

## 메쉬 모델에 대한 아이소메트릭 형상 보간 방법

백승엽<sup>1†</sup> · 이건우<sup>2</sup>

<sup>1</sup>서울대학교 정밀기계설계공동연구소, <sup>2</sup>서울대학교 기계항공공학부

### An Isometric Shape Interpolation Method on Mesh Models

Seung-Yeob Baek<sup>1†</sup> and Kunwoo Lee<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Advanced Machinery and Design, Seoul National University

<sup>2</sup>School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University

Received 25 February 2014; received in revised form 8 April 2014; accepted 10 April 2014

#### ABSTRACT

Computing the natural-looking interpolation of different shapes is a fundamental problem of computer graphics. It is proved by some researchers that such an interpolation can be achieved by pursuing the isometry. In this paper, a novel coordinate system that is invariant under isometries is defined. The coordinate system can easily be converted from the global vertex coordinates. Furthermore, the global coordinates can be efficiently recovered from the new coordinates by simply solving two sparse least-squares problems. Since the proposed coordinate system is invariant under isometries, then transformations such as global rigid transformations, articulated posture deformations, or any other isometric deformations, do not change the coordinate values. Therefore, shape interpolation can be done in this framework without being affected by the distortions caused by the isometry.

**Key Words:** Differential coordinates, Isometry-invariant, Shape interpolation, Shape synthesis

## 1. 서 론

형상 보간이란 다수의 키프레임(key-frame) 모델들로부터 그 중간 형상(in-betweens)을 생성해내는 기술을 의미한다. 이 기술은 형상 블렌딩(shape blending)<sup>[1,2]</sup>이나 예제 기반(example-based) 모델링<sup>[3-5]</sup>, 애니메이션 등 다양한 컴퓨터 그래픽스 및 지오메트리 모델링 분야에서 중요하게 다루어지는 기술이다. 이러한 형상 보간 기술은 주어진 키프레임 모델들에 대해 가장 직관적이고 자연스러

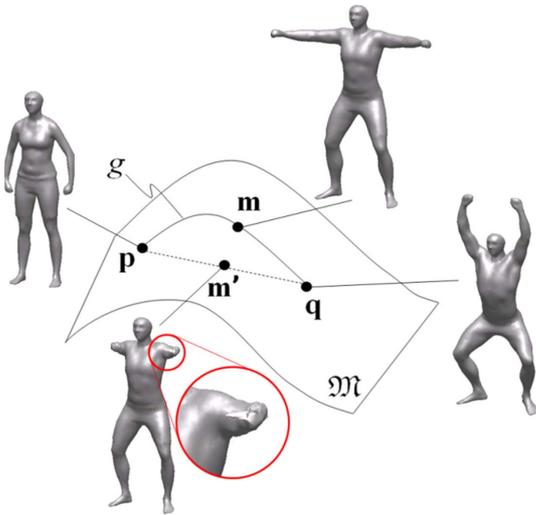
우며 사실적인 중간 형상을 만들어 내는 것을 궁극적인 목표로 한다.

형상 보간을 위해서는 우선 기본적으로 각 키프레임 모델들의 토폴로지(topology)가 상호 호환 가능(compatible)하다는 것을 전제로 한다. 즉 삼각형 메쉬 모델의 경우를 예로 들면, 각 모델의 꼭지점(vertex) 개수는 물론이고, 이들이 서로 연결된 삼각형 구조 또한 동일해야 한다. 이와 관련해서는 이미 본 저자들의 사전 연구<sup>[6]</sup>를 비롯한 다수의 연구들이 존재하므로(예컨대 [6-10]와 같은), 본 논문에서는 논의의 초점을 흐트러뜨리지 않기 위하여 별도로 다루지는 아니한다. 따라서 관련 내용에 관한 상세한 정보는 상기 참조문헌들을 참조하

<sup>†</sup>Corresponding Author, bsy86@snu.ac.kr  
©2014 Society of CAD/CAM Engineers

도록 권장하며, 특히 [10]의 조사 분석 논문을 통해 개괄적인 그림을 그릴 수 있을 것이라 사료된다.

한편, 형상 보간을 수행하기 위해 취할 수 있는 가장 단순한 방법은 키프레임 모델들의 각 꼭지점 좌표들을 산술적으로 선형 보간하는 것이다. 이러한 방법은 이론적으로 단순하고 그 구현 또한 쉽기 때문에 실제로 다양한 적용 분야에서 가장 많이 사용되고 있는 방법이기도 하다. 그러나, 이러한 방법은 대단히 치명적인 단점을 지니고 있는데 이는 바로 강제 변환이나 관절체의 자세 변형(예: 인체의 자세 변형) 등과 같은 등장변환(等張變換, isometry)에 대해 불변(invariant)이 아니라는 점이다(등장변환의 수학적 정의에 대해서는 잠시 후에 다루도록 하겠다). 이로 인해, 형상 보간 과정에서 심각한 계량 왜곡(metric distortion)이 발생할 수 있으며, 이는 결과물의 부자연스러움이나 비직관성 등으로 직결된다. 또한, 심지어 보간에 사용되는 키프레임 모델들이 정확히 동일한 모델이라 할 지라도 그 방향이나 위치가 각기 다른 경우에는, 보간된 형상과 키프레임 형상의 차이가 없어야 하는 것이 직관적으로 타당함에도 불구하고, 전혀 다른 보간 형상이 생성될 수도 있다. 실제로 Fig. 1



**Fig. 1** Problem of the linear shape interpolation operation under Euclidean setup. Key-frame models  $p$  and  $q$  are interpolated to  $m'$  within this setup, which however is not preferable. Rather, the interpolation should occur within a careful consideration of a manifold  $\mathcal{M}$ , where the key-frame models are lying in, and should result a valid in-between  $m$ , lying on a geodesic  $g$  connecting  $p$  and  $q$

은 이러한 선형 보간의 문제점을 여실히 들어내고 있으며, 결과물들이 우리의 직관과는 거리가 멀다는 사실을 한눈에 파악할 수 있다.

대다수의 기존 연구들에서는 이러한 문제점으로 인하여 보간 형상을 계산하기에 앞서 키프레임 모델들의 위치와 방향, 자세 등을 정렬하는 등의 전처리 과정을 거치게 된다. 그러나, 이러한 노력에도 불구하고 여전히, 특히 자세 변형과 관련해서는, 명백한 계량 왜곡의 여지가 존재한다. 또한, 관절체의 자세 정렬 과정에서 [11-13] 등과 같은 스킨닝(skinning) 기법을 사용하게 될진대, 아무리 피부 변형 결과물이 사실적이고 시각적으로 만족스럽다 할 지라도, 여전히 이 과정에서도 계량 왜곡을 만들어낼 수 밖에 없다.

따라서 위치, 방향, 자세 등의 영향을 형상 보간 과정에서 배제 혹은 최소화하고, 형상 그 자체의 보간 결과물만을 구해내는 것은 그간 관련 분야 내에서 가장 큰 화두 중 하나였다. 수학적으로 말하자면 이는 등장변환에 가장 가까운 보간 형상, 즉 아이소메트릭(isometric) 보간 형상을 찾아내는 것과 같다. 이에 대한 논의를 위해 우리는 먼저 등장변환에 대한 수학적 정의를 살펴보고자 한다.

**정의 1. (등장변환)** 원소간 거리를 보존하는 계량공간(metric space) 간의 합동사상(congruent projection)을 등장변환이라 한다. 즉, 주어진 두 계량공간  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 와 그에 상응하는 계량 함수  $d_{\mathcal{M}_1}, d_{\mathcal{M}_2}$ 에 대해, 사상  $f: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ 가 임의의  $x, y \in \mathcal{M}_1$ 에 대해  $d_{\mathcal{M}_1}(x, y) = d_{\mathcal{M}_2}(f(x), f(y))$ 을 만족할 때, 사상  $f$ 를 등장변환이라 한다.

이러한 등장 변환의 자명한 예로서, 자기 자신으로의 변환인 항등변환(identity transformation; 자기 자신으로의 변환), 형상이 변하지 않는 회전과 이동으로 이루어진 강제변환(rigid transformation) 등이 있다. 막막(membrane)의 순수 굽힘, 바퀴의 회전, 강제 관절체(articulated body)의 움직임 등은 실생활에서 찾아볼 수 있는 이러한 등장 변환의 좋은 예이다. 또한 느슨한 의미에서는 인체의 자세 변화나 얼굴 표정 변화 등으로 유발되는 피부 변형들 역시도 등장변환의 한 종류로 볼 수 있다.

이와 같은 정의를 바탕으로 하면, 아이소메트릭 형상 보간이란 주어진 키 프레임 형상들에 대해 존재할 수 있는 다양한 보간 형상들 중 계량 왜곡이 가장 적은, 즉 등장변환에 가장 가까운 보간 형

상을 얻어내는 방법을 의미한다. 앞선 정의로부터 유추할 수 있는 바와 같이, 아이소메트릭 형상 보간은 위치나 방향, 자세 등이 형상 보간에 미치는 영향을 최소화하고 형상 그 자체만의 보간 결과를 얻어내기 위한 수학적으로 가장 엄밀한 방법이다. 특히 [14]에서 이미 명시적인 논의가 이루어진 바와 같이, 아이소메트릭 형상 보간 방법은 (다음장에서 살펴보게 될) 여러 보간 기법들 중에서 우리가 인지하기에 가장 자연스럽게 직관적인 결과물을 내어 놓는다.

특히 본 저자들이 주된 관심을 쏟고 있는 통계적 형상 해석 (statistical shape analysis) 및 예제 기반 모델링 등의 연구에서는, 다른 외재적인 요소들을 제외한 ‘순수한’ 형상 분포를 관찰해내는 것이 주된 목표인데, 이를 위해서는 등장변환에 해당하는 정보들을 배제하고 온전히 형상에만 관심을 기울이는 것이 중요하다. 현재까지는 이러한 문제에 대한 기술적 해결책이 거의 없는 상태이며, 많은 연구들이 이로 인한 해석 오차를 극복해내지 못하고 있다. 따라서 본 논문에서 제안하는 아이소메트릭 형상 보간 기술은, 보다 정교한 형상 해석 연구를 위해 필수적인 핵심 요소 기술로서의 가치 또한 지닌다.

## 2. 관련 연구

자연스럽고 직관적인 형상 보간 방법에 대한 논의는 그간 다양한 논문들을 통해 이루어져 왔다. 그 중 대표적인 방법은 국소 강성(local rigidity)을 최대화하는 보간 형상을 찾아내는 방법이다<sup>[15-18]</sup>. 이러한 류의 방법들은, 키프레임 모델들 각각의 국소 형상을 가장 잘 보존하는 형상 보간이 눈으로 보기에 가장 그럴듯한 결과물을 내어놓는다는 가정 하에, 형상 보간 문제를 국소 강성 최대화 문제로 공식화(formulation)하여 접근한다. 그러나 이러한 가정이 ‘언뜻 보기에 그럴싸한’ 결과물을 생성해줄 수는 있겠지만, 자세히 살펴보면 실제로는 그 결과물이 자연스럽지 못한 부분이 많다. 이러한 사실은 [14]에서 발췌한 그림 2에도 여실히 드러난다. 실제로 [14]에서는 국소 강성에 관해 문제를 공식화해서는 자연스러운 보간 형상을 얻을 수 없으며, 그보다는 국소 길이를 가장 잘 보존하는, 즉 등장변환에 가장 가까운 보간 형상을 구하는 방향으로 문제를 풀어야 한다고 지적한다.



Fig. 2 Comparison between the as-rigid-as-possible interpolation (left) and the as-isometric-as-possible interpolation (right). (Courtesy of Kilian *et al.*<sup>[17]</sup>)

또한 [14,16,17]에서는 형상 보간 문제를 비선형 최적화 문제로 공식화 하여 이를 수치적인 방법으로 풀어내고 있다. 그러나 쉽게 예상할 수 있는 바와 같이 이러한 비선형 최적화 문제들은 대단히 많고 복잡한 연산을 수반할 수 밖에 없다. 특히 [14]의 경우, 아이소메트릭 형상 보간의 필요성에 대해서 이론적으로 정확하게 짚어내고 본질적인 문제를 제기하는 것까지는 성공하였으나, 이를 공식화하는 과정에서 수학적인 엄밀함을 지나치게 강조한 나머지, 해법이 대단히 복잡하고 계산 시간을 상당히 많이 소모하여 실용적이지 못하다는 한계에 봉착한다.

이는 이들 방법이 단순히 각 꼭지점들의 유클리드 좌표값을 바탕으로 하여 형상을 기술하기 때문이다. 이러한 방식의 외재적(extrinsic) 기술은, 좌표계의 선택에 대해 의존적일 뿐만 아니라, 해공간(solution space)의 범위를 벗어나는 결과를 가져올 수도 있다는 문제점을 가진다. 다시 말해, 사실적인 형상을 가지는 해의 범위가 분명히 존재할진대, 이들 방법에서는 이를 적절히 매개화(parameterization)하여 탐색 범위가 해공간을 벗어나지 않도록 하는 것이 아니라, 해공간이 귀속(embed)된 전체 벡터공간에서 탐색을 수행하는 방식을 취하고 있기 때문에 필연적으로 복잡한 수식화와 방대한 연산과정을 수반할 수 밖에 없다는 것이다. 이보다는, 좌표계의 선택에 불변인 내재적(intrinsic) 기하학적 특성들을 바탕으로 형상을 기술하고, 가급적이면 이들 내재적 변수에 대한 선형 보간만으로도 사실적인 형상 보간이 가능하도록 문제를 재구성하는 것이 바람직하다.

이러한 문제의식을 바탕으로 한 형상 보간 연구들 중 주목할만한 연구는 미분 좌표계(differential coordinates)를 기반으로 한 연구들이다<sup>[19-22]</sup>. 이들 연구들에서는 유클리드 좌표계에서 표현된 형상

을, 선형 보간이 가능한 새로운 좌표 공간으로 사상하여 형상 보간 연산을 수행하였다. 그들은 꼭지점의 좌표나, 법선(normal) 방향 및 다른 미분기하학적 변수들의 국지적 차이를 바탕으로 하여 새로운 좌표계를 정의하였고, 이러한 좌표 시스템에서의 선형 보간 만으로, 사실적 보간 형상을 가지도록 하는 유클리드 좌표계에서의 비선형 보간과 동치(equivalent)인 형상을 구현해내는데 성공하였다. 이후, 새로운 좌표계에서 기술된 형상 정보를 유클리드 좌표계의 표현으로 재건해내는 방법을 고안해냄으로써, 다시 유클리드 좌표계에서의 형상 기술을 얻어낼 수 있도록 하였다. 이러한 방법들은 비록 등장변환 불변(isometry-invariance)이라는 본질적인 문제에 대해서는 성공적인 해결책을 제시하고 있지 못하고 여전히 국소 강성에 대해서만 문제를 공식화하고 있기는 하나, 외재적 기하 변수들로 기술된 형상을 내재적 기하 변수들로 새로이 표현하여, 단순한 선형 보간 만으로도 형상에 대한 사실적인 보간을 얻어낼 수 있는 방법을 제시했다는 점에서 대단히 중요한 가치를 지닌다.

본 논문에서는 이러한 사전 연구들에서 착안하여 등장변환에 대해 불변인 새로운 좌표 시스템을 제안한다. 외재적 기하 변수들로부터 내재적 기하 변수를 계산해내고, 이를 바탕으로 한 새로운 좌표 시스템을 정의하되, 선형 산술 보간만으로도 외재적 변수들의 비선형 보간이 가능해지도록 새로운 좌표 시스템을 설계한다. 또한 새로운 좌표 시스템과 원래의 유클리드 좌표 시스템 간의 상호 변환 방법을 유도해내어 두 좌표 시스템간의 자유로운 사상이 가능해지도록 한다.

### 3. 등장변환 불변 미분 좌표계

본 장에서는 등장변환에 불변인 새로운 미분좌표계에 대한 정의로부터 논의를 시작한다. 우리는 이 좌표계를 IDC(Isometry-invariant Differential Coordinates)라고 명명하며, 삼각형 메쉬 형태로 표현된 이산(discrete) 곡면에 대해 이를 정의하게 된다.

#### 3.1 배경 지식

곡면에 대한 기본 정리(fundamental theorem of surfaces)에 따르면, 두 곡면이 상동일 필요충분조건은 각 곡면들의 제1기본형식(first fundamental form) 혹은 계량텐서(metric tensor)과 제2기본형식

(second fundamental form 혹은 형상텐서(shape tensor))가 각각 상동인 것이다<sup>[23]</sup>. 이 때, 제1,2기본형식은 각각 국소적 계량 성질 및 곡률 정보를 나타낸다. 따라서 곡면에 대한 기본 정리는 결국, 주어진 곡면의 국소 길이와 곡률에 관한 표현만으로도 그 전체 형상을 완벽하게 기술할 수 있다는 사실을 시사한다. 특히, 우리가 다루게 될 메쉬 형태의 이산 곡면에 대해서도, 이러한 이론적 관찰의 적용이 가능하다. 즉, 주어진 메쉬 곡면은 이를 구성하는 각 모서리(edge) 벡터와 인접한 면(facet) 간의 상대회전(relative rotation)들에 관한 표현으로도, 그 기하학적 형태를 완벽하게 기술할 수 있다.

#### 3.2 정의

우리가 다루고자 하는 메쉬 모델  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{K}\}$ 가 주어졌다고 하자. 여기서  $\mathcal{V}$ 는  $N_V$ 개의 점들의 집합, 즉  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3 | i=1, \dots, N_V\}$ 이며,  $\mathcal{K}$ 는 추상적인 연결 구조를 담고 있는 단체적 복합체(simplicial complex)이다. 추상 구조  $\mathcal{K}$ 는 세 종류의 원소들, 즉 꼭지점  $\{i\}$ , 모서리  $\{i, j\}$ , 면  $\{i, j, k\}$ 으로 구성되어 있다. 이 때,  $\mathcal{K}$ 를 구성하는 모든 튜플(tuple)들은 순서가 존재하며, 이에 따라  $\{i, j\} \neq \{j, i\}$ ,  $\{i, j, k\} \neq \{i, k, j\}$  등과 같은 규칙들이 성립한다.

IDC를 정의하기에 앞서 우선, 메쉬를 구성하는 각 면들에 대하여 국소 좌표계  $\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ 을 설정할 필요가 있다.  $\mathcal{K}$ 의 원소인 삼각형  $T_i = \{T_i^1, T_i^2, T_i^3\}$ 에 대하여, 국소 좌표계의 각 정규직교기저(orthonormal basis)들은 다음과 같은 직관적인 방식으로 정의된다: 우선  $\hat{\mathbf{c}}$ 은 해당 면의 법선 방향 단위 벡터로 한다. 또한  $\hat{\mathbf{a}}$ 는 해당 면의 첫 번째 모서리  $\{T_i^1, T_i^2\}$  방향의 단위 벡터로 한다. 마지막으로  $\hat{\mathbf{b}}$ 는 자연적으로 오른손 법칙에 따라 정해진다:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= \frac{\mathbf{v}_{T_i^2} - \mathbf{v}_{T_i^1}}{\|\mathbf{v}_{T_i^2} - \mathbf{v}_{T_i^1}\|} \\ \hat{\mathbf{c}} &= \frac{(\mathbf{v}_{T_i^2} - \mathbf{v}_{T_i^1}) \times (\mathbf{v}_{T_i^3} - \mathbf{v}_{T_i^1})}{\|(\mathbf{v}_{T_i^2} - \mathbf{v}_{T_i^1}) \times (\mathbf{v}_{T_i^3} - \mathbf{v}_{T_i^1})\|} \\ \hat{\mathbf{b}} &= \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (1)$$

이 때, 국소좌표계의 원점은 여기서 별도로 정의하지는 않는다. 이는 우리가 국소좌표계에 대해서 정의하게 될 모든 값들이 상대적인 값들이므로

기술될 것이기 때문이다.

각 면에서의 국소좌표계가 정의되었다면 이제 IDC를 정의할 차례이다. IDC는 각 국소좌표계에 대하여 해당 국소좌표계에서 바라본 모서리 벡터들의 좌표값의 순서쌍으로 다음과 같이 정의된다:

$$\mathbf{x}_i^T = [({}_{i|} \mathbf{e}_i^1)^T \quad ({}_{i|} \mathbf{e}_i^2)^T \quad ({}_{i|} \mathbf{e}_i^3)^T] \quad (2)$$

이 때,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^j &= \mathbf{v}_{T_i^k} - \mathbf{v}_{T_i^l} \\ ({}_{i|} \mathbf{e}_i^j &= [\langle \mathbf{e}_i^j, \hat{\mathbf{a}}_i \rangle \quad \langle \mathbf{e}_i^j, \hat{\mathbf{b}}_i \rangle \quad \langle \mathbf{e}_i^j, \hat{\mathbf{c}}_i \rangle]^T \\ &= [\langle \mathbf{e}_i^j, \hat{\mathbf{a}}_i \rangle \quad \langle \mathbf{e}_i^j, \hat{\mathbf{b}}_i \rangle \quad 0]^T \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 이 때,  $(jkl)$ 은 (123)의 짝순환치환 (even cyclic permutation)이다. 우리는 앞으로의 논의에서 좌측 아래첨자  $\{i\}$ 를 국소좌표계  $\{i\}$ 에서 바라봤을 때의 벡터량을 나타내는 것으로 한다. (반대로, 좌측 아래첨자가 붙어있지 않는 경우에는 전역좌표계에서의 벡터량을 의미한다.)

또한 이에 덧붙여 추후 국소좌표계의 재건을 위해 RC(Rotational Coordinates)라는 이름의 새로운 좌표계를 정의한다. 이를 위해 우선 회전행렬  $\mathbf{R}_{ij}$ 를 국소좌표계  $\{i\}$ 에서 그에 인접한 국소좌표계  $\{j\}$ 로의 회전이라 하자. 이 때 각 면  $T_i$ 에서의 RC는 이러한  $\mathbf{R}_{ij}$ 들의 순서쌍으로 정의된다:

$$\mathbf{R}_i = \{\mathbf{R}_{ij} | \mathbf{R}_{ij} \in SO(3), T_i, T_j \text{ adjacent}\} \quad (3)$$

### 3.3 유클리드 좌표계로의 재건

유클리드 좌표계로부터 IDC와 RC의 생성은 그 정의로부터 자명하나, 그 역과정은 그리 단순하지 않다. 실제로, 이는 주어진 모서리 벡터들과 면과 면사이의 상대 회전들로부터, 이러한 조건들을 가장 잘 만족하는 꼭지점들의 최적 배치를 찾는 문제로 해결해야만 한다. 이와 유사한 문제에 대한 해법은 [22,24] 등의 연구에서 찾아볼 수 있다. 이 들로부터 힌트를 얻어 본 논문에서 제안하게 될 재건 기술을 개괄하면 다음과 같다. 우선 주어진 RC들로부터 각 국소좌표계들을 재건해낸다. RC 들은 각 국소좌표계간의 상대회전 정보를 가지고 있기 때문에, 이로부터 각 국소좌표계의 재건이 가능하다. 국소좌표계들이 다 구해지고 나면, 이에 기반하여 주어진 IDC들로부터 각 꼭지점들의 위

치를 재건한다. IDC들이 각 꼭지점간의 상대 위치를 기술하고 있기 때문에, 이로부터 각 꼭지점들의 절대위치를 재건하는 것이 가능하다.

이를 위해 우선 RC의 정의로부터 얻어진 다음에 나타난 인접면  $T_i, T_j$ 간의 관계식을 고려하도록 하자:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_j &= \mathbf{R}_{ij} \hat{\mathbf{a}}_i \\ \hat{\mathbf{b}}_j &= \mathbf{R}_{ij} \hat{\mathbf{b}}_i \\ \hat{\mathbf{c}}_j &= \mathbf{R}_{ij} \hat{\mathbf{c}}_i \end{aligned} \quad (4)$$

이 때, 면  $T_i$ 를 기준으로 한 상대적인 방향을 살펴 보기 위하여, 면  $T_i$ 의 각 기저들을 편의상  $\hat{\mathbf{a}}_i = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{\mathbf{b}}_i = [0 \ 1 \ 0]^T$ ,  $\hat{\mathbf{c}}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ 로 놓도록 하자. 그러면 위 식 (4)로부터

$$\begin{aligned} ({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j &= [({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j)_a \quad ({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j)_b \quad ({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j)_c]^T \\ &= \mathbf{R}_{ij} [1 \ 0 \ 0]^T \\ &= [(\mathbf{R}_{ij})_{11} \quad (\mathbf{R}_{ij})_{21} \quad (\mathbf{R}_{ij})_{31}]^T \\ ({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j &= [({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j)_a \quad ({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j)_b \quad ({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j)_c]^T \\ &= [(\mathbf{R}_{ij})_{12} \quad (\mathbf{R}_{ij})_{22} \quad (\mathbf{R}_{ij})_{32}]^T \\ ({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j &= [({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j)_a \quad ({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j)_b \quad ({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j)_c]^T \\ &= [(\mathbf{R}_{ij})_{13} \quad (\mathbf{R}_{ij})_{23} \quad (\mathbf{R}_{ij})_{33}]^T \end{aligned} \quad (5)$$

을 얻는다. 여기서  $(\cdot)_a$ 는 벡터의  $\hat{\mathbf{a}}_i$  방향 성분을 의미하며,  $(\cdot)_k$ 는 행렬의  $(k, l)$ 번째 원소를 뜻한다. 이러한 식 (5)의 상대적 표현으로부터 우리는 다음과 같은 선형 연립 방정식을 얻는다:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_j &= ({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j)_a \hat{\mathbf{a}}_i + ({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j)_b \hat{\mathbf{b}}_i + ({}_{i|} \hat{\mathbf{a}}_j)_c \hat{\mathbf{c}}_i \\ \hat{\mathbf{b}}_j &= ({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j)_a \hat{\mathbf{a}}_i + ({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j)_b \hat{\mathbf{b}}_i + ({}_{i|} \hat{\mathbf{b}}_j)_c \hat{\mathbf{c}}_i \\ \hat{\mathbf{c}}_j &= ({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j)_a \hat{\mathbf{a}}_i + ({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j)_b \hat{\mathbf{b}}_i + ({}_{i|} \hat{\mathbf{c}}_j)_c \hat{\mathbf{c}}_i \end{aligned} \quad (6)$$

각 면과 그에 인접한 모든 면들에 대하여 위 식 (6)과 같은 관계식을 세운 후 연립하여 정리하면, 결국 아래와 같은 형태의 행렬식이 만들어진다:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (7)$$

여기서  $\mathbf{f}$ 는 각 면의 기저  $\hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{c}}_i$ 를 행벡터(row vector)로 하는 미지행렬이며,  $\mathbf{A}$ 는 각 항이 식 (6)의 계수들로 구성된 행렬이다. 이 때, 행렬  $\mathbf{A}$ 는 각

원소  $(i, j)$ 에 대해,  $\mathcal{I}_i$ 와  $\mathcal{I}_j$ 가 서로 인접일 때만 0이 아닌 값을 갖게 되므로, 희소(sparse)하다.

한 편, 식 (7)에서 행렬  $\mathbf{A}$ 의 계수(階數, rank)는 완전계수(full rank)가 아니다. 즉, 식 (7)에 대해 몇 개의 구속조건을 부가하여 완전계수 조건을 만들어주지 않는 이상, 우리가 원하는 해를 구할 수 없다. 기하학적으로 조금만 살펴보면 이러한 현상이 사실, 절대적 방향에 대한 조건이 정의되지 않아서임을 알 수 있다. 다시 말해, 식 (6) 및 (7)에서는 각 인접한 면들 사이의 상대적 방향에 대한 정보만 주어져 있을 뿐, 메쉬 전체의 절대적인 방향에 대한 정보는 주어져있지 않다. 따라서 각 인접면 간의 상대적인 방향에 대한 조건만 만족한다면, 메쉬 전체로 보았을 때에는 아무 방향으로나 떠돌아 다닐 수 있다는 것이다.

이를 해결하기 위한 가장 자연스럽고 직관적인 방법은, 임의로 선택된 하나의 면에 대하여 절대적인 방향을 구속해줌으로써, 메쉬가 더 이상 아무 방향으로나 회전하지 않도록 하는 것이다. 이는 결국 임의의  $i$ 에 대하여, 면  $\mathcal{I}_i$ 의 기저를 특정 방향으로 고정하고, 이를 식 (7)에 대입함으로써 얻어질 수 있다. 이후, 구속조건으로 대입한 값들은 따로 우변으로 정리하여 최소자승법(least-squares method)으로 해를 계산하게 된다.

이러한 방법으로 각 국소좌표계들의 방향을 결정했다면, 이제 그에 기반하여 각 꼭지점들의 위치좌표를 결정할 차례이다. 이를 위해 IDC의 정의로부터 각 면에 대하여 다음과 같은 관계식을 얻는다:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^1: \mathbf{v}_{\mathcal{I}_i^2} - \mathbf{v}_{\mathcal{I}_i^3} &= (\mathbf{x}_i)_1 \hat{\mathbf{a}}_i + (\mathbf{x}_i)_2 \hat{\mathbf{b}}_i + (\mathbf{x}_i)_3 \hat{\mathbf{c}}_i \\ \mathbf{e}_i^2: \mathbf{v}_{\mathcal{I}_i^1} - \mathbf{v}_{\mathcal{I}_i^3} &= (\mathbf{x}_i)_4 \hat{\mathbf{a}}_i + (\mathbf{x}_i)_5 \hat{\mathbf{b}}_i + (\mathbf{x}_i)_6 \hat{\mathbf{c}}_i \\ \mathbf{e}_i^3: \mathbf{v}_{\mathcal{I}_i^1} - \mathbf{v}_{\mathcal{I}_i^2} &= (\mathbf{x}_i)_7 \hat{\mathbf{a}}_i + (\mathbf{x}_i)_8 \hat{\mathbf{b}}_i + (\mathbf{x}_i)_9 \hat{\mathbf{c}}_i \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $(\mathbf{x}_i)_j$ 는  $\mathbf{x}_i$ 의  $j$ 번째 원소를 의미한다. 위 식 (8)을 모든 열에 대하여 나열한 후 이를 다시 행렬 식으로 묶으면 다음과 같다:

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{d} \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{B}$ 는 식 (8) 좌변의 계수에 따라 1, 0, -1로 이루어진 희소행렬이며,  $\mathbf{v}$ 는 각 꼭지점의 좌표를 행벡터로 하는 미지행렬이다. 또한  $\mathbf{d}$ 는 식 (8)의 우변을 배열한 행렬이다.

이 때, 위 행렬  $\mathbf{B}$  역시도 앞선 식 (7)에서와 유

사한 이유로 완전계수가 아니다. 다만 식 (7)이 절대적인 방향에 대한 구속조건이 미비하였기에 그러했다고 한다면, 위 식 (9)의 경우에는 절대적인 위치에 대한 구속조건이 미비하였기 때문이다. 즉, IDC로부터는 각 꼭지점들과 그와 인접한 꼭지점들간의 상대적인 위치에 대한 정보만을 알아낼 수 있을 뿐, 절대적인 위치에 대한 정보는 알 수 없다. 따라서 각 상대 위치를 만족하기만 한다면, 아무 위치로나 자유롭게 떠돌아 다닐 수 있다.

이에 대한 해결책 역시도 앞선 식 (7)의 경우와 유사하다. 즉, 임의로 선택된 하나의 꼭지점에 대하여 절대적인 위치를 구속해줌으로써, 메쉬가 더 이상 아무 위치로나 부유하지 않도록 하는 것이다. 따라서 임의로 선택된 점  $\mathbf{v}_i$ 에 대하여 그 위치 좌표를 식 (9)에 대입한 후, 최소자승문제를 풀어냄으로써 최종적으로 3차원 메쉬 형상을 재건해 낼 수 있다.

## 4. 구 현

잠깐 언급했던 바와 같이, 메쉬 모델들의 토폴로지로부터, 식 (7)과 (9)의 행렬은 모두 희소함이 자명하다. 이는 메쉬 모델의 각 꼭지점들이 그와 가장 인접한 몇 개의 꼭지점에만 연결되어있기 때문이며, 각 면과 그 이웃면 간의 관계에 대해서도 동일하다. 따라서, 인접 점(혹은 면)과의 연결 관계를 기술하는 식 (7)과 (9)의 각 행에서, 오로지 이웃한 점(혹은 면)에 해당하는 열에서만 0이 아닌 값을 가지게 되고, 그 밖의 모든 원소들은 0으로 채워지게 된다. 이는 자연스레 희소행렬에 대한 자료구조 및 알고리즘이 사용될 수 있음을 의미하며, 밀집(dense) 행렬에 대한 것들에 비해 효율성 측면에서 월등히 뛰어나다.

또한, 최소자승법의 적용에 있어서 무어-펜로스의 의사역행렬(Moore-Penrose pseudoinverse)을 계산하게 될진대, 이 과정에서 주요한 연산은 전치행렬(transpose matrix)과 원래 행렬의 곱에 대한 역행렬 연산이다. 이 때 전치행렬과 원래 행렬의 곱으로 얻어진 행렬이 대칭이라는 사실을 상기한다면, 문제의 구현은 보다 더 단순해진다. 또한 각 행렬이 희소하다는 사실과 더불어 대칭이기까지 하므로, 한층 더 효율적인 자료구조 및 알고리즘 구현이 가능하다.

한편, 이러한 성질의 문제에 대하여 취할 수 있

는 해법으로써, 직접(direct) 풀이법과 반복(iterative) 풀이법이 있을 수 있다. 두 방법 모두 수치적으로 훌륭한 결과를 반환하며, 식 (7)과 (9)의 수식화 과정이 선형적이라는 점을 감안할 때, 최종해로의 수렴 또한 보장받을 수 있다. 허나, 행렬이 희소하며 대칭이라는 점을 십분 활용하기 위해서는 희소 출레스키 분해법(sparse Cholesky decomposition)등의 직접 풀이법을 사용하는 것이 현명하다.

이를 위해 많은 선택지가 있을 수 있겠으나, 본 연구에서는 CHOLMOD 라이브러리를 사용하여 희소 출레스키 분해법을 시행한다. CHOLMOD는 SuiteSparse<sup>1</sup>라 불리는 희소 행렬 연산 라이브러리에 포함된 하위 라이브러리로서, 수치적으로 안정적이고 연산 속도가 우수한 희소 출레스키 분해법이 구현되어 있다.

### 5. 아이소메트릭 형상 보간

앞선 장에서 논의한 등장변환 불변 좌표계를 이용한 형상 기술 방법을 이용하면 아이소메트릭 형상 보간을 산술적으로 간단하게 계산해낼 수 있다. 이러한 형상 보간 문제를 공식화하기 위하여  $N$ 개의 키프레임 모델들  $X^{(i=1, \dots, N)}$  을 고려하도록 하자. 이 때, 각 모델들에 대한 IDC와 RC를 계산함으로써, 다음과 같이 (기존의 유클리드 공간과는 다른) 새로운 형상 공간에서의 형상 표현을 얻는다:

$$X^{(i)} = \{ \mathbf{x}_j^{(i)}, \mathbf{R}_j^{(i)} | j=1, \dots, |T| \} \quad (10)$$

정의로부터 IDC  $\mathbf{x}_j^{(i)}$ 는 실벡터공간 상의 원소이며, 따라서 이에 대한 보간은 단순히 선형 산술 보간으로 얻어질 수 있다:

$$\mathbf{x}_j = \sum_i w_i \mathbf{x}_j^{(i)}, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad \sum_i w_i = 1 \quad (11)$$

한편, RC  $\mathbf{R}_j^{(i)}$ 는 특수직교군(special orthogonal group)  $SO(3)$ 의 원소이며, 따라서 이에 대한 엄밀한 보간은 단순한 선형 산술 보간으로 이루어질 수 없다. 이는  $SO(3)$ 가 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀있지 않기 때문이다. 따라서 이에 대한 보간은  $SO(3)$  공간의 기하학적 구조에 대한 심도있는 이

해에 기반하여, 보다 엄밀한 방법으로 이루어져야만 한다.

현대대수학의 리군론(Lie group theory)의 정리에 따르면,  $SO(3)$ 은 행렬곱이 구비된 행렬 리군(matrix Lie group)에 속하며, 따라서  $SO(3)$ 가 형성하는 다양체(manifold)의 항등원에서의 접평면(tangent plane) 상에서 리대수(Lie algebra)  $\mathfrak{so}(3)$ 가 정의될 수 있다. 또한 항등원 주변의 개집합(open set)에 대하여  $SO(3)$ 과  $\mathfrak{so}(3)$ 는 미분동형(微分同形, diffeomorphic)이므로,  $SO(3)$ 의 각 원소들에 상응하는 원소들이  $\mathfrak{so}(3)$ 에도 존재하며 이들 대응관계는 유일하다. 이 때,  $\mathfrak{so}(3)$ 의 각 원소들에 대해서는 일반적인 벡터 대수 보간이 가능하므로  $\mathfrak{so}(3)$ 에서의 보간 결과를 다시  $SO(3)$ 로 사상함으로써,  $SO(3)$ 의 각 원소에 대한 엄밀한 보간 결과를 얻어낼 수 있다. 이와 관련한 연구들은 [25] 등에서 찾아볼 수 있으며, 본 논문에서는 논의의 흐름을 방해하지 않기 위해 더 이상 구체적으로 다루지 않겠다. 다만, 이러한 방식으로 얻어진,  $SO(3)$ 의 각 원소들 간의 보간을 표현하기 위하여  $\Sigma$ 기호 대신  $\oplus$ 를 사용하여  $\oplus_i w_i \mathbf{R}_j$ 로 표기하겠다는 점만 명기하는 바이다.

따라서, 주어진  $N$ 개의 키프레임 모델들에 대한 IDC와 RC 표현이 주어져 있다고 할 때, 그에 대한 아이소메트릭 형상 보간은 다음과 같다:

$$X = \left\{ \sum_i w_i \mathbf{x}_j^{(i)}, \oplus_i w_i \mathbf{R}_j^{(i)} | j=1, \dots, |T| \right\} \quad (12)$$

Fig. 3은 이러한 방법을 이용한 형상 보간 결과물을 보여주고 있다. 그림의 양 끝의 모델이 각각 보간에 사용된 키프레임 모델이며, 가운데는 보간을 통해 얻어진 중간 모델들이다. 그림에서 볼 수 있듯, 선형보간 기법을 이용한 결과물(상단)에서는 원래의 형상이 모두 일그러지면서 극심한 왜곡이 발생하는 것을 볼 수 있으나, 본 논문에서 제안한 방법을 이용한 아이소메트릭 보간 결과물(하단)에서는 원래의 형상들이 보존되면서 자연스럽게 직관적으로 꼬여있는 렌치 형상이 퍼지는 것을 알 수 있다.

또한 Fig. 4는 이러한 보간 기법을 네 개의 인체 모델들에 대해 동시에 적용한 결과를 보이고 있다. 그림의 각 키프레임 모델들이 서로 다른 방향과 자세로 서있기 때문에, 선형 보간 결과물(좌측)에서는 팔다리나 몸통 부근의 형상이 극심하게

<sup>1</sup>SuiteSparse: <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/SuiteSparse>

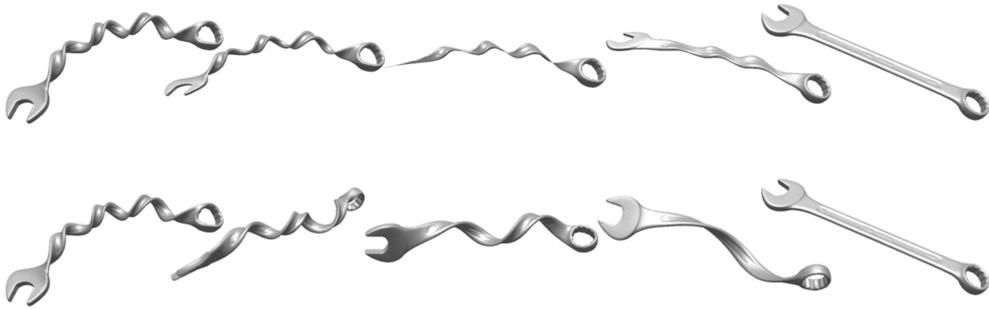


Fig. 3 Inbetweening of the “twisted wrench model” using the linear interpolation (up) and the proposed method (bottom). Note the natural deformation in the second row



Fig. 4 Interpolation of whole-body scans having different orientations and poses

찌그러지는 것을 볼 수가 있으나, 본 논문에서 제안한 방법을 이용할 경우(우측) 체형뿐만 아니라 서있는 방향, 자세 등도 함께 자연스럽게 보간되는 것을 볼 수 있다.

## 6. 결론 및 고찰

본 논문에서 우리는 새로운 형상 보간 기법에 대해서 알아보았다. 이를 위해 우선 등장변환 불변 미분좌표계라는 이름의 새로운 좌표 시스템을 도입하였고, 이를 이용하여 3차원 형상을 완벽히

기술할 수 있다는 사실을 알았다. 또한, 유클리드 좌표계에서의 산술적 보간과는 달리, 새로이 제안된 좌표계에서의 보간 연산은, 우리가 보기에 자연스럽게 직관적인 아이소메트릭 보간 결과물을 내놓는다는 사실도 볼 수 있었다. 그럼에도 불구하고 새로이 제안된 좌표계는 그 계산이나 구현이 간단하고 용이하여 손쉽게 사용될 수 있었다.

특히 본 저자들의 관심분야인 예제 기반 모델링 분야에서는 이러한 성질이 대단히 큰 이점으로 작용할 것으로 기대된다. 우선 가장 큰 효과로서 형상 왜곡으로 인한 치수 오차의 감소를 꼽을 수 있

다. 기존 연구들의 경우 단순히 선형 보간 기법을 사용하고 있기 때문에, 그림 4에서와 같은 형상 왜곡으로 인해 큰 치수 오차가 발생하게 된다. 물론 그림 4의 경우는 다소 과장된 것이고, 대부분의 경우 미리 자세와 위치를 정렬해두기는 하나, 모델 간의 완벽한 정렬이라는 것은 사실상 불가능하기 때문에, 이러한 오차의 여지는 여전히 남아있다고 볼 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안한 방법을 적용하게 되면 이로 인한 형상 왜곡을 효과적으로 막을 수 있으며, 따라서 치수 오차도 현격히 감소할 것으로 예상된다.

또한, 다른 비선형 형상 보간 방법들에 비해 본 논문에서 제안하는 방법은 한 번에 다수의 모델들에 대한 형상 보간이 가능하기 때문에 통계적 형상 해석 연구에서 특히 유리하다. 기존의 방법들은 그 비선형적 공식화 특성상 한 번에 두 개의 모델에 대한 일대일 보간밖에 계산해내지 못한다. 물론 이를 반복적으로 수행하여 다수의 모델에 대한 보간을 구현해낼 수도 있겠으나, 이는 대단히 많은 계산 시간이 요구되며 매우 비효율적이다. 반면, 본 논문에서 제안하는 방법의 경우, 단순 산술 연산을 통해 다수(두 개 이상)의 모델에 대한 보간을 계산해낼 수 있고, 추후 IDC와 RC로 표현된 보간 형상을 한 번만 유클리드 좌표계로 변환해주면 되기 때문에 대단히 효율적이다. 따라서 보간하고자 하는 모델이 몇 개로 늘어나든 지에 관계없이 유클리드 좌표계로의 재건은 한 번만 일어나기 때문에 다수의 모델을 한꺼번에 고려해야 하는 통계적 형상 해석 연구나 예제 기반 모델링 연구에 특히 유용하다.

한편, 본 논문에서 제안한 새로운 좌표계를 응용하면, 형상 모델링 및 에디팅에도 적용이 가능할 것으로 기대된다. 원래 모델에서 계산한 IDC와 RC는 그대로 유지한 채, 유클리드 좌표계로 재건하는 과정에서 식 (7)과 (9)에 하나 이상의 구속조건을 부여할 수 있도록 개선하면 사용자가 원하는 대로 자연스럽게 형상을 변형할 수 있을 것이다. 허나 이러한 응용을 위해서는 과도한 구속조건에 대해 기하학적으로 적절히 대처할 수 있는 방편 또한 필요할 것으로 예상된다. 구속조건을 부가하는 과정에서 기하학적으로 지나치게 과도한 변형을 야기하는 경우, 이를 형상 최적화 등을 통해 왜곡을 최소화하는 식으로 알고리즘을 개선할 수 있을 것이라 사료된다. 이러한 것이 가능해지고 나

면, 최소한의 수정으로 자연스러운 변형이 가능해진다는 점에서 대단히 유용한 형상 에디팅 기법이 될 것이라 생각되며, 구체적인 기술에 관해서는 본 논문의 후속 연구로 남겨두고자 한다.

## 감사의 글

이 논문은 2013년도 정부(교육부, 미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2013-065185, 2013R1A6A3A04058094).

## References

1. Hsiao, S.-W. and Liu, M.C., 2002, A Morphing Method for Shape Generation and Image Prediction in Product Design, *Design Studies*, 23(6), pp.533-556.
2. Sofla, A.Y.N., Meguid, S.A., Tan, K.T. and Yeo, W.K., 2010, Shape Morphing of Aircraft Wing: Status and Challenges, *Materials & Design*, 31(3), pp.1284-1292.
3. Blanz, B. and Vetter, T., 1999, A Morphable Model for the Synthesis of 3d Faces, *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '99)*, Los Angeles, CA, USA, pp.187-194.
4. Allen, B., Curless, B. and Popovic, Z., 2003, The Space of of Human Body Shapes: Reconstruction and Parameterization from Range Scans, *ACM Transactions on Graphics*, 22(3), pp.587-594.
5. Baek, S.-Y. and Lee, K., 2012, Parametric Human Body Shape Modeling Framework for Human-centered Product Design, *Computer-Aided Design*, 44(1), pp.56-67.
6. Praun, E., Sweldens, W. and Schröder, P., 2001, Consistent Mesh Parameterizations, *Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '01)*, Los Angeles, CA, USA, pp.179-184.
7. Yu, J.-B. and Chuang, J.-H., 2003, Consistent Mesh Parameterizations and Its Application in Mesh Morphing, *Proceedings of Computer Graphics Workshop*, Hualien, Taiwan.
8. Kraevoy, V. and Sheffer, A., 2004, Cross-parameterization and Compatible Remeshing of 3D Models, *ACM Transactions on Graphics*, 23(3), pp.861-869.
9. Yeh, I.C., Lin, C.H., Sorkine, O. and Lee, T.Y., 2011, Template-based 3d Model Fitting Using Dual-domain Relaxation, *IEEE Transactions on*

- Visualization and Computer Graphics*, 17(8), pp.1178-1190.
10. Sheffer, A., Praun, E. and Rose, K., 2006, Mesh parameterization Methods and Their Applications, *Foundations and Trends<sup>®</sup> in Computer Graphics and Vision*, 2(2), pp.105-171.
  11. Park, S.I. and Hodgins, J.K., 2006, Capturing and Animating Skin Deformation in Human Motion, *ACM Transactions on Graphics*, 25(3), pp.881-889.
  12. James, D.L. and Twigg, C.D., 2005, Skinning Mesh Animations, *ACM Transactions on Graphics*, 24(3), pp.399-407.
  13. Jacobson, A. and Sorkine, O., 2011, Stretchable and Twistable Bones for Skeletal Shape Deformation, *ACM Transactions on Graphics*, 30(6), Article No. 165.
  14. Kilian, M., Mitra, N.J. and Pottmann, H., 2007, Geometric Modeling in Shape Space, *ACM Transactions on Graphics*, 26(3), Article No. 64.
  15. Alexa, M., Cohen-Or, D. and Levin, D., 2000, As-rigid-as-possible Shape Interpolation, *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '00)*, New Orleans, LA, USA, pp.157-164.
  16. Sorkine, O. and Alexa, M., 2007, As-rigid-as-possible Surface Modeling, *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry (SGP '07)*, Barcelona, Spain, pp.109-116.
  17. Xu, D., Zhang, H., Wang, Q. and Bao, H., 2006, Poisson Shape Interpolation, *Graphical Models*, pp.268-281.
  18. Baxter, W., Barla, P. and Anjyo, K., 2008, Rigid Shape Interpolation Using Normal Equations, *Proceedings of the 6th International Symposium on Non-photorealistic Animation and Rendering*, Annecy, France, pp.59-64.
  19. Alexa, M., 2003, Differential Coordinates for Local Mesh Morphing and Deformation, *The Visual Computer*, 19(2-3), pp.105-114.
  20. Lipman, Y., Sorkine, O., Cohen-Or, D., Levin, D., Rössl, C. and Seidel, H.P., 2004, Differential Coordinates for Interactive Mesh Editing, *Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Applications 2004 (SMI 2004)*, Genova, Italy, pp.181-190.
  21. Lipman, Y., Sorkine, O., Levin, D. and Cohen-Or, D., 2005, Linear Rotation-invariant Coordinates for Meshes, *Proceedings of the 32nd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '05)*, Los Angeles, CA, USA, pp.479-487.
  22. Sheffer, A. and Kraevoy, V., 2004, Pyramid Coordinates for Morphing and Deformation, *Proceedings of 2nd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission 2004 (3DPVT 2004)*, Thessaloniki, Greece, pp.68-75.
  23. Terzopoulos, D., Platt, J., Barr, A. and Fleischer, K., 1987, Elastically Deformable Models, *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '87)*, Anaheim, CA, USA, pp.205-214.
  24. Igarashi, T., Moscovich, T. and Hughes, J.F., 2005, As-rigid-as-possible Shape Interpolation, *Proceedings of the 32nd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '05)*, Los Angeles, CA, USA, pp.1134-1141.
  25. Park, F.C. and Ravani, B., 1997, Smooth Invariant Interpolation of Rotations, *ACM Transactions on Graphics*, 16(3), pp.277-295.



### 백 승 엽

2009년 서울대학교 기계항공공학부 학사

2013년 서울대학교 기계항공공학부 박사

2013년~현재 서울대학교 정밀기계 설계공동연구소 선임연구원

2013년~현재 대통령 Post-Doc. Fellow

관심분야: Discrete Differential Geometry, Statistical Shape Analysis, Human Modeling, User-centered Design, 3D Printing, Medical CAD/CAM



### 이 건 우

1978년 서울대학교 기계공학과 학사

1981년 M.I.T 기계공학과 석사

1984년 M.I.T 기계공학과 박사

1984년~1986년 University of Illinois at Urbana-Champaign 조교수

1992년~1993년 M.I.T 기계공학과 객원부교수

1986년~현재 서울대학교 공과대학 기계항공공학부 교수

관심분야: CAD, Assembly Modeling, Multi-resolution Modeling, Rapid Prototyping, Medical Device, Human Modeling & Analysis