Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 40, No. 3, pp. 313-320, June 2014.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2014.40.3.313
© 2014 KIIE
<Original Research Paper>

이중생산속도를 가지는 생산시스템에서 확률적인 수요와 주문취소를 고려한 경제적 재고량 결정

임시영[1] · 허 선[1†] · 박유진[2]

[1]한양대학교 산업경영공학과 / [2]중앙대학교 경영학부

Determination of Economic Inventory Quantity under Probabilistic Demands and Cancellation of Orders in Production System with Two Different Production Speeds

Si Yeong Lim · Sun Hur · You-Jin Park

[1]Department of Industrial and Management Engineering, Hanyang University
[2]School of Business Administration, Chung-Ang University

We consider the problem to find economic inventory quantity of a single commodity under stochastic demands and order cancellation. In contrast to the traditional economic production quantity (EPQ) model, we assume that once the amount of inventory reaches to a predetermined level of quantity then the production is not halted but its production speed decreases until the inventory level drops to zero. We establish two probabilistic models representing the behaviors of both the high-production period and low-production period, respectively, and derive the relationship between the level of inventory and costs of production, cancellation, and holding, from which the quantity of economic inventory is obtained.

Keywords: Inventory Modeling, Stochastic Demands, Order Cancellation, Economic Production Quantity

1. 서 론

Taft(1918)에 의해 제안된 고전적인 경제적 생산량(Economic Production Quantity : EPQ) 모형은 주문과 재고보충에 관련된 많은 현실적인 상황을 제대로 반영하지 못하고 있으므로 이를 수정하고 개선한 많은 경제적 생산량 모형들이 제안되고 있다. Pasandideh and Niaki(2008)는 주문량과 주문도착률이 가변적이며 생산능력에 제한을 두지 않는 EPQ 모형을 제시하였고, Taleizadeh *et al*.(2010)은 생산능력에 제한이 있는 다품목 단일기계 생산시스템에서 총 기대비용을 최소로 하는 최적의 생산량과 허용가능한 품절수준 및 생산기간을 결정하였다. Goyal (1985)은 공급자가 일정한 공급지연을 허용할 때 경제적 생산량을 구하는 수리모형을 제시하였는데, 제품은 외부에서 조달하며 전체 로트 (Lot) 단위로 한꺼번에 주문이 도착한다고 보고 주문보충률이 무한대임을 가정하였다. Chung and Huang(2003)은 주문보충률이 유한한 경우로 확장하였고, Hu and Liu(2010)는 이를 일반화하여 주문보충률이 유한하고 지불지연과 품절을 허용하는 EPQ 모형에서 최적의 보충정책을 유도하였다. 본 연구에서는 기존의 EPQ 모형과는 다르게 재고량이 일정수준에 도달하여도 제품생산을 완전히 중단하지는 않고 생산속도만 변화시킴으로써 생산중단 후 재가동으로 인한 재가동비용을 절감할 수 있는 모형 즉, 생산률이 일정하지 않고 가변적인

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2012R1A2A2A01005219).
† 연락저자 : 허 선 교수, 426-791 경기도 안산시 상록구 한양대학로 55 한양대학교 산업경영공학과, Tel : 031-400-5265, Fax : 031-400-5265, E-mail : hursun@hanyang.ac.kr
2012년 11월 16일 접수; 2013년 2월 19일 1차 수정본 접수; 2013년 5월 6일 2차 수정본 접수; 2013년 12월 30일 3차 수정본 접수; 2014년 2월 20일 게재 확정.

경우를 고려한다.

그리고 실제 생산되는 제품 중에는 불량품이나 유효기간이 지난 제품이 있을 수 있고 또한 기계가동 중단과 재작업 등으로 인해 계획된 생산량을 맞추지 못하는 경우가 발생한다. 불량품이나 불완전 제품 등을 고려한 EPQ 모형은 Kreng and Tan (2011), Chiu *et al*.(2011), Sarkar(2012), 그리고 Yassine *et al*.(2012)에서 볼 수 있다. Jeang(2012)과 Mahata(2012)에서는 유효기간이 있는 제품에 대하여 최적의 보충정책을 구하는 방법을 연구하였고, Jeang(2012)과 Chiu *et al*.(2012)은 재작업 시 기계고장이 있는 경우의 EPQ 모형을 고려하여 최소의 기대비용을 가지는 보충시간을 구하였다. Chiu *et al*.(2012)도 부분적인 재작업이 있고 불완전한 제품을 가지는 EPQ 모형을 연구하였다. 하지만, 본 연구에서는 이전 연구에서 고려한 불량품 또는 불완전한 제품 대신에 주문취소가 발생하는 경우를 고려하였다. 온라인 시장에서의 주문취소가 오프라인 시장보다 빈번하게 발생하고 고객 수요에 대한 즉각적인 대응을 위해 적절한 양의 재고를 유지해야 하며 특히 주문취소를 보다 중요한 관리요소로 고려해야만 한다. 주문취소는 생산자 측면에서 보면 불량품이나 불완전 제품의 생산이 이루어지는 것과 마찬가지로 재고수준에 영향을 주며 과생산(over-production)을 야기하기도 한다. 온라인 시장에서는 주문취소와 동시에 재고가 다시 판매자 또는 생산자에게 되돌아 오는 것이기 때문에 이 같은 모형은 온라인 시장에 참여하는 기업의 재고관리에 적용될 수 있다.

기존 연구에서 확률적인 수요가 있는 경우에 생산률이나 생산기간을 고려하는 EPQ 모형에 대한 연구는 상대적으로 매우 적다. Chang *et al*.(2012)은 가변적인 생산률을 가지는 2단계 조립시스템을 고려하여 각 부품의 조립률과 생산기간을 결정변수로 하는 최소비용 모형을 만들었다. 이 연구에서는 첫 번째 단계에서의 수요도착률에 의해 생산률을 결정하였고 이로써 두 번째 단계에서의 조립률을 결정하였다. Sarkar and Moon (2011)은 상승효과(inflation effect) 하에서 확률적 수요의 EPQ 모형을 다루었다.

다양한 제품을 동시에 생산 또는 판매해야 하는 대부분의 기업들에서 어떤 특정 제품의 생산에 투입되는 시간은 그 제품에 얼마나 많은 장비와 인력을 투입하는가에 따라 달라지며 이는 당연히 재고상황에 따라 결정된다. 즉, 한 제품의 재고량이 일정 수준에 이를 때까지는 많은 생산자원을 투입하였다가 재고량이 충분한 수준에 이르면 그 제품에 투입되었던 생산자원의 일부를 다른 제품의 생산에 투입하는 등 제한된 생산능력을 적절히 분배하는 전략이 필요하다. 결국 제품의 재고수준에 따라 가변적인 생산속도를 가지는 모형을 고려해야 한다. 본 논문에서는 수요의 도착과 주문취소가 확률적으로 발생하고 재고량이 미리 정해진 수준에 도달하면 재고수준이 0으로 떨어질 때까지 생산자원의 재분배를 통해 생산속도를 조절하는 모형을 고려한다. 즉, 높은 생산률의 생산기간과 낮은 생산률의 생산기간을 교대로 운영하는 모형이다.

생산중단이 일어나지 않는다는 점에서 기존 모형과 다르며 재가동비용은 생산속도의 전환비용으로 일반화할 수 있다. 본 연구에서는 두 생산기간을 구하는 확률모형을 수립하고 이를 바탕으로 두 생산기간의 확률분포를 유도한 후, 총 기대비용을 최소로 하는 경제적 재고량을 구하는 함수를 제시한다.

고전적인 EPQ 모형에서는 시간당 수요가 일정하고 시간당 생산량도 일정하다고 가정하므로 최대재고량은 1회 생산량에 의해 자동적으로 정해진다. 하지만 수요의 발생과 주문취소가 모두 확률적인 경우에는 최대재고량에 이를 때까지 생산해야 하는 1회 생산량은 매 사이클마다 달라질 수 있다. 따라서 본 연구에서는 경제적 재고량(economic inventory quantity)를 구하는 것을 목표로 한다.

제 2장에서는 모형을 설명하며 제 3장에서는 모형에 적용하는 가정들과 용어들을 정리하였고 제 4장에서 최대 재고수준 Q가 주어졌을 때 생산기간의 확률분포를 유도하였다. 제 5장에서는 생산속도 전환비용과 재고유지비용을 고려한 총 비용함수를 구하고 제 6장에서는 이해를 돕기 위한 수치예제와 모수들이 총 기대비용에 미치는 영향을 파악하기 위한 실험결과를 제시하였다. 결론과 추후 연구과제는 제 7장에서 제시하였다.

2. 모형

개별제품 주문은 도착률이 일정한 포아송과정을 따라 도착한다. 주문취소도 포아송과정을 따른다고 가정하면, 이미 고객에게 납품된 제품 중에 평균적으로 일정비율로 주문취소가 발생한다고 가정하면 주문취소의 발생과정도 역시 포아송과정이다. 대개의 생산설비들은 여러 종류의 제품을 동시에 생산하고 있으며 각 제품마다 수요량의 변화는 차이가 있기 때문에 수요량이 많은 제품에 우선적으로 생산능력을 집중하여 대응하는 방법을 사용한다. 즉, 전체 생산능력을 다 투입하여 특정 제품을 생산하다가 일단 이 제품의 재고량이 미리 정해진 최고 재고수준(Q)에 이르면 생산능력을 나누어 다른 종류의 제품도 함께 생산한다(이때까지의 기간을 고생산기간이라고 하자). 최고 재고수준에 이른 후에는 생산능력을 나누어 다른 제품생산도 병행하게 되므로 제품의 생산속도는 떨어지고 재고수준도 점차 감소하여 결국 0에 이르게 되는데, 이렇게 제품의 생산속도가 줄어드는 기간을 저생산기간이라고 정의한다. 만약 재고수준이 0에 이르게 되면 다시 생산능력을 늘려 재고를 늘려가게 된다. 고생산기간 중에는 생산능력이 충분히 커서 재고수준은 전반적으로 상승추세에 있게 되지만, 저생산기간 중에는 주문도착에 비해 생산량이 많지 않아 전체적인 재고수준은 하향추세에 있다. <Figure 1>은 본 연구모형에서 고려하는 고생산기간과 저생산기간의 전형적인 재고수준의 변동을 나타낸다.

또한 제품 생산에 의해 재고가 늘어나기도 하지만 주문취소에 의해서도 재고가 증가하기도 한다. 본 연구에서는 고생산

기간 중에 backorder가 생기는 경우는 없다고 가정하는데, 이는 고생산기간 동안에는 제품당 생산시간이 매우 짧기 때문에 생산에 의한 재고량 증가가 수요의 발생회수보다 충분히 크기 때문에 재고가 갑자기 소진되는 경우는 발생할 가능성이 매우 낮다는 점에서 타당한 가정이다. 마찬가지로 저생산기간 중에는 재고수준이 최고재고수준 Q보다 많아지는 경우는 없는 것으로 가정하는데, 이는 저생산기간 중에 생산속도는 현저히 떨어지기 때문이며 또한 재고량이 Q에 근접해 있을 때 주문취소에 의해 돌아오는 제품들로 인해 재고량이 늘더라도 신규수요 발생에 의해 충분히 빠르게 소진되기 때문에 역시 타당한 가정이다. 이에 따라 재고량은 항상 $0 \sim Q$의 범위에만 있다고 가정한다. 따라서 본 연구에서 고려하고 있는 문제를 확률적인 모형으로 나타내면 흡수상태(absorbing state)가 있는 유한상태공간(finite state space)의 마코프과정이라고 할 수 있고, 위와 같은 상황들을 고려하여 재고비용과 생산속도 전환에 따른 비용 등을 포함하는 총 운영비용을 최소로 하는 Q, 즉 최적의 최고재고수준(optimal inventory quantity)을 결정하는 것이 본 연구의 목표이다.

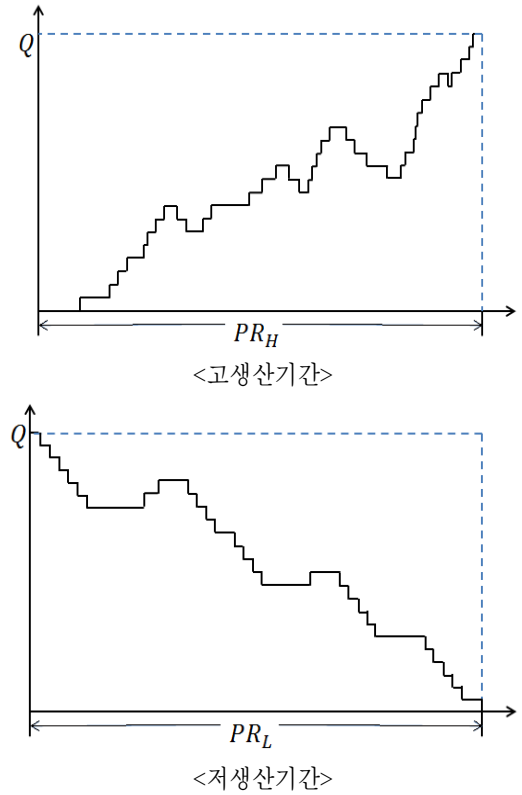

Figure 1. Typical sample paths of inventory level changes

3. 기본가정과 용어

본 연구에서의 기본적인 가정과 기호들은 각각 다음의 <Table 1>과 <Table 2>에 있다.

Table 1. Basic assumptions

번호	가정
1	개별제품 주문은 포아송과정에 의해 도착한다.
2	주문취소는 포아송과정으로 발생하며 그 발생률은 개별제품 주문률보다 작다.
3	Backorder는 발생하지 않는다. 즉, 현재 재고수준보다 많은 양의 주문에 대해서는 항상 현 재고수준 만큼 채운다.
4	제품의 생산시간은 일정하다.
5	생산속도가 전환될 때와 재고를 유지하는 데에는 비용이 발생한다.

Table 2. Notations

기호	의미
η	개별제품 주문의 도착률
I	개별제품 주문의 도착간격의 확률변수
α	기 주문(또는 납품) 제품 대비 취소(또는 반품) 발생비율
μ	반품 또는 취소 발생률, 즉 $\mu \equiv \alpha\eta$
R	반품 또는 취소 발생간격의 확률변수
Q	최대재고량
$T_H,\ T_L$	각각 고생산기간과 저생산기간중 개별제품 생산시간(상수), ($T_H \ll T_L$)
PR_H	고생산기간의 확률변수
PR_L	저생산기간의 확률변수
$N_H(t)$	고생산기간 시작 후 시점 t에서의 재고수준
$N_L(t)$	저생산기간 시작 후 시점 t에서의 재고수준
Cs	생산속도 전환비용
Ch	단위 시간당 단위 개수당 재고비용
$\overline{V_H},\ \overline{V_L}$	고생산기간과 저생산기간중 평균 재고수준

이 밖에 분석에 사용되는 용어들은 필요할 때마다 도입하기로 한다.

4. 생산기간 확률분포의 유도

4.1 고생산기간

$\{N_H(t), t \geq 0\}$은 고생산기간 (PR_H) 중 시점 t에서의 재고수준을 나타내는 확률과정이다. τ_n을 고생산기간이 시작된 후 재고수준이 증가하는 시점 중 n번째 시점이라고 하자. 이 시점은 새로 제품이 생산됨으로 인해 재고가 증가한 시점일 수도 있고 주문취소에 의해 재고가 증가한 시점일 수도 있다. 이 때 τ_n을 내재점(imbedded points)으로 하는 새로운 확률과정 $\{N_H(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$은 이산시간 마코프과정이 된다. 이는 다음과 같은 식이 성립하기 때문이다.

$$N_H(\tau_{n+1}) = N_H(\tau_n) + 1 - D_{H,n} \tag{1}$$

여기서 $D_{H,n}$은 연속한 두 내재점간, 즉 $S_{H,n} \equiv \tau_{n+1} - \tau_n$중 도착하는 총 주문제품수며 $D_{H,n} \le N_H(\tau_n)+1$, $N_H(\tau_n) \ge 0$이다. $D_{H,n}$과 $S_{H,n}$에서 일반시점을 나타내기 위해 특정시점을 나타내는 첨자 n을 생략한 D_H와 S_H를 사용하기로 한다. 연속한 두 주문취소의 발생간격 R은 평균이 $1/\mu$인 지수분포를 따르며 $S_H = \min(T_H, R)$이므로 이의 분포함수 $S_H(\cdot)$와 이의 평균은 각각 다음과 같다.

$$S_H(x) = \begin{cases} 1-e^{-\mu x}, & x < T_H, \\ 1, & x \ge T_H, \end{cases} \tag{2}$$

$$E(S_H) = 1/\mu(1-e^{-\mu T_H}), \tag{3}$$

따라서 S_H 동안 도착하는 총 주문수 D_H의 확률분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_m &= P[D_H = m] = \int_0^\infty P[D_H = m | S_H = x]\, dS_H(x) \qquad (4) \\ &= \int_0^\infty \frac{(\eta x)^m e^{-\eta x}}{m!} dS_H(x) \\ &= \left(\frac{\eta}{\eta+\mu}\right)^m \left(\frac{\mu}{\eta+\mu}\right) \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{e^{-(\eta+\mu)T_H}((\eta+\mu)T_H)^j}{j!} \\ &\quad + \frac{e^{-(\eta+\mu)T_H}(\eta T_H)^m}{m!}. \end{aligned}$$

<Figure 2>는 이 마코프과정의 전이확률다이어그램을 나타내고, 여기서 상태 0, 1, 2, …, Q-1은 일시적상태 (transient states)이고 상태 Q는 흡수상태(absorbing state)이다.

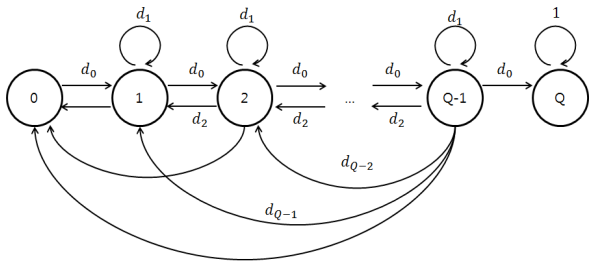

Figure 2. Transition rates diagram of $\{N_H(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$의 전이확률다이어그램

이로써 흡수상태를 가지는 이산시간 마코프과정 $\{N_H(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$의 단계 전이확률행렬 $\mathbf{P}_H$를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathbf{P}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_H & \mathbf{B}_H^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서

$$\mathbf{B}_H = \begin{bmatrix} 1-\sum_{i=0}^{0} d_i & d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\sum_{i=0}^{1} d_i & d_1 & d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\sum_{i=0}^{2} d_i & d_2 & d_1 & d_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1-\sum_{i=0}^{Q-1} d_i & d_{Q-1} & d_{Q-2} & d_{Q-3} & \cdots & d_1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

이며 $\mathbf{B}_H^0 = [0\ 0\ 0 \cdots d_0]^T$이다. $\mathbf{B}_H$는 일시적상태간의 전이를 나타내는 크기 $Q \times Q$의 행렬이며 $\mathbf{B}_H^0$는 일시적상태에서 흡수상태 Q로의 전이를 나타내는 Q차원의 벡터이다. 재고량은 초기에 0으로부터 시작하므로 초기상태벡터 α는 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{Q-1}) = (1, 0, \cdots, 0)$이다. 마코프과정이 상태 0에서 시작하여 흡수될 때까지의 단계수 X_H의 확률분포와 기대값은 다음과 같이 구할 수 있다(Kao, 1997).

$$P(X_H = i) = \boldsymbol{\alpha} \mathrm{B}_H^{i-1} \mathbf{B}_H^0, \ i = Q, Q+1, Q+2, \cdots \tag{7}$$

$$E(X_H) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\mathrm{H})^{-1}\mathbf{e}. \tag{8}$$

각 단계의 길이는 확률변수 S_H이므로 흡수될 때까지의 총 시간은 $S_{H,1} + S_{H,2} + \cdots + S_{H,X_H}$이고 이를 통해 고생산기간의 평균길이는 다음과 같다.

$$E(PR_H) = E(X_H)E(S_H). \tag{9}$$

4.2 저생산기간

저생산기간(PR_L)은 재고수준이 Q에 이르게 되는 순간부터 시작되며 재고가 0이 될 때까지 지속된다. 제품생산속도는 고생산기간에 비해 크게 감소하기 때문에 이 기간 중 재고수준은 감소하는 추세이다. 재고량이 Q인 시점에서도 반품이나 주문취소가 발생할 수 있고 또한 생산도 이루어지므로 재고량이 실제로는 Q 이상으로 높아질 수 있지만 본 연구에서는 분석의 가용성을 위해 이러한 경우는 없는 것으로 가정하였다. 이와 같은 가정의 타당성은 반품/취소율 α가 충분히 작다면 아래와 같이 확인할 수 있다. 이 기간 중 생산시간(T_L)은 매우 길기 때문에 반품/주문취소간격(도착률이 $\mu \equiv \alpha\eta$인 지수분포)에 비해 충분히 크다고 볼 수 있으므로, 근사적으로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\Pr(\min(\text{생산시간, 반품/주문취소간격}) < \text{주문간격} | \text{현재 재고량} \\ &= Q) \fallingdotseq \Pr(\text{반품/주문취소간격} < \text{주문간격}) = \alpha\eta/(\alpha\eta+\eta) \\ &= \alpha/(\alpha+1). \end{aligned}$$

따라서 재고량이 Q에서 Q+1로 상승할 확률 p는 다음과 같다.

$p \equiv$ Pr(현재 재고량 = Q, min(생산시간, 반품/주문취소간격) <주문발생간격) = Pr(min(생산시간, 반품/주문취소간격) < 주문간격|현재 재고량 = Q)×Pr(현재 재고량 = Q)
$\fallingdotseq \alpha/(\alpha+1)\times$Pr(현재 재고량 = Q)

본 논문의 제 6장의 <Figure 6>에 해당하는 수치예제에서의 경우, 한 사이클내에서 현재 재고량이 Q일 확률은 안정상태에서 Q = 5, 10, 15, 20일 때 각각 0.122824, 0.000277, 6.33×10^{-8}, 4.53×10^{-12} 이고 예제에서처럼 $\alpha = 0.1$이라면 이들 숫자에 다시 0.1/(0.1+1) = 0.09를 곱하므로 p값은 매우 작은 값이 될 것이다.

저생산기간의 확률분포를 구하기 위해 고생산기간의 경우와 마찬가지로 S_L과 D_L을 각각 재고수준이 증가하는 연속된 두 시점간의 차이 및 이 기간 중 총 주문량이라고 하자. S_L = min (T_L, R)이므로 이의 분포함수와 기대값, 그리고 S_L동안 도착하는 총 주문수 D_L의 확률분포 δ_m은 각각 식 (2)~식 (4)에서 T_H를 T_L로 대체하면 구할 수 있다.

하지만 저생산기간의 확률분포를 구하기 위해서는 고생산기간에서 경우와는 다른 방법을 사용해야 한다. $\{N_L(t), t \geq 0\}$은 저생산기간에서의 재고량을 나타내는 확률과정이며 $\{N_L(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$은 이산시간 마코프과정이다. 이 마코프과정은 재고량이 증가하는 시점을 내재점(imbedded point)으로 하고 있기 때문에 상태 0이 아닌 상태 1로 흡수되는 과정이다. 따라서 흡수되기 전에 이미 어느 시점에선가 재고량이 0으로 떨어졌을 것이며 이 시점을 찾기 위해서 흡수되기 한 단계 전의 시점을 활용한다. 이 시점을 찾은 후 여기서부터 재고량이 0으로 떨어질 때까지의 시간을 계산한다. 다음 <Figure 3>은 이를 설명하고 있다.

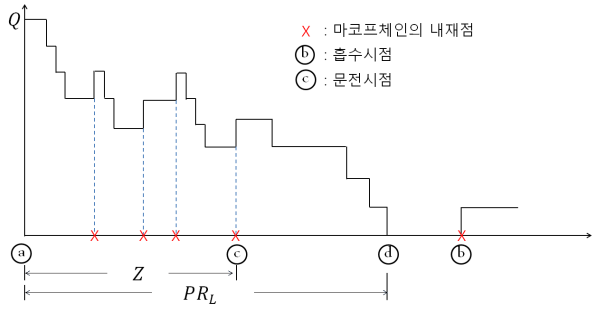

Figure 3. A typical sample path of low production period

저생산기간의 확률분포는 다음과 같은 순서에 의해 유도한다.

(1) 마코프과정이 처음으로 흡수상태 1에 들어갈 때까지의 단계수 Y(<Figure 3>에서 ⓐ에서 출발하여 ⓑ로 갈 때까지 x 표시의 개수)의 확률분포를 구한다.

(2) 단계 $Y-1 \equiv \underline{Y}$에서의 상태, 즉 문전상태(gateway state)는 <Figure 3>에서 내재점 ⓒ에서의 상태이다. 문전상태의 확률분포와, 문전상태까지의 단계수의 확률분포를 구한다.

(3) 문전상태를 조건으로 하여 문전상태 단계에서 재고수준이 0이 될 때까지의 주문량(<Figure 3>에서 ⓒ 와 ⓓ 사이에 재고감소의 회수)을 계산한다.

이하에서는 이 세 단계를 자세하게 설명한다.

(1) 흡수상태 1에 들어갈 때까지의 단계수:

$\{N_L(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$의 전이확률행렬은 다음 그림과 같다.

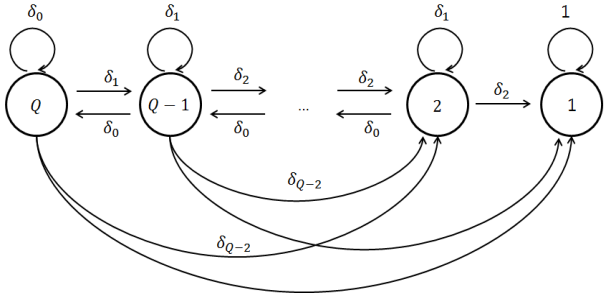

Figure 4. Transition rates diagram of $\{N_L(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$

따라서 흡수상태를 가지는 이산시간 마코프과정 $\{N_L(\tau_n), n = 1, 2, \cdots\}$의 단계 전이확률행렬 $\mathbf{P}_L$를 다음 과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathbf{P}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_L & \mathbf{B}_L^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

여기서 $\mathbf{B}_L$과 $\mathbf{B}_L^0$는 다음과 같다.

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_{Q-2} \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_{Q-2} \\ 0 & \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_{Q-3} \\ 0 & 0 & \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_{Q-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

$$\mathbf{B}_L^0 = \left[\sum_{i=Q-1}^{\infty} \delta_i, \sum_{i=Q-1}^{\infty} \delta_i, \sum_{i=Q-2}^{\infty} \delta_i, \sum_{i=Q-3}^{\infty} \delta_i, \cdots, \sum_{i=2}^{\infty} \delta_i \right]^T \tag{13}$$

여기서 주의할 점은 $\mathbf{B}_L$의 상태배열은 위에서부터 아래로, 왼쪽에서 오른쪽으로 Q, Q-1, ⋯, 2로 배열된 점이다. 상태 1에 흡수될 때까지의 단계수 Y의 확률분포와 평균은 다음과 같다 (Kao, 1997).

$$P(Y=i) = \boldsymbol{\beta}\mathbf{B}_L^{i-1}\mathbf{B}_L^0, \; i = 1, 2, 3, \cdots \tag{14}$$

$$E(Y) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_L)^{-1}\mathbf{e}, \tag{15}$$

단, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_Q, \beta_{Q-1}, \cdots, \beta_2) = (1, 0, \cdots, 0)$이다.

(2) 문전상태까지의 단계수와 문전상태의 확률분포 :

문전상태까지의 단계수 $\underline{Y}$의 기대값은 자명하게 $E(\underline{Y}) = E(Y) - 1$이다. 따라서 $Z = S_{L,1} + S_{L,2} + \cdots + S_{L,\underline{Y}}$임을 활용하면 문전상태까지의 시간 Z의 기대값은 다음과 같다.

$$E(Z) = E(\underline{Y})E(S_L), \tag{16}$$

문전상태는 단계 $\underline{Y}$에서의 상태, 즉 $N_L(\tau_{\underline{Y}})$이다. $\phi_{ij}(i, j = 2, 3, \cdots, Q)$를 상태 i에서 출발하였을 때 문전상태가 j일 확률, 즉 $\phi_{ij} \equiv P(N_L(\tau_{\underline{Y}}) = j | N_L(0) = i)$이라고 하면 다음이 성립한다.

$$\phi_{ij} \equiv P[N_L(\tau_{\underline{Y}}) = j | N_L(0) = i] \tag{17}$$
$$= \begin{cases} \sum_{k=2}^{Q} (\mathbf{B}_L)_{ik}\phi_{kj}, & i \neq j, \\ (\mathbf{B}_L^0)_{i1} + \sum_{k=2}^{Q} (\mathbf{B}_L)_{ik}\phi_{kj}, & i = j. \end{cases},$$

ϕ_{ij}에 관해 위 $(Q\text{-}1)^2$개의 선형방정식을 풀면 $j = 2, 3, \cdots, Q$일 때의 ϕ_{Qj}를 구할 수 있다.

(3) 문전상태를 조건으로 하여 재고량이 0이 될 때까지의 주문회수 :

$I_1+I_2+\cdots+I_j$는 문전상태 j에서 재고가 0이 될 때까지의 시간이며, I_k 는 평균이 $1/\eta$인 지수분포이므로 저생산기간의 기대값은 다음과 같다.

$$E(PR_L) = E(Z) + \frac{1}{\eta}\sum_{j=2}^{Q} j \cdot \phi_{Qj}. \tag{18}$$

5. 최대재고량이 Q일 때의 비용함수

이 장에서는 최대재고량이 Q일 때 고생산기간(PR_H)과 저생산기간 (PR_L) 중 발생하는 모든 비용을 고려한 총 기대비용함수를 유도하고 이를 최소로 하는 경제적 재고량 Q^*를 구한다. 최대재고보유량 Q 값이 크다면 생산속도의 전환은 보다 드물게 발생할 것이며 이에 따라 단위 시간당 전환비용이 감소하겠지만 재고유지비용은 증가할 것이다. 한 사이클당 두 번의 생산속도 전환이 발생하므로 단위 시간당 평균 전환비용은 다음과 같다.

$$E(\text{Transition cost per unit time}) = \frac{2C_s}{E(PR_H) + E(PR_L)}. \tag{19}$$

다음으로 고생산기간중 단위 시간당 재고비용은 다음과 같이 구한다. 상태 0에서 시작하여 상태 Q로 흡수될 때까지 상태 i를 방문한 총 기대회수는 다음 기본행렬(fundamental matrix)의 $(0, i)$번째 항이다.

$$\mathbf{I} + \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_H^2 + \cdots = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_H)^{-1}. \tag{20}$$

또한 마코프과정은 각 상태 i 에 평균적으로 $E(S_H)$의 시간만큼 머물며 확률 $(\mathbf{B}_{\mathrm{H}})_{\mathrm{ij}}$, $j = 0, 1, \cdots, i+1$로 상태 j로 전이하므로, 다음 <Figure 5>에서 보는 바와 같이 두 내재점 간의 기대재고량은 사다리꼴의 면적으로 근사할 수 있으며 이는 $E(S_H) \times (i+j-1)/2$이다.

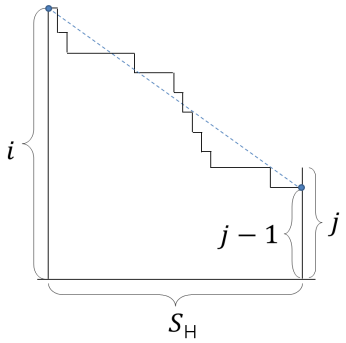

Figure 5. Approximation of the mean inventory level between two consecutive embedded points

<Figure 5>의 사다리꼴의 면적을 모든 i에 대해 합하면 고생산기간 중의 평균 재고량을 구할 수 있고, 고생산기간과 저생산기간 중 평균 재고수준 $\overline{V}_H$와 $\overline{V}_L$은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{V}_H = \sum_{i=0}^{Q-1}\left[\sum_{j=0}^{i+1}\left((\mathbf{I}-\mathbf{B}_H)^{-1}\right)_{0i}\frac{i+j-1}{2}(\mathbf{B}_H)_{ij}\right] \times E(S_H) \tag{21}$$

저생산기간에서도 이와 유사한 방법으로 평균 재고량을 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\overline{V}_L = \tag{22}$$
$$\sum_{i=2}^{Q}\left[\sum_{j=0}^{i+1}\left((\mathbf{I}-\mathbf{B}_L)^{-1}\right)_{Qi}\frac{i+j-1}{2}(\mathbf{B}_L)_{ij} + \frac{\phi_{Qi}i}{2}\right] \times E(S_L)$$

따라서 단위 시간당 총 재고비용은 다음과 같다.

$$E(\text{Total inventory cost per unit time}) = \frac{\overline{V}_H + \overline{V}_L}{E(PR_H) + E(PR_L)} \times C_h. \tag{23}$$

이 평균 재고비용을 식 (19)에서 구한 단위 시간당 평균 전환비용과 합하여 총 기대비용을 계산하고 이를 최소로 하는 Q^*를 구한다.

6. 수치예제

이 재고모형에 포함되는 모수들은 Q, 비용 C_s와 C_h, 주문도

착률(η), 취소반품률(α), 제품생산시간(T_H, T_L) 등이다. 이 장에서는 경제적 재고량 Q^*를 구하는 간단한 수치예제와 함께 Q^*에 영향을 미치는 모수간의 관계를 파악하기 위해 수치실험을 수행하였다.

다음 <Figure 6>은 주문도착률이 $\eta = 1.4$이고 이 가운데 10% 정도는 취소가 되며(즉, $\alpha = 0.1$), 고생산기간중 한 제품의 생산시간은 $T_H = 0.1$이고 저생산기간중 생산시간은 $T_L = 10$, 생산속도의 전환비용(C_s)은 1200, 단위당 시간당 재고비용(C_h)은 1인 경우, 최대재고량 Q를 5에서 20으로 변화시키면서 단위시간당 총 기대비용을 계산하고 그 변화추이를 그림으로 나타낸 것이다.

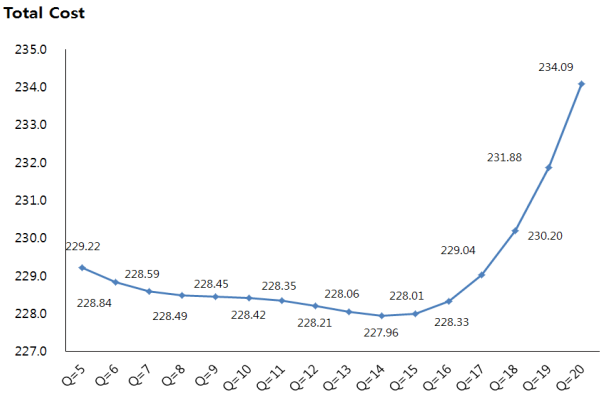

Figure 6. Total expected cost per unit time for various Q

<Figure 6>에서 보면 총 기대비용을 최소로 하는 최적의 경제적 재고량 Q^*는 14이며 이 때 총 기대비용은 227.96으로 나타났다.

한편, 다음 <Figure 7>은 최대재고량 Q는 15로 고정하고 η, α, C_h와 T_H등은 <Figure 6>에서와 동일하며 T_L/T_H를 10~100, C_s/C_h는 100~1000으로 변화시켜 가면서 총 기대비용의 변화를 3차원으로 표시한 것이다.

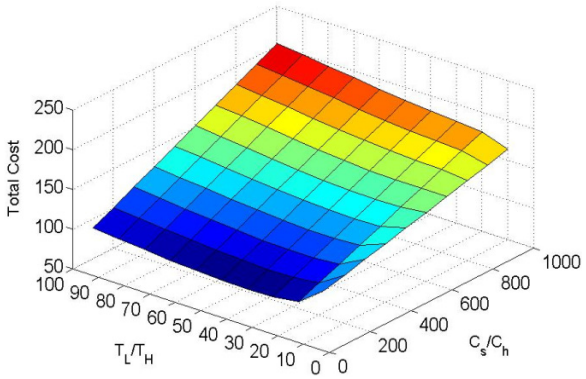

Figure 7. Total expected cost per unit time

그림에서 보는 바와 같이 생산속도 전환비용이 제품 재고비용에 비해 높을수록(즉, C_s/C_h비가 높을수록) 총 기대비용은 증가하는데, 제품생산속도 간의 차이가 커짐(즉, T_L/T_H 비의 비가 커짐)에 따라 그 증가속도가 빨라짐을 알 수 있다. 이는 두 비율들의 상승효과에 의한 것으로 보인다. 그런데 C_s/C_h가 높은 영역에서는 제품생산속도간 비율이 높아짐에 따라 총 기대비용이 단조증가(monotone increasing)하는 반면 C_s/C_h가 낮아지면 그 증가속도는 완만해 지고 단조증가하지 않으며 이에 따라 총 기대비용을 최소로 하는 T_L/T_H 비가 점차 상승하고 있음을 알 수 있다. 즉, 제품재고비용과 생산속도 전환비용 간의 차이가 클 때에는 생산속도의 차이를 적게 두어야 하지만, 제품재고비용과 생산속도 전환비용 간의 차이가 작으면 생산속도의 차이를 적절하게 두어야 하며, 최적의 생산속도 비율은 제시된 수치식에 의해 구할 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 수요와 주문취소가 확률적으로 발생하고 재고량이 경제적 생산량에 도달하여도 생산이 중단되지 않고 제품을 생산하는 속도가 변하는 는 경우에 재고 및 생산에 관련된 비용을 최소화하는 최적 재고수준을 결정하는 문제를 다루었다. 즉 고생산기간과 저생산기간 등 두 개의 생산 속도를 가정하였으며 고생산기간중에는 재고량이 일정수준에 이를 때까지 빠른 생산속도로 생산활동이 이루어지지만 일단 경제적 재고량에 이르게 되면 속도가 크게 감소하는 경우를 고려하여 이에 적합한 확률적 모형을 수립하였다. 따라서 본 연구에서는 위와 같은 상황을 고려하여 확률적 EPQ 모형을 수리적으로 모형화하고 총 기대비용함수를 최소로 하는 경제적 재고량을 구하는 방법을 제시하였다.

본 연구의 수리식이 해석적이거나 닫힌형태(closed form)로 제시되지 않고 오직 수치적으로만 계산이 가능하기 때문에 연구결과의 실제 운용상의 시사점을 얻기 위해서는 이들 모수들의 변화에 따른 상호관계들을 볼 수 있어야 하는데, 이는 많은 모수들의 변화에 따른 효과를 파악하기 위한 다양한 실험을 통해 가능하다. 본 연구의 목적이 모형수립과 분석을 위한 수리식을 제공하는 것이기 때문에 여기서는 모형의 이해에 도움이 될 수 있는 간단한 수치실험만을 포함하였으며 다양한 모수값에서의 실험은 추후 진행할 예정이다. 추후 연구로는 생산기간을 더 세분화하여 여러 개의 단계적 생산속도를 가지는 모형으로 확장하게 되면 변화하는 생산환경에 유연하게 대응할 수 있는 확률적 EPQ 모형이 될 것이다. 이러한 한계를 극복하기 위해 총비용을 최소로 하는 경제적 재고량 Q^*를 구하기 위해 보다 향상된 최적화 알고리즘을 개발하는 것이 필요하다.

참고문헌

Chang, H. J., Su, R. H., Yang, C. T., and Weng, M. W. (2012), An Econo-

mic Manufacturing Quantity Model for a Two-Stage Assembly System with Imperfect Processes and Variable Production Rate, *Computers and Industrial Engineering*, **63**, 285-293.

Chiu, S. W., Chiu, Y. P., and Yang, J. C. (2012), Combining an Alternative Multi-Delivery Policy into Economic Production Lot Size Problem with Partial Rework, *Expert Systems with Applications*, **39**, 2578-2583.

Chiu, S. W., Lin, H. D., Wu, M. F., and Yang, J. C. (2011), Determining Replenishment Lot Size and Shipment Policy for an Extended EPQ Model with Delivery and Quality Assurance Issues, *Scientia Iranica E*, **18**(6), 1537-1544.

Chiu, Y. P., Chen, K. K., and Ting, C. K., (2012), Replenishment Run Time Problem with Machine Breakdown and Failure in Rework, *Expert Systems with Applications*, **39**, 1291-1298.

Chung, K.-J. and Huang, Y.-F. (2003), The Optimal Cycle Time for EPQ Inventory Model under Permissible Delay in Payments, *International Journal of Production Economics*, **84**(3), 307-318.

Goyal, S. K. (1985), Economic Order Quantity under Conditions of Permissible Delay in Payments, *The Journal of the Operational Research Society*, **36**(4), 335-338.

Hu, F. and Liu, D. (2010), Optimal Replenishment Policy for the EPQ Model with Permissible Delay in Payments and Allowable Shortages, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 3108-3117.

Jeang, A. (2012), Simultaneous Determination of Production Lot Size and Process Parameters under Process Deterioration and Process Breakdown, *Omega*, **40**, 774-781.

Kao, P. C. (1997), *An introduction to Stochastic Processes*, Duxbury Press, Belmont, California.

Kreng, V. B. and Tan, S. J. (2011), Optimal Replenishment Decision in an EPQ Model with Defective Items under Supply Chain Trade Credit Policy, *Expert Systems with Applications*, **38**, 9888-9899.

Mahata, G. C. (2012), An EPQ-Based Inventory Model for Exponentially Deteriorating Items under Retailer Partial Trade Credit Policy in Supply Chain, *Expert Systems with Applications*, **39**, 3537-3550.

Pasandideh, S. H. R. and Niaki, S. T. A. (2008), A Genetic Algorithm Approach to Optimize a Muliti-Products EPQ Model with Discrete Delivery Orders and Constrained Space, *Applied Mathematics Computation*, **195**, 506-514.

Sarkar, B. (2012), An Inventory Model with Reliability in an Imperfect Production Process, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 4881-4891.

Sarkar, B. and Moon, I. (2011), An EPQ Model with Inflation in an Imperfect Production System, *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 6159-6167.

Taft, E. W. (1918), The Most Economical Production Lot, *The Iron Age*, **101**, 1410-1412.

Taleizadeh, A. A., Niaki, S. T. A., and Najafi, A. A. (2010), Multiproduct Single-Machine Production System with Stochastic Scrapped Production Rate, Partial Backordering and Service Level Constraint, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**(8), 1834-1849.

Yassine, A., Maddah, B., and Salameh, M. (2012), Disaggregation and Consolidation of Imperfect Quality Shipments in Extended EPQ Model, *International Journal of Production Economics*, **135**, 345-352.