

논문 2014-51-5-1

새로운 블록순환 Hadamard 행렬

(The New Block Circulant Hadamard Matrices)

박 주 용*, 이 문 호**, 단 위***

(Ju Yong Park, Moon Ho Lee[Ⓢ], and Wei Duan)

요 약

본 논문에서는 기존 Toeplitz행렬(matrix)과 블록 순환(block circulant)행렬에 대해 검토하고, 새로운 순환 Hadamard 행렬을 제안했다. 제안한 순환 Hadamard 행렬은 +1과 -1로 구성되나 구조가 기존 Hadamard 행렬과는 다르다. 고속 알고리즘을 통해 원래의 계산량을 $M\log_2 N$ 개의 덧셈으로 줄일 수 있다. 이 행렬은 Massive MIMO 채널 추정 및 FIR 필터 설계, 신호처리 등에 응용이 가능하다.

Abstract

In this paper we review the typical Toeplitz matrices and block circulant matrices, and propose the a circulant Hadamard matrix which is consisted of +1 and -1, but its structure is different from typical Hadamard matrix. The proposed circulant Hadamard matrix decreases computational complexities to $M\log_2 N$ additions through high speed algorithm compare to original one. This matrix is able to be applied to Massive MIMO channel estimation, FIR filter design, and signal processing.

Keywords : Toeplitz, Circulant matrix, Hadamard matrix, Block circulant matrix.

I. 서 론

Toeplitz 행렬^[1-2]은 좌상쪽으로 부터 우하쪽으로 대각선을 따라 상수 원소를 가지는 구조를 가지고 있다.

* 평생회원, 신경대학교 인터넷정보통신학과
(Department of Internet, Information & Communication, Shyngyeong University)

** 평생회원, *** 전북대학교 전자공학부
(Division of Electronic Engineering, Chonbuk National University).

Ⓢ Corresponding Author(E-mail: moonho@jbnu.ac.kr)

※ 본 연구는 한국연구재단 MEST 2012-002521, NRF의 지원으로 수행되었음.

접수일자: 2013년11월 8일, 수정일자: 2013년12월3일

수정완료: 2014년 3월 1일

이러한 Toeplitz 행렬은 여러 분야에 응용될 수 있다^[1]. 즉, 미분과 적분방정식의 해를 구할 때나, 물리학, 수학, 통계학, 복잡한 정보이론에서 답을 구할 때라든지, Gaussian 채널의 채널용량을 구할 때나, 자기 회귀원(autoressive source)의 왜곡을 함수를 풀 때 뿐만 아니라 자기상관(autocorrelation), 상호상관(crosscorrelation)계산과 고유치 분포정리와 관련된 결과도출, 부호화 영역, 스펙트럼 추정, 워터마킹, 조합 해석, 음성 증강, 간섭 제거, 영상복원, 센서 네트워크, 적응필터링, 그래픽 모델, 잡음제거 등에 다양하게 응용되고 있다^[2]. 여기서 언급한 Toeplitz 행렬은 다음과 같이 두 가지로 분류된다. 첫 번째 분류는 순환행렬에 의해 형성된 것으로, 각 행벡터는 이전 열벡터와 관련되어 원소가 좌

측에서 우측으로 rotation 된다.

Gray의 논문 “Toeplitz and circulant matrices : A review”^[2]는 Toeplitz 행렬에 점근적(asymptotic) 이론을 가장 쉽게 소개한 유명한 논문이다. 이 논문이 성공한 비결은 Gray가 Toeplitz 행렬의 중요한 결과들을 증명하는데 사용한 수학적 tool들의 간결성 때문이었다. 특히 행렬의 동등한 시퀀스(sequence)의 개념을 점근적으로 사용하여 Toeplitz 행렬의 고유치, 곱, 역행렬의 점근적 결과를 증명하였다^[2].

본 논문의 구성은 II장에서 기존 Toeplitz 행렬을 소개하고, III장에서 12×12 블록순환 행렬을 제안하며, IV장에서는 블록 순환행렬을 수학적으로 증명한다. V장에서는 새로운 블록순환 Hadamard 행렬을 제안하고 마지막으로 VI장에서 결론을 맺는다.

II. 기존 Toeplitz Circulant 행렬

Toeplitz 행렬은 다음과 같은 $n \times n$ 행렬 T_n 으로, 대각선을 따라 상수 원소를 가지고 있으며 좌상쪽으로부터 우하쪽으로 천이되는 구조를 가지고 있다.

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & & \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{-n+1} & \dots & & & t_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, $1 \leq i, j \leq n$ 에 대해 $t_{i,j} = t_{j-i}$ 이다.

식(1)에서 보인 바와 같이 이 행렬은 여러 분야에 응용된다. 여를 들어 다음 식에서 x 는 열벡터로 입력을 나타내고, $i > 0$ 일 때 t_i 는 영(zero) 이다.

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

따라서 벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y = T_n x = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t_{-1} & t_0 & & & & \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ t_{-n+1} & & & & & t_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 x_0 \\ t_{-1} x_0 + t_0 x_1 \\ \sum_{k=0}^2 t_{k-2} x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} t_{k-n+1} x_k \end{pmatrix} \quad (3)$$

이때 행렬 원소는 다음과 같다.

$$y_i = \sum_{k=0}^i t_{k-i} x_k \quad (4)$$

벡터는 y 는 임펄스 응답이 t_k 인 이산시간 코잘(causal) 시불변(time-invariant) 필터의 응답을 타나 내고 있다.

Toeplitz 행렬의 특별한 경우로 행렬의 각 행이 상위 행으로부터 한 사이클씩 오른쪽으로 이동하여 $t = 1, 2, \dots, n-1$ 에 대해 $t_k = t_{-(n-k)} = t_{k-n}$ 되도록 한 경우가 있다. 이러한 경우를 행렬로 표시해보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_{-(n-1)} & t_0 & t_{-1} & & \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{-1} & t_{-2} & \dots & & t_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이러한 형태의 행렬을 순환행렬(circulant matrix)이라 한다. 이 행렬은 DFT(Discrete Fourier Transform)를 포함하여 오류수정을 위한 cyclic 부호연구에 이용되고 있다^[2].

Toeplitz 행렬에 대해 가장 잘 알려져 있고 논의 되고 있는 중요한 결과는 n 이 무한대로 증가함에 따라 고유값(eigenvalue)이 어떤 역할을 하는지를 다루는 Toeplitz 행렬 $\{T_n\}$ 의 시퀀스에 대한 Szegő의 정리이다. 다음식과 같은 영(zero) 이 아닌 벡터 x 가 존재 한다면 복소수 스칼라 α 는 행렬 A 의 고유값이다.

$$Ax = \alpha x \quad (6)$$

이 경우 x 는 A 의 고유벡터(eigenvector)이다.

고유값 $\{\alpha_i\}$ 가 $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \dots$ 와 같이 감소하지 않는 형태의 순서로 되어 있는 경우, 이는 적분을 이용하여 근사화 될 수 있으며, Hermitian Toeplitz 행렬 $T_n = [t_{k-j}; k, j = 0, 1, 2, \dots, n-1]$ 시퀀스에 대한 고유값 $\{\tau_{n,i}; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 점근적 역할을 다루는 Szegő의 정리에 일반성이 손실되지 않음을 의미한다. 이 정리는 몇 가지 만족해야할 기술적인 요구조건이 있다. 예를 들면 다음 식에 의해 서로 관련되어 있는 계수가 t_k 인 Fourier series가 존재해야 한다는 조건이다.

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda}; \quad \lambda \in [0, 2\pi] \quad (7)$$

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (8)$$

그래서 시퀀스 $\{t_k\}$ 는 함수 f 를 결정하고, 그 역도 마찬가지로 가능하다. 따라서 행렬의 시퀀스는 가끔 $T_n(f)$ 로 정의 된다. 만약 $T_n(f)$ 가 Hermitian 이라면 즉, $T_n(f)^* = T_n(f)$ 이라면, $t_{-k} = t_k^*$ 이고 f 는 실수 값이다.

적당히 가정을 하면 f 의 범위에서 연속인 함수 F 에 대해 Szegő의 정리는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda \quad (9)$$

III. 12×12 블록 순환 행렬

$2^k \times 2^l$ 행렬의 고유치 분해를 이용하여 다음과 같이 분해할 수 있다.

2×2 행렬은 식 (10)과 같이 분해 할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix}^{-1} \quad (10)$$

3×3 행렬은 식 (11)과 같이 고유치 분해가 가능하다.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\omega+c\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\omega^2+c\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}^{-1} \quad (11)$$

6×6 행렬은 식 (12)와 같이 고유치를 이용하여 분해가 가능하다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\omega+c\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\omega^2+c\omega \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}^{-1} \quad (12)$$

일반적으로 $A_1 = J_1 A_1 J_1^{-1}$ 와 같이 나타낼 수 있는데, 여기서 2×2 행렬 A_1 은 Jacket 행렬 J_1 을 이용하여 다음과 같이 고유치 분해가 가능하다.

$$A_2 = J_2 \Lambda_2 J_2^{-1} \quad (13)$$

여기서 3×3 행렬 A_2 는 Jacket 행렬 J_2 를 이용하여 고유치 분해를 나타냈다. 따라서 6×6 행렬은 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$A_1 \otimes A_2 = (J_1 \otimes J_2)(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)(J_1 \otimes J_2)^{-1} \quad (14)$$

Kronecker 곱을 이용하면 J_{p^n} 을 기반으로 하여 다음과 같이 고유치 분해 일반식을 쓸 수 있다.

$$A_{p^n} = J_{p^n}^{-1} \Lambda_{p^n} J_{p^n} \quad (15)$$

여기서 $A_{p^n} = A_{p^{n-1}} \otimes A_p = A_{p^n}^{\otimes n}$, $J_{p^n} = J_{p^{n-1}} \otimes J_p = J_{p^n}^{\otimes n}$, $\Lambda_{p^n} = \Lambda_{p^{n-1}} \otimes \Lambda_p = \Lambda_{p^n}^{\otimes n}$ 이다.

일반적으로 $A_{2^m} = J_{2^m} \Lambda_{2^m} J_{2^m}^{-1}$ 과 $A_{3^n} = J_{3^n} \Lambda_{3^n} J_{3^n}^{-1}$ 을 가정하면 식 (16)을 얻을 수 있다.

$$A_{2^m \times 3^n} = A_{2^m} \otimes A_{3^n} = (J_{2^m} \Lambda_{2^m} J_{2^m}^{-1}) \otimes (J_{3^n} \Lambda_{3^n} J_{3^n}^{-1}) = (J_{2^m} \otimes J_{3^n})(\Lambda_{2^m} \otimes \Lambda_{3^n})(J_{2^m} \otimes J_{3^n})^{-1} \quad (16)$$

예를 들어 12×12 Jacket 행렬^[11] J_{12} 는 다음과 같이 쓸 수 있으며, 표 1에 Jacket 행렬의 고속 알고리즘을 사용한 경우 계산량을 비교하였고, 그림 1에는 J_{12} 의 고속 알고리즘 신호 흐름도를 나타냈다.

$$J_{12} = J_{2^2} \otimes J_3 = (J_2 \otimes J_2) \otimes J_3 = (J_2 \otimes I_2 \otimes I_3)(I_2 \otimes J_2 \otimes I_3)(I_2 \otimes I_2 \otimes J_3) \quad (17)$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & -1 & -\omega & -\omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & -1 & -\omega & -\omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega & -1 & -\omega^2 & -\omega & 1 & \omega^2 & \omega & -1 & -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & -1 & -\omega & -\omega^2 & -1 & -\omega & -\omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega & -1 & -\omega^2 & -\omega & -1 & -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & -1 & -\omega & -\omega^2 & -1 & -\omega & -\omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega & -1 & -\omega^2 & -\omega & -1 & -\omega^2 & -\omega & 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

표 1. 블록 Jacket 행렬의 고속 알고리즘을 이용한 계산량 비교

Table 1. The Complexity Comparison of Fast Algorithm Based on Block Jacket Matrices.

	DCA	JA FOR $N = p^k$	JA FOR $N = p^m q^n$
ADD	$(N-1)N$	$(p-1)Nk$	$mN(p-1) + nN(q-1)$
MUL	N^2	$\frac{(p-1)}{p} Nk$	$\frac{mN}{p}(p-1)^2 + \frac{nN}{q}(q-1)^2$

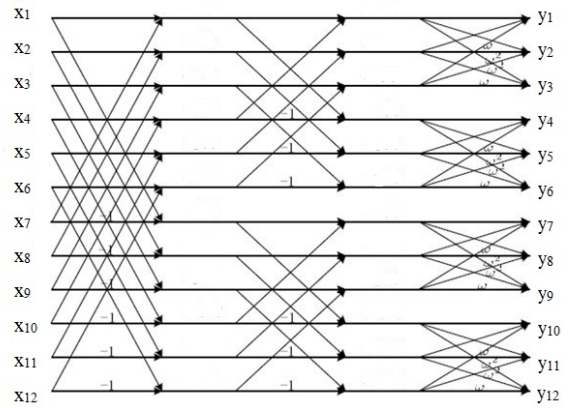


그림 1. J_{12} 의 고속 알고리즘 신호 흐름도
Fig. 1. The Fast Algorithm Signal Flow Graph of J_{12} .

IV. 블록 순환 행렬

블록 순환(block circulant) 행렬이라는 블록 Toeplitz 행렬^[5,7,9]과 같은 특별한 형태는 연속적인 행렬의 원소값을 갖는 함수에 의해 생성된 블록 Toeplitz 행렬이 점근적(asymptotic)으로 어떻게 작용하는지를 연구하는데 이용된다. 블록 순환 행렬의 개념을 다시 언급하면서 블록 Toeplitz 행렬형태에 대해 알아본다^[9-12].

정의 1. $M \times N$ 블록을 갖는 $n \times n$ 블록 순환 행렬은 다음과 같은 형태를 갖는 $nM \times nN$ 행렬이다.

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_{-1} & C_{-2} & \dots & C_{1-n} \\ C_{1-n} & C_0 & C_{-1} & \dots & C_{2-n} \\ C_{2-n} & C_{1-n} & C_0 & \dots & C_{3-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{-1} & C_{-2} & C_{-3} & \dots & C_0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

여기서 $C_k \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $1-n \leq k \leq 0$ 이다.

따라서 $nM \times nN$ 행렬 $C = (C_{j,k})_{j,k=1}^n$ 은 $(j_1 - k_1) - (j_2 - k_2) \in \{-n, 0, n\}$ 인 경우 $C_{j_1, k_1} = C_{j_2, k_2}$ 이 성립하면, $M \times N$ 블록을 갖는 $n \times n$ 블록 순환 행렬이다. 식 (18)의 행렬은 $\text{circ}(C_0, C_{-1}, \dots, C_{1-n})$ 으로 나타낼 수 있다. $M=N=1$ 인 경우 이 행렬은 단순히 $n \times n$ 순환 행렬이 된다. 다음 결과는 블록 순환 행렬 이 된다.

정리 1. $C = (C_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{nM \times nN}$ 아라 놓으면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

- (1) C 는 $M \times N$ 블록을 갖는 $n \times n$ 블록 순환 행렬이다.
- (2) 다음이 성립하는 과 같은 $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 이 존재한다.

$$C = (V_n \otimes I_M) \text{diag}(A_1, \dots, A_n) (V_n \otimes I_M)^* \quad (19)$$

여기서 \otimes 은 Kronecker 곱을 의미하며,

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_n) = \text{diag}_{1 \leq k \leq n}(A_k) := (\delta_{j,k} A_j)_{j,k=1}^n$$

이고, $\delta_{j,k}$ 는 Kronecker delta이다. 그리고 V_n 은 $n \times n$ Fourier unitary 행렬이다.

$$[V_n]_{j,k} := \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{2\pi(j-1)(k-1)}{n}i}, \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (20)$$

또한 C 가 블록 순환 행렬이면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sqrt{n} (V_n \otimes I_M)^* \begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \vdots \\ C_{n,1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

증명 식 (18)을 식(21)에 대입하면 $V_n \otimes I_M$ 는

unitary(unitary의 의미는 $UU^* = U^*U = I$ 를 나타내고 여기서 *는 Hermitian(Conjugate Transpose)이며 I 는 단위행렬이다)하다. 이유는 다음 식 (22)와 (23)가 성립하기 때문이다.

$$\begin{aligned} (V_n \otimes I_M)(V_n \otimes I_M)^* &= (V_n \otimes I_M)(V_n^* \otimes I_M^*) \\ &= V_n V_n^* \otimes I_M I_M^* = I_n \otimes I_M = I_{n,M} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (V_n \otimes I_M)^*(V_n \otimes I_M) &= (V_n^* \otimes I_M^*)(V_n \otimes I_M) \\ &= V_n^* V_n \otimes I_M^* I_M = I_n \otimes I_M = I_{n,M} \end{aligned} \quad (23)$$

결과적으로 만약 $D = (V_n \otimes I_M)^*(V_n \otimes I_N) \in \mathbb{C}^{nM \times nN}$ 이면 $C = (V_n \otimes I_N)(V_n \otimes I_N)^*$ 임을 알 수 있다.

이제 행렬 A_1, \dots, A_n 에 대한 $D = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ 이 모든 $1 \leq j, k \leq n$ 에 대해 식 (21)을 만족함을 증명하기 위해 식 (24)을 얻는다.

$$\begin{aligned} D_{j,k} &= [(V_n \otimes I_M)^* C (V_n \otimes I_N)]_{j,k} = [(V_n^* \otimes I_M^*) C (V_n \otimes I_N)]_{j,k} \\ &= [(V_n^* \otimes I_M) C (V_n \otimes I_N)]_{j,k} = \sum_{h=1}^n [V_n^* \otimes I_M]_{j,h} [C (V_n \otimes I_N)]_{h,k} \\ &= \sum_{h=1}^n [V_n^* \otimes I_M]_{j,h} \sum_{l=1}^n [C_{h,l} (V_n \otimes I_N)]_{l,k} \\ &= \sum_{h=1}^n [V_n^*]_{j,h} I_M \sum_{l=1}^n C_{h,l} ([V_n]_{l,k} I_N) = \sum_{h=1}^n \overline{[V_n]_{h,j}} \sum_{l=1}^n [V_n]_{l,k} C_{h,l} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{l,k} C_{h,l} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^h \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{l,k} C_{h,l} + \sum_{h=1}^n \sum_{l=h+1}^n \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{l,k} C_{h,l} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^h \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{l,k} C_{h-l+1,1} + \sum_{h=1}^n \sum_{l=h+1}^n \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{l,k} C_{n+h-l+1,1} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^h \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{h-\hat{l}+1,k} C_{\hat{l},1} + \sum_{h=1}^n \sum_{l=h+1}^n \overline{[V_n]_{h,j}} [V_n]_{n+h-\hat{l}+1,k} C_{\hat{l},1} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{l}=1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n}i} e^{-\frac{2\pi(h-\hat{l})(k-1)}{n}i} C_{\hat{l},1} \\ &+ \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{l}=h+1}^n \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n}i} e^{-\frac{2\pi(n+h-\hat{l})(k-1)}{n}i} C_{\hat{l},1} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{l}=1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n}i} e^{-\frac{2\pi(h-\hat{l})(k-1)}{n}i} C_{\hat{l},1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=h+1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n} i} e^{\frac{2\pi(h-\hat{i})(k-1)}{n} i} e^{-2\pi(k-1)i} C_{\hat{i},1} \\
& = \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n} i} e^{\frac{2\pi(h-\hat{i})(k-1)}{n} i} C_{\hat{i},1} \\
& + \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=h+1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n} i} e^{\frac{2\pi(h-\hat{i})(k-1)}{n} i} C_{\hat{i},1} \\
& = \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n} i} e^{\frac{2\pi(h-\hat{i})(k-1)}{n} i} C_{\hat{i},1} \\
& = \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)}{n} i} e^{\frac{2\pi(h-1)+(1-\hat{i})(k-1)}{n} i} C_{\hat{i},1} \\
& = \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=1}^h \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-1)-(k-1)}{n} i} e^{\frac{2\pi(\hat{i}-1)(k-1)}{n} i} C_{\hat{i},1} \\
& = \sum_{h=1}^n \sum_{\hat{i}=1}^h \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi(h-1)(j-k)}{n} i} [V_n]_{\hat{i},k} C_{\hat{i},1} \\
& = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{h=1}^n e^{\frac{2\pi(h-1)(j-k)}{n} i} \right) \left(\sum_{\hat{i}=1}^n [V_n]_{\hat{i},k} C_{\hat{i},1} \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{h=1}^n (e^{\frac{2\pi(j-k)}{n} i})^{h-1} \right) \left(\sum_{\hat{i}=1}^n [V_n^*]_{k,\hat{i}} I_M C_{\hat{i},1} \right) \\
& = \frac{n \delta_{j,k}}{\sqrt{n}} \sum_{\hat{i}=1}^n [V_n^* \otimes I_M]_{k,\hat{i}} I_M C_{\hat{i},1} = \delta_{j,k} \sqrt{n} \sum_{\hat{i}=1}^n [(V_n \otimes I_M)^*]_{k,\hat{i}} I_M C_{\hat{i},1} \\
& = \delta_{j,k} \begin{bmatrix} \sqrt{n} (V_n \otimes I_M)^* \\ C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ \vdots \\ C_{n,1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{24}$$

$M=N=1$ 일 때 정리 1로부터 순환행렬의 고유치 분해를 얻을 수 있고 이때 고유벡터 행렬은 unitary하다.

순환행렬과 기존 Toeplitz 행렬은 실제로 고유치 분해를 알고 있는 Toeplitz 행렬 형태여야만 한다는 것을 알 수 있다.

V. 새로 제안한 블록순환 Hadamard 행렬

순환행렬 C 는 DFT에 의해 대각화될 수 있으며, 이 행렬을 포함한 선형방정식(linear equation)은 고속 푸리에 변환(FFT)을 사용하여 쉽게 해를 구할 수 있다.

$$C_4 = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

여기서 $C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 이고 $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 이다.

블록 순환 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$C = [V_2 I_2] \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} [V_2 I_2]^* \tag{26}$$

여기서 V_2 는 2×2 Haar행렬이고, A_0 와 A_1 은 순환행렬의 고유치이다.

고유치 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} &= \sqrt{2} [V_2 \otimes I_2]^* \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{2} \begin{bmatrix} C_0 + C_1 \\ C_0 - C_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{27}$$

여기서 $A_0 = C_0 + C_1$ 이고 $A_1 = C_0 - C_1$ 이다.

따라서 순환행렬의 고유치와 고유벡터는 $\{2, -2, 2, -2\}$

와 $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ 이다.

본 논문에서는 예 1과 같은 새로운 블록순환 Hadamard 행렬을 제안한다.

예 1. 새로운 블록순환 Hadamard 행렬

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

그림 2에는 새로운 수정 Hadamard 행렬 C_4 의 고속 알고리즘을 보이고 있다.

8×8 블록순환 Hadamard 행렬 C_8 과 그의 sparse

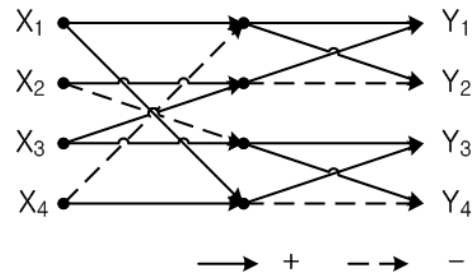


그림 2. 제안된 새로운 블록순환 Hadamard 행렬 C_4 의 고속 신호 흐름도

Fig. 2. The High Speed Signal Flow Graph of Proposed Block Circulant Modified Hadamard Matrix C_8 .

Facts, and Formulas, Princeton University Press, 2009.

[5] A. Böttcher, J. Gutiérrez-Gutiérrez, and P. M. Crespo, “Mass Concentration in Quasicommutators of Toeplitz Matrices,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 205, pp. 129-148, 2007.

[6] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley, 2005.

[7] P. M. Crespo and J. Gutiérrez-Gutiérrez, “On the Elementwise Convergence of Continuous Functions of Hermitian Banded Toeplitz Matrices,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.53, no.3, pp.1168-1176, March 2007.

[8] J. Gutiérrez-Gutiérrez, I. Iglesias and A. Podhorski, “Geometric MMSE for One-Sided and Two-Sided Vector Linear Predictors: From the Finite-Length Case to the Infinite-Length Case,” *Signal Processing*, vol.91, pp.2237-2245, 2011.

[9] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1994.

[10] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.

[11] M. H. Lee, *Jacket Matrices: Construction and Its Applications for Fast Cooperative Wireless signal Processing*, LAP LAMBERT, Germany, 2012.

[12] M. H. Lee, M. M. Matalgah and W. Song, “Fast method for precoding and decoding of distributive multi-input multi-output channels in relay-based decode-and-forward cooperative wireless networks,” *IET Communications*, vol. 4, Issue 2, 22 , pp. 144 - 153, January 2010.

— 저 자 소 개 —



박 주 용(평생회원)
 1982년 전북대학교 전자공학과 석사
 1994년 전북대학교 전자공학과 박사
 1991년 3월~2007년 2월 서남대학교 전자공학부 부교수

2007년 3월~현재 신경대학교 인터넷정보통신학과 부교수

<주관심분야 : 무선이동통신>



이 문 호(평생회원)-교신저자
 1984년 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사
 1985년~1986년 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터
 1990년 일본동경대학 정보통신공학과박사

1970년~1980년 남양MBC 송신소장

1980년 10월~2010년 2월 전북대학교 전자공학부 교수

2010년 2월~2013년 8월 WCU-2 연구책임교수

2013년 8월~현재 전북대학교연구교수

<주관심분야 : 무선이동통신>



단 위
 2010년 2월~2012년 2월 전북대학교 석사
 2012년 9월~현재 전북대학교 박사 과정