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (21)$$

여기서  $P, Q$  는 아래와 같은 식으로 표현할 수 있다[6].

$$P = \frac{k_1 \alpha_1 \omega_1 b}{a^2 + \omega_1^2 b^2}, \quad Q = -\frac{k_1 \alpha_1 \omega_1 a}{a^2 + \omega_1^2 b^2} \quad (22)$$

그리고  $P, Q$  에서 표현된  $a, b$  는 다음과 같은 식으로 각각 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} a &= -\omega_1^4 \gamma^4 - \omega_1^2 k_3 \gamma^2 + k_1 \\ b &= -\omega_1^2 k_4 \gamma^3 + k_2 \gamma \end{aligned} \quad (23)$$

따라서 위치센서에 AC와 DC 측정 노이즈가 포함된 볼-빔 시스템에서 이득조절 요소가 추가된 제어기의 최종 출력 식은 아래와 같다.

$$y(t) = -d_1 + \sqrt{P^2 + \left(\frac{Q}{\omega_1}\right)^2} \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (24)$$

$$= -d_1 + \frac{k_1 \alpha_1}{\sqrt{a^2 + \omega_1^2 b^2}} \sin(\omega_1 t + \theta)$$

$$y(t) \leq -d_1 + \frac{k_1 \alpha_1}{\gamma^2 \Delta} \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (25)$$

$\Delta$  는 최종 수렴범위의 크기에 영향을 끼치는  $\gamma$  를 제외한  $\omega, k$  의 상수 계수이다. 식 (25)에서 이득조절 요소인  $\gamma$  값이 클수록 0에 가까운 출력이 나오게 되어 최종 수렴범위의 크기를 줄일 수 있지만 DC 측정 노이즈의 영향으로  $-d_1$  만큼의 오차가 발생한다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 이득 조절 요소와 보상기가 함께 추가된 제어기를 적용한다.

##### 2. 이득조절 요소와 보상기가 추가된 볼-빔 시스템

AC와 DC 측정 노이즈를 감소시키기 위해 선형화된 볼-빔 시스템에서 이득조절 요소와 보상기  $\left( \frac{1}{\beta} (\delta(t) - \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}) \right)$  가

추가된 제어기를 식 (26)과 같이 제안한다.

$$v = \frac{k_1}{\gamma^4} (\xi_1 + d_1 + \alpha_1 \sin \omega_1 t) * \frac{1}{\beta} \left( \delta(t) - \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} \right) + \frac{k_2}{\gamma^3} \xi_2 + \frac{k_3}{\gamma^2} \xi_3 + \frac{k_4}{\gamma} \xi_4 \quad (26)$$

여기서 \* 는 컨벌루션 심볼, 보상기 상수  $\beta \geq 1$  이다. 제안된 제어기를 적용하여 페루프 시스템으로 표현하면 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= \frac{k_1}{\gamma^4} (\xi_1 + d_1 + \alpha_1 \sin \omega_1 t) * \frac{1}{\beta} \left( \delta(t) - \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} \right) + \frac{k_2}{\gamma^3} \xi_2 + \frac{k_3}{\gamma^2} \xi_3 + \frac{k_4}{\gamma} \xi_4 \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \quad (27)$$

응답을 확인하기 위해 라플라스 변환을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s \Xi_1(s) - \xi_1(0) &= \Xi_2(s) \\ s \Xi_2(s) - \xi_2(0) &= \Xi_3(s) \\ s \Xi_3(s) - \xi_3(0) &= \Xi_4(s) \\ s \Xi_4(s) - \xi_4(0) &= \frac{k_1}{\gamma^4} \left( \Xi_1(s) + \frac{d_1}{s} + \frac{\alpha_1 \omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \right) \left( \frac{s}{\beta s + 1} \right) + \frac{k_2}{\gamma^3} \Xi_2(s) + \frac{k_3}{\gamma^2} \Xi_3(s) + \frac{k_4}{\gamma} \Xi_4(s) \end{aligned} \quad (28)$$

여기서  $k_1 < 0, k_2 < 0, k_3 < 0, k_4 < 0, \gamma > 0, \beta > 0$  일 때, 극점의 음수 항은 최종치 정리(final value theorem)를 통해 0으로 수렴하고 최종치 정리를 할 수 없는 아래의 항이 남게 된다.

$$\Xi_1(s) = \frac{k_1 \alpha_1 \omega_1}{(s^2 + \omega_1^2)(\beta \gamma^4 s^4 + (\gamma^4 - k_4 \beta \gamma^3) s^3 - (k_4 \gamma^3 + k_3 \beta \gamma^2) s^2 - (k_3 \gamma^2 + k_2 \beta \gamma) s - (k_2 \gamma + k_1))} \quad (29)$$

출력을 확인하기 위해 계산하면  $\gamma$  와  $\beta$  에 관하여 두가지 식으로 표현할 수 있다.

$$y(t) \leq \frac{k_1 \alpha_1 \omega_1}{\gamma^{0.4} \nabla} \sin(\omega_1 t + \theta), \quad y(t) \leq \frac{k_1 \alpha_1 \omega_1}{\beta^{0.2} \Lambda} \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (30)$$

$\nabla$  는  $\gamma$  를 뽑아낸 나머지  $\omega, k, \beta$  의 상수 계수이고  $\Lambda$  는  $\beta$  를 뽑아낸 나머지  $\omega, k, \gamma$  의 상수 계수이다. 식 (30)에서 이득조절 요소인  $\gamma$  값과 보상기 상수인  $\beta$  값이 클수록 0에 가까운 출력이 나오게 되어 최종 수렴범위의 크기를 줄일 수 있다.

**Remark 3:** 참고논문 [4,9]에서는 낮은 차단 주파수를 갖는 저역 통과필터를 추가함으로써 AC 측정 노이즈의 영향을 감소 시켰지만 우리의 제안된 제어기는 이득조절 요소와 보상기를 추가 하여 AC 측정 노이즈 뿐만 아니라 DC 측정 노이즈도 효과적으로 줄이고 있다.

**V. 스위칭 제어 기법**

이득조절 요소가 추가된 볼-빔 시스템의 상태 궤환 제어기에서 최종 수렴범위의 크기와 수렴속도를 결정하는 라플라스 식은 아래와 같다.

$$\Xi_1(s) = \frac{k_1 d_1}{s \underbrace{(\gamma^4 s^4 - k_4 \gamma^3 s^3 - k_3 \gamma^2 s^2 - k_2 \gamma s - k_1)}_{\otimes \otimes}} + \frac{k_1 \alpha_1 \omega_1}{\underbrace{(s^2 + \omega_1^2)}_{\otimes} \underbrace{(\gamma^4 s^4 - k_4 \gamma^3 s^3 - k_3 \gamma^2 s^2 - k_2 \gamma s - k_1)}_{\otimes \otimes}} \quad (31)$$

$\otimes$  은 최종 수렴범위를 결정하고  $\otimes \otimes$  는 수렴속도를 결정한다. 수렴속도와 관련된 식을 인수분해 하여 정리하면 식 (32)와 같다.

$$\begin{aligned} \otimes \otimes &= (\gamma s + \sigma_1)(\gamma s + \sigma_2)(\gamma s + \sigma_3)(\gamma s + \sigma_4) \\ k_1 &= -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \\ k_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) \\ k_3 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_4 + \sigma_3 \sigma_4) \\ k_4 &= -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \end{aligned} \quad (32)$$

이득조절 요소가 추가된 제어기의 수렴속도에 관한 최종 출력 식은 식 (34)와 같다.

$$y(t) = N_1 e^{-\frac{\sigma_1 t}{\gamma}} + N_2 e^{-\frac{\sigma_2 t}{\gamma}} + N_3 e^{-\frac{\sigma_3 t}{\gamma}} + N_4 e^{-\frac{\sigma_4 t}{\gamma}} \quad (34)$$

식 (34)에서  $N = [N_1, N_2, N_3, N_4]$  은 출력 식을 계산했을 때 각각의 상수 계수이다. 수렴속도에 관한 출력 식 (34)에서  $\gamma$  값이 커질수록 지수의 전체 크기는 작아져 수렴속도가 늦어진다. 결론적으로  $\gamma$  값이 커지면 최종 수렴범위는 감소하지만 수렴속도는 늦어진다. 이러한 문제점을 스위칭 제어 기법을 통해 최종 수렴범위를 감소시키고 늦어지는 수렴속도를 줄이는 방법을 제시한다. 최종 수렴범위의 크기는 과도상태(Transient State)보다 정상상태(Steady State)에서 중요한 부분이다. 과도상태 ( $t_0 \leq t < t_s$ (time of switching)) 에서는 상대적으로 작은  $\gamma_1$  값으로 수렴속도를 줄이고, 정상상태( $t_s \leq t$ ) 에 들어가는 기점에는 상대적으로 큰  $\gamma_2$  값으로 스위칭 제어 함으로써 최종 수렴범위를 줄이는 방법을 적용한다[6].

- 초기조건
  - i)  $\gamma_2 > \gamma_1 \geq 1$
  - ii)  $t_s > t_0 = 0$
- 스위칭 논리식
  - if  $t_0 \leq t < t_s \rightarrow \gamma = \gamma_1$
  - else  $t_s \leq t \rightarrow \gamma = \gamma_2$
- $t_s$  의 디자인 규칙

$t_s$  는  $t_0 < t_s \leq t_p$  사이의 구간이고  $t_0$  는 0초 이다. 그래프 상에서  $\gamma_1$  을 적용하여 시뮬레이션 했을 때 대략 시간적으로 기울기가 0이 되는 시간을 확인 할 수 있다. 그 시간을 근방으로 가장 수렴속도를 개선하는 스위칭 시간을 시뮬레이션을 통해 찾아주어야 한다.

VI. 실험 및 결과

**Case 1:** 제안된 제어기법을 검증하기 위해 볼-빔 시스템에 적용한다. 이득조절 요소가 추가된 제어기로 이득값은  $K = [-840, -638, -179, -22]$ 으로 설정한다. 측정 노이즈의 영향을 실험을 통하여 확인 하기 위해 AC 측정 노이즈는  $\alpha_1 \sin \omega t = 0.03 \sin 2t$ , DC 측정 노이즈는  $d_1 = 0.02$ 로 추가하였다.

그림 2, 3은  $\gamma$  값을 변화시켰을 때 볼의 위치에 대한 실험 결과이다. 그림과 같이  $\gamma$  값을 증가시켰을 때 볼의 위치의 최종 수렴범위가 줄어드는 것을 볼 수 있다. 하지만 이득조절 요소가 추가된 제어기는 AC 측정 노이즈를 줄일 수 있지만  $d_1$ 의 영향으로 2cm 만큼의 오차가 생겨 DC 측정 노이즈를 줄이지는 못한다. 또한  $\gamma$  값이 증가 하면서 수렴속도가 늦어 지는 것을 볼 수 있다.

**Case 2:** DC 측정 노이즈의 영향을 해결하고 수렴속도를 줄이기 위해 이득조절 요소와 보상기 그리고 스위칭 제어 기법이 추가된 제어기를 적용한다. 제어기 이득값은  $K = [-840, -638, -179, -22]$ 으로 설정한다. AC 측정 노이즈는  $\alpha_1 \sin \omega t = 0.03 \sin 2t$ , DC 측정 노이즈는  $d_1 = 0.02$ 이다.

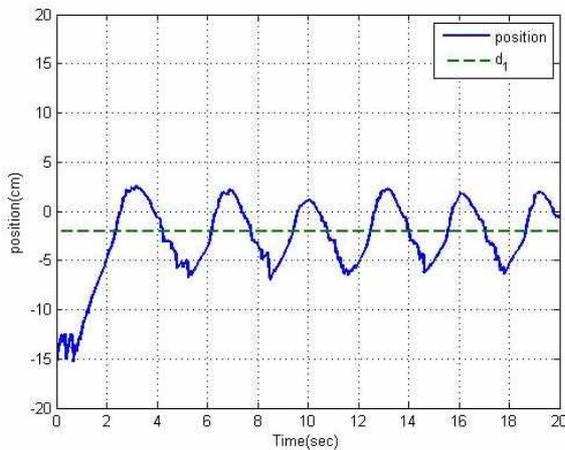


그림 2. AC와 DC 노이즈 포함  $\gamma = 1$ .  
Fig. 2. Including AC and DC noise  $\gamma = 1$ .

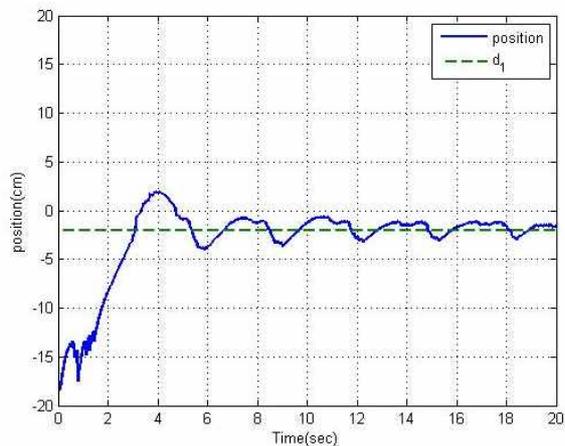


그림 3. AC와 DC 노이즈 포함  $\gamma = 1.5$ .  
Fig. 3. Including AC and DC noise  $\gamma = 1.5$ .

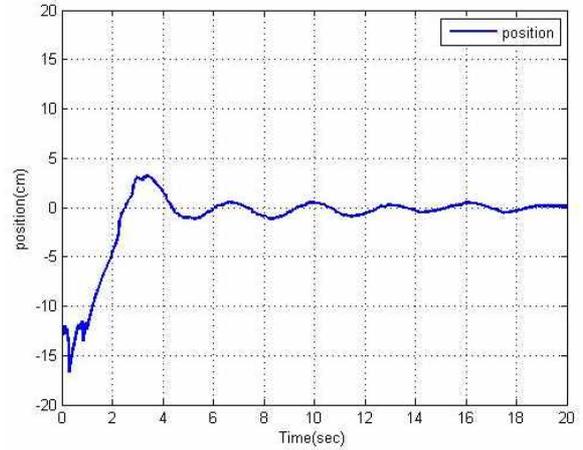


그림 4. 이득조절 요소, 보상기, 스위칭 추가.  
Fig. 4. Including gain-scaling factor, compensator and switching.

그림 4는 이득조절 요소와 보상기 그리고 스위칭 제어 기법이 추가된 실험 결과이다. 스위칭 논리식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\text{if } 0 \leq t < 3(t_s), \gamma_1 = 1 \\ &\text{else } 3(t_s) \leq t, \gamma_2 = 1.2, \beta = 2 \end{aligned}$$

3초 이전에는  $\gamma_1 = 1$ 으로 동작을 하고 3초 이후에는  $\gamma_2 = 1.2, \beta = 2$ 으로 스위칭 되어 동작을 한다. DC 측정 노이즈는 보상기로 인해 값이 사라진다. 따라서 이득조절 요소와 보상기 그리고 스위칭 제어기법이 추가된 제어기는 효과적으로 AC 측정 노이즈와 DC 측정 노이즈를 줄일 수 있다. 또한  $\gamma$  값이 증가하여도 스위칭 제어 기법으로 인하여 수렴 속도를 줄이고 있다.

**Remark 4:** 실험에 사용된 QUANSER사의 BB011(ball-beam)은  $0^\circ$ 를 기준으로  $\pm 45^\circ$ 로 움직일 수 있고 SRV02(DC Servo motor)의 입력은  $\pm 15V, 3A$  peak 이다. SRV02의 최대입력 주파수, 전류, 모터속도는 각 50.0Hz, 1.0A, 628.3rad/s 이다[7]. 따라서 실험에서 추가한 측정 노이즈를 볼-빔 시스템의 사양에 맞추어 허용치를 넘지않게  $d_1 = 0.02, \alpha_1 \sin \omega t = 0.03 \sin 2t$ 로 잡아주었다.

VII. 결론

본 논문에서는 위치센서의 오작동으로 상태변수  $\xi_1$ 에 미지의 정현파 형태의 AC 측정 노이즈와 알 수 없는 DC 측정 노이즈가 볼-빔 시스템에 포함되었음을 가정하였다. 이러한 측정 노이즈에 대한 문제를 해결하기 위해 볼-빔 시스템에 입-출력 제환 선형화 기법을 적용하여 비선형적인 요소를 선형화 시키고 우리의 제안된 제어기를 적용하였다. 위치센서에 포함된 측정 노이즈의 영향을 최소화 시키기 위해 이득조절 요소와 보상기를 추가하여 제어기를 설계하였다. 이득조절 요소인  $\gamma$  값과 보상기 상수인  $\beta$ 를 증가 시킴으로써 효과적으로 AC 측정 노이즈를 줄일 수 있었고, 보상기로 인해 DC 측정 노이즈를 제거할 수 있었다. 또한 스위칭 제어 기법을 활용하여 볼-빔 시스템의 출력인 위치의 수렴속도를 감소시킬 수 있었다. 측정 노이즈의 영향으로 발생하는 최종 수렴

범위의 크기와 이득조절 요소 그리고 보상기의 관계를 리플라스 변환 기법을 통하여 해석하였고, 실험을 통해 제어기의 유효성을 검증하였다.

#### REFERENCES

- [1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press Inc., 1999.
- [2] Z. Chen, "A remark on sensor disturbance rejection of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 9, pp. 2206-2210, 2009.
- [3] S. Gayaka and B. Yao, "Global stabilization of a chain of integrators with input saturation and disturbances," *American control conference, O'Farrell Street, San Francisco, CA, USA*, Jun. 29-July 01, 2011.
- [4] H.-D. Kim and H.-L. Choi, "An output feedback controller for a ball and beam system under measurement noise of feedback sensor," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 10, pp. 955-959, 2011.
- [5] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall Inc., 2002.
- [6] S.-Y. Oh and H.-L. Choi, "Design and analysis of a switching state feedback controller to reduce the measurement error effect for a chain of integrators system under ac and dc noise," *Journal of Institute of Control, Robotics and System*, vol. 20, no. 1, pp. 12-17, Jov. 2014.
- [7] Quanser, "Ball and beam user manuals," 2008.
- [8] A. Serrani, A. Isidori, and L. Marconi, "Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, no. 8, pp. 1178-1194, 2001.
- [9] J.-S. Youn and H.-L. Choi, "Fault-tolerant controller design for ball and beam system," *Korea Automatic Control Conference, BEXCO, Busan*, pp. 416-419, Sep. 02-Sep. 04, 2009.
- [10] D.-H. Yeom and J.-Y. Choi, "Switching control for second order nonlinear systems using singular hyperplanes," *Journal of Control, Automation, and Systems Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 124-135, Feb. 2006.
- [11] W. Yu and F. Ortiz, "Stability analysis of pd regulation for ball and beam system," *IEEE Conference on Control Application*, pp. 517-522, Aug. 28-Aug.-31, 2005.



**오 상 영**

2013년 동아대학교 전기공학과 졸업.  
2013년~현재 동아대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 제어 이론, 비선형 시스템 제어.

#### 최 호 림

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제4호 참조.