

# 일차 홀드 방식의 반력 구현 시스템에 대한 안정성 해석

## Stability Analysis of a Haptic System with a First-Order-Hold Method

이 경 노\*  
(Kyungno Lee<sup>1,\*</sup>)

<sup>1</sup>Department of Energy System Engineering, Korea National University of Transportation

**Abstract:** This paper presents the effect of a reflective force computed from a first-order-hold method on the stability of a haptic system. A haptic system is composed of a haptic device with a mass and a damper, a virtual spring, a sampler and a sample-and-hold. The boundary condition of the maximum virtual stiffness is analytically derived by using the Routh-Hurwitz criterion and the condition shows that the maximum virtual stiffness is proportional to the square root of the mass and the damper of a haptic device and also is inversely proportional to the sampling time to the power of three over two. The effectiveness of the derived condition is evaluated by the simulation. When the reflective forces are computed by using the first-order-hold method, the maximum available stiffness to guarantee the stability is increased several hundred times as large as when the zero-order-hold method is applied.

**Keywords:** haptic control, sample-and-hold, stability, virtual spring impedance, Routh-Hurwitz criterion.

### I. 서론

원격 조종 로봇을 제어할 때 현장감을 향상시키거나 가상현실에 대한 몰입감을 향상시키기 위해서 햅틱 시스템이 많이 활용된다[1,2]. 특히 가상현실과 상호작용하는 햅틱 시스템은 컴퓨터 그래픽으로 구현된 가상현실의 이산 시스템과 사용자에 대한 입출력 정보를 전달해주는 햅틱 장치의 연속 시스템으로 구성된다. 따라서 연속 시스템의 정보를 이산 시스템으로 전달하고, 이산 시스템의 정보를 연속 시스템으로 전달하기 위해서 샘플러(sampler)와 샘플-홀드(sample-and-hold)가 필요하다. 그러나 샘플-홀드에 의해 발생하는 시간 지연은 시스템 내에 에너지를 발생시켜 햅틱 시스템을 불안정하게 만들며, 때론 사용자의 안전을 위협하기도 한다. 따라서 햅틱 시스템의 안정성 해석이 중요하다.

햅틱 시스템의 안정성만큼 햅틱 시스템 내의 가상현실에 대한 몰입감 향상도 중요하다. 사용자가 가상 강체를 느끼기 위해서는 가상 강체의 임피던스를 매우 크게 설계하면 되지만, 임피던스가 커지면 커질수록 햅틱 시스템은 불안정해진다. 따라서 햅틱 시스템의 안정성 확보는, 물론 가상 강체의 임피던스를 크게 할 수 있는 제어 방법이 필요하다. 따라서 본 논문에서는 샘플-홀드 방식 중 일반적으로 사용되는 영차 홀드 방식(zero-order hold) 대신 일차 홀드 방식(first-order hold)으로 반력을 구현할 때 시스템의 안정성을 보장하는 가상 강체의 최대 임피던스를 수학적 해석방법인 루드-후르비츠 판별법(Routh-Hurwitz criterion)을 이용하여 해석하고자 한다.

Colgate [3]은 가상 스프링과 가상 댐퍼로 구성된 가상

커플링(virtual coupling)을 개념을 도입하여 시스템 안정성을 보장하는 가상 커플링의 임피던스 범위를 햅틱 장치의 댐퍼, 샘플링 주기, 그리고 스프링 상수와 관계로 유도하였다. Abbott와 Okamura [4]는 햅틱 장치를 쿨롱 및 점성 마찰력을 포함한 질량으로 모델화하여 시스템 안정성 조건을 해석했으며, Diolaiti [5]는 샘플링 주기, 시간지연(time delay), 양자화(quantization), 햅틱 장치의 쿨롱 마찰력과 시스템 안정성의 관계를 수동성(passivity)의 측면에서 분석했다. Gil [6]은 1-자유도 시스템에 대해서 루드-후르비츠 판별법(Routh-Hurwitz criterion)을 이용하여 가상 스프링, 가상 댐퍼, 햅틱 장치의 댐핑 상수와 시스템 안정성과의 관계를 분석했다. 이문환[7]은 시스템의 안정성 해석을 통한 비선형 가상 커플링을 제안하여 가상 강체의 임피던스를 크게 설계할 수 있는 방법을 제안했다. Hulin [8]과 Gil [9]는 햅틱 장치의 물리적 댐핑과 시간지연에 의한 시스템 안정성을 해석했다. 그렇지만, 상기 기존 연구들은 영차 홀드 방식에 근거를 둔 것이다. 최근에는 일차 홀드 방식을 이용한 반력 구현 방법이 시스템의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구가 진행되고 있다[10,11].

본 논문에서는 햅틱 시스템의 안정성은 유지하면서 기존 연구에서의 가상 강체 임피던스보다 큰 임피던스를 구현할 수 있는, 그래서 가상 강체에 대한 현실감과 몰입감을 향상시킬 수 있는 방법을 일차 홀드 방식을 통하여 제시한다. 그리고 수학적 해석방법을 이용하여 샘플링주기 ( $T$ ), 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ )과 댐핑 상수( $B_d$ )와 가상 스프링 상수 ( $K_w$ )와의 관계를 유도한다.

### II. 일차 홀드식 반력 구현 및 안정성 해석

햅틱 시스템의 불안정 요인 중 하나는 영차 홀드 방식으로 반력을 구현할 때 발생하는 시간지연이다. 일반적으로

\* Corresponding Author

Manuscript received October 1, 2013 / revised November 5, 2013 / accepted November 28, 2013

이경노: 한국교통대학교 에너지시스템공학과(klee@ut.ac.kr)

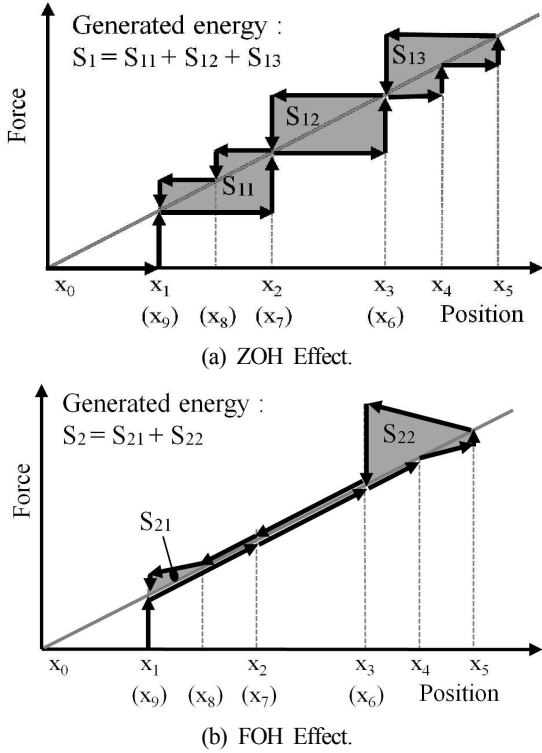


그림 1. 영차 홀드와 일차 홀드 방식에 의해 발생된 에너지[11].  
Fig. 1. Examples of the generated energy by ZOH and FOH effect respectively [11].

가상 강체로부터의 반력은 가상 강체의 외벽으로부터 삽입된 깊이에 가상 스프링 상수를 곱해서 계산된다. 그림 1은 샘플-홀드 방식별로 반력이 구현되는 과정을 보여주는 것으로 가상 강체 외벽의 위치는  $x_0$ 이고, 가상 강체 내부로 삽입되는 과정의 변위 순서는  $x_0$ 에서  $x_5$ 이고, 가상 강체 내부에서 외부로 빠져나가는 과정의 변위 순서는  $(x_6)$ 에서  $(x_9)$ 이다. 이 때 햅틱 시스템 내부에서는 음영으로 표시된 면적의 합만큼 에너지가 발생하며, 이 에너지가 크면 클수록 시스템은 불안정해진다. 그림 1(a)의 영차 홀드 방식과 그림 1(b)의 일차 홀드 방식을 비교해보면, 일차 홀드 방식을 이용하여 반력을 구현할 때 햅틱 시스템 내부에서 발생하는 에너지의 양이 작을 수 있다. 즉  $S_2 < S_1$ 일 수 있다. 따라서 햅틱 시스템이 더 안정화될 수 있으며, 이를 수학적 해석을 통해 검증하고자 한다.

시스템 안정성을 해석하기 위해서 햅틱 시스템을 모델화한다. 햅틱 시스템은 햅틱 장치의 변위를 측정하여 샘플링한 후 샘플-홀드를 통해 반력을 사용자에게 전달하는 임피던스 방식(impedance type)으로 가정한다. 가상 강체는 가상 스프링으로 모델화되며 시스템 구성은 그림 2와 같다.

샘플링 주기는  $T$ 이고, 햅틱 장치는 질량 ( $M_d$ )와 댐퍼 ( $B_d$ )로 구성된 2차 시스템으로 모델화되며 1-자유도 시스템에 대한 전달함수  $D(s)$ 는 (1)과 같다. 그리고 샘플-홀드 방식인 일차 홀드 방식의 전달함수,  $G_{h1}(s)$ 는 (2)와 같다. 그리고 가상 강체 모델은 스프링 상수  $K_w$ 로 모델화된다. 인간 모델은 고려하지 않는다.

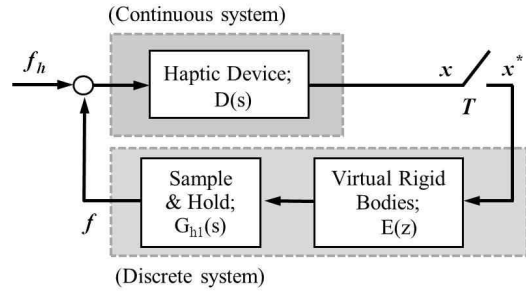


그림 2. 가상 강체 모델에 대한 햅틱 시스템 구성도.  
Fig. 2. Configuration of haptic system.

$$D(s) = \frac{1}{M_d s^2 + B_d s} \quad (1)$$

$$G_{h1}(s) = \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right)^2 \frac{Ts + 1}{T} \quad (2)$$

따라서 그림 2의 햅틱 시스템 전체에 대한 출력은 (3)과 같고, 전달함수의 특성 방정식은 (4)와 같다. 여기서  $E(z) = K_w$ 이다.

$$x^* = \frac{Z[Df_h]}{1 + Z[G_{h1}D]E(z)} \quad (3)$$

$$1 + (1 - z^{-1})^2 \cdot Z \left[ \frac{Ts + 1}{Ts^2} D(s) \right] E(z) = 0 \quad (4)$$

식 (4)를 해석하기 위해서는  $s$ -영역의 전달함수를  $z$ -영역의 전달함수로 변환해야하며, 따라서  $Z[ ]$ 안의 전달함수는 (5)와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} Z \left[ \frac{Ts + 1}{Ts^2} \frac{1}{M_d s^2 + B_d s} \right] \\ = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{C T^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2 (1 - z^{-1})^3} \\ + \frac{D}{M_d (1 - e^{-aT} z^{-1})} \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} a = \frac{B_d}{M_d}, \quad A = \frac{1}{a B_d} \left[ \frac{1}{aT} - 1 \right], \quad B = \frac{1}{B_d} \left[ 1 - \frac{1}{aT} \right], \\ C = \frac{1}{T B_d}, \quad D = \frac{1}{a^2} \left[ 1 - \frac{1}{aT} \right]. \end{aligned}$$

식 (3)의 특성 방정식은 최종적으로 (6)과 같이 정리된다.

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0 \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} P = -1 - e^{-aT} + \frac{K_w e^{-aT}}{a B_d} - \frac{K_w}{a^2 B_d T} e^{-aT} \\ + \frac{3}{2} \frac{T K_w}{B_d} - \frac{2 K_w}{a B_d} + \frac{K_w}{a^2 B_d T} \\ Q = e^{-aT} - \frac{e^{-aT} K_w}{a B_d} + \frac{2 e^{-aT}}{a^2 T B_d} K_w - \frac{3 T e^{-aT}}{2 B_d} K_w \end{aligned}$$

$$R = -\frac{TK_w}{2B_d} + \frac{3K_w}{aB_d} - \frac{2K_w}{a^2B_dT} - \frac{e^{-aT}}{a^2TB_d}K_w + \frac{Te^{-aT}}{2B_d}K_w - \frac{K_w}{aB_d} + \frac{K_w}{a^2TB_d}$$

루드-후르비츠 판별법(Routh-Hurwitz criterion)을 이용하여 시스템의 안정성을 판별하기 위해서 (6)에  $z = \frac{w+1}{w-1}$  을 대입하여  $w$  에 대한 다항식으로 정리한다. 그 결과는 (7)이 된다.

$$Fw^3 + Gw^2 + Hw + I = 0 \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} F &= \frac{TK_w}{B_d}(1-e^{-aT}) \\ G &= 2(1-e^{-aT}) + \frac{2K_w}{aB_d}(e^{-aT}-1) + \frac{2TK_w}{B_d} \\ H &= 4 - \frac{4K_w e^{-aT}}{a^2TB_d} - \frac{TK_w}{B_d} - \frac{4K_w}{aB_d} + \frac{4K_w}{Ta^2B_d} \\ &\quad + \frac{3TK_w e^{-aT}}{B_d} \\ I &= 2 + 2e^{-aT} - \frac{2M_d K_w e^{-aT}}{B_d^2} + \frac{4M_d^2 K_w e^{-aT}}{TB_d^3} \\ &\quad - \frac{2TK_w e^{-aT}}{B_d} - \frac{2TK_w}{B_d} + \frac{6M_d K_w}{B_d^2} - \frac{4M_d^2 K_w}{TB_d^3} \end{aligned}$$

루드-후르비츠 판별법(Routh-Hurwitz criterion)에 의하여 햅틱 시스템의 안정성(stability)은 (8)~(10)을 만족할 때 보장된다. 아래 조건식들을 만족시키는  $K_w$  의 공통 범위 중 최댓값을 구하면 그것이 시스템의 안정성을 보장하는 범위 내에서 가상 강체 임피던스의 최댓값이 된다. 각 조건식별로  $K_w$  의 범위를 분석한다.

$$\frac{G}{F} > 0 \quad (8)$$

$$\frac{GH-FI}{FG} > 0 \quad (9)$$

$$\frac{I}{F} > 0 \quad (10)$$

1. 조건식  $\frac{G}{F} > 0$  을 만족하는  $K_w$  범위

분모  $F$  는 모든  $K_w$  에 대해  $F = \frac{TK_w}{B_d}(1-e^{-aT}) > 0$  이 성립한다. 따라서  $G > 0$  을 만족하면 조건식이 성립한다.

$$G = 2(1-e^{-aT}) + \frac{2K_w}{aB_d}[e^{-aT} + aT - 1], \quad a = \frac{B_d}{M_d} > 0$$

이므로 조건식  $G$  에서  $(1-e^{-aT})$  과  $(e^{-aT} + aT - 1)$  모두 항상 0 보다 큰 것을 알 수 있다. 따라서  $K_w$  값에 관계없이 식  $G$  는 항상 0 보다 크고 (8)을 만족한다.

2. 조건식  $\frac{GH-FI}{FG} > 0$  을 만족하는  $K_w$  범위

식  $F$  와  $G$  는 항상 0 보다 크므로,  $FG > 0$  이다. 따라서  $GH - FI > 0$  을 만족하는  $K_w$  의 범위를 구하면 된다. 조건식은 (11)과 같이  $K_w$  차수별로 정리될 수 있으며, 이 식은 2차 방정식으로 정리되므로 근의 공식을 이용하여  $K_w$  의 최댓값을 구하면 된다.

$$GH - FI = C_2 K_w^2 + C_1 K_w + C_0 > 0 \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{4}{a^2TB_d^2} \left( \frac{aT-2}{a} \right) (1-e^{-aT})^2 + \frac{16(1-e^{-aT})}{a^2B_d^2} \\ &\quad - \frac{4T(1-e^{-2aT})}{aB_d^2} + \frac{2T^2}{B_d^2} e^{-aT} (3-e^{-aT}) - \frac{8T}{aB_d^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \left( \frac{8T}{B_d} \right) + \frac{4}{B_d} \left( \frac{2}{Ta^2} - T \right) (1-e^{-aT})^2 \\ &\quad - \frac{16(1-e^{-aT})}{aB_d} \end{aligned}$$

$$C_0 = 8(1-e^{-aT}).$$

3. 조건식  $\frac{I}{F} > 0$  을 만족하는  $K_w$  범위

앞서 설명한 바와 같이 모든  $K_w$  에 대하여, 분모식

$$F = \frac{TK_w}{B_d}(1-e^{-aT}) > 0 \text{ 성립한다. 따라서 } I > 0 \text{ 을 만족}$$

하면 조건식이 성립한다. 여기서  $I = 2 + 2e^{-aT} + \frac{2TK_w}{B_d} \left[ -\frac{e^{-aT}}{aT} + \frac{2e^{-aT}}{T^2a^2} - e^{-aT} - 1 + \frac{3}{aT} - \frac{2}{T^2a^2} \right]$

으로 정리된다. 식 (12)를 그래프로 그려서 살펴보면,  $0 < x < 1$  범위에서는 모든  $K_w$  값에 대하여 성립함을 알

수 있다. 그런데 일반적으로  $0 < aT = \frac{B_d}{M_d} T < 1$  이 성립하

므로, (10)도  $K_w$  값에 관계없이 항상 성립한다.

$$-\left[ \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2e^{-x}}{x^2} + e^{-x} + 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right] > 0 \quad (12)$$

where  $x = aT$ .

### III. 안정성 조건의 단순화

햅틱 시스템의 안정성을 보장하기 위한 최종 조건으로  $GH - FI > 0$  이 유도되며,  $K_w$  의 범위를 근의 공식을 통해 구해낸다. 하지만 이 관계식을 통해서 햅틱 시스템의 구성요소들과 안정성과의 관계를 파악하기가 어렵다. 따라서 샘플링 주기  $T$ , 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ ), 댐퍼 ( $B_d$ )와 가상 강체의 스프링 상수  $K_w$  의 관계를 살펴보기 위해서 조건식  $GH - FI$  에서 상대적으로 큰 비중을 차지하는 항만 고려하여 단순화된 안정성 조건식을 유도하고자 한다. 이를 위해서 지수함수가 포함된 항을 다항식의 형태로 바꾼다.

테일러급수 (taylor series)를 이용하여  $e^{-y}$  를 무한급수의 형태,  $e^{-y} = 1 - y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 - \frac{1}{120}y^5 + \dots$  으로 치환한다. 하지만 테일러급수를 몇 차수까지 고려하느냐에

표 1. 테일러 급수 차수에 따른  $K_w$  최댓값 및 상대 오차.

Table 1. Relative error (%) and maximum of  $K_w$  according to the order of the Taylor's series.

T (sec)	Analytic solution		2 <sup>nd</sup> order polynomial		3 <sup>rd</sup> order polynomial	
	$K_w$ (N/m)	$K_w$ (N/m)	Error (%)	$K_w$ (N/m)	Error (%)	
0.001	12211	9975	18.31	12211	0.00	
0.002	4312	3523	18.29	4312	0.00	
0.003	2345	1916	18.28	2345	0.00	
0.004	1522	1243	18.27	1521	0.00	
0.005	1088	889	18.26	1088	0.01	
0.006	827	676	18.25	827	0.01	
0.007	656	536	18.25	656	0.01	
0.008	537	438	18.24	536	0.01	
0.009	450	367	18.23	449	0.01	
0.01	384	313	18.23	383	0.01	

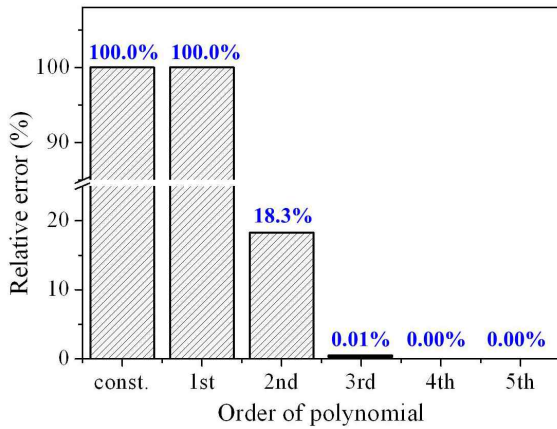


그림 3. 테일러 급수의 최고차수에 따른 엄밀해와 근사해의 상대 오차.

Fig. 3. Relative error between the analytic solution and the approximated solution according to the order of Taylor's series.

따라 지수함수를 사용하여 계산한 엄밀해(analytic solution)와 테일러급수를 이용한 근사해(approximated solution) 사이에 발생하는 오차가 달라진다. 테일러급수의 최고 차수에 따른  $K_w$  최댓값에 대한 엄밀해와 근사해의 오차는 표 1과 그림 3과 같다.

표 1에서 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ )은 0.5 Kg, 댐퍼 ( $B_d$ )은 0.1 Ns/m로 가정했다. 그림 1에서 상대오차는 샘플링 주기가 0.001초에서 0.001초 간격으로 0.01초까지 변할 때의 10개 데이터에 대한 상대오차의 평균을 나타낸 것이다. 테일러급수에서 1차까지만 고려하면 엄밀해와 전혀 다른 결과가 나타남을 볼 수 있으며, 3차까지 고려할 때 비로소 엄밀해와의 오차가 거의 없음을 알 수 있다. 또한 표 1에서 보듯이 각 샘플링 주기별로 상대오차를 살펴봐도 3차까지 고려하면 엄밀해와 차이가 없음을 알 수 있다. 따라서 지수함수  $e^{-aT} \approx 1 - aT + \frac{1}{2}(aT)^2 - \frac{1}{6}(aT)^3$ 으로 치환하면 충분

히 작은 오차로 조건식을 다항식의 형태로 표현할 수 있다.

식 (11)에  $e^{-aT} \approx 1 - aT + \frac{1}{2}(aT)^2 - \frac{1}{6}(aT)^3$ 를 대입하고 조건식  $GH - FI > 0$ 을 계산하면 (13)과 같이 표현된다.

$$N_2 K_w^2 + N_1 K_w + N_0 > 0 \tag{13}$$

where

$$N_2 = -\frac{T^4}{18 M_d^2} [48 - 56 a T + 31 (a T)^2] - \frac{T^4}{18 M_d^2} [-8 (a T)^3 + (a T)^4]$$

$$N_1 = -\frac{T^2}{18 M_d} [36 a T - 48 (a T)^2 + 38 (a T)^3] - \frac{T^2}{18 M_d} [-12 (a T)^4 + 2 (a T)^5]$$

$$N_0 = -\frac{1}{18} [-144 a T + 72 (a T)^2 - 24 (a T)^3]$$

$$a = \frac{B_d}{M_d}$$

식 (13)을 단순화시키기 위해서 각 항의 계수에 가장 큰 영향을 끼치는 1개 항만을 고려하여 조건식을 단순화시키고 정리하면 (14)와 같고, 근의 공식을 이용하여 시스템의 안정성(stability)을 보장하는  $K_w$ 의 범위를 구하면 (15)와 같다. 식 (15)를 보다 단순화시키면 (16)과 같이 표현되며, 이것이 시스템을 안정화시키기 위한 샘플링주기 (T), 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ )과 댐핑 상수( $B_d$ )와 가상 스프링 상수 ( $K_w$ )와의 관계이다.

$$4 T^3 K_w^2 + 3 B_d T^2 K_w - 12 M_d B_d < 0 \tag{14}$$

$$0 < K_w < \frac{-3 B_d}{8 T} + \sqrt{\frac{9 B_d^2}{64 T^2} + \frac{3 M_d B_d}{T^3}} \tag{15}$$

$$0 < K_w < (3 M_d B_d)^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{3}{2}} \tag{16}$$

표 2. 엄밀해  $K_w$ 와 근사해  $K_w$ 와 상대 오차.

Table 2. Maximum of  $K_w$  of the analytic solution and the simplified solution respectively.

T (sec)	Analytic solution	Simplified solution	
	$K_w$ (N/m)	$K_w$ (N/m)	Relative Error (%)
0.001	12211	12247	0.30
0.002	4312	4330	0.42
0.003	2345	2357	0.52
0.004	1522	1531	0.59
0.005	1088	1095	0.66
0.006	827	833	0.72
0.007	656	661	0.77
0.008	537	541	0.83
0.009	450	454	0.87
0.01	384	387	0.92

표 2는 지수함수를 고려한 엄밀해와 단순화된 조건식, (16)에 의해 계산된 근사해 및 두 해들 사이의 상대오차이다. 따라서 단순화된 조건식, (16)을 통해서 계산되는, 시스템 안정성을 보장하는 가상 강체의 스프링 상수 최댓값이 엄밀해와 1% 미만의 오차내에서 추정됨을 알 수 있다. 그리고 이를 통해 가상 강체의 스프링 상수  $K_w$ 는 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ )와 댐퍼 ( $B_d$ )의 제곱근에 비례하며, 샘플링 주기 ( $T$ )의 1.5 제곱근에 반비례 관계임을 알 수 있다.

영차 홀드 방식을 이용하는 기존 연구에서는 가상 강체의 스프링 상수만을 고려할 경우, 시스템의 안정성을 보장하는 가상 스프링 상수  $K_w$ 의 범위는 (17)로 구해진다. 여기서  $M_d$ 는 햅틱 장치의 질량,  $B_d$ 는 햅틱 장치의 점성계수,  $T$ 는 샘플링 주기,  $a$ 는  $B_d/M_d$ 이다.

$$[(M_d + B_d T)e^{-aT} - M_d]K_w + B_d^2(1 - e^{-aT}) > 0 \quad (17)$$

영차 홀드 방식의 조건 (17)과 일차 홀드 방식의 조건 (16)을 토대로 샘플링 주기 변화에 따른  $K_w$ 의 최댓값을 비교한 것이 표 3이다. 여기서 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ )은 0.5 Kg, 댐퍼 ( $B_d$ )은 0.1 Ns/m로 가정했다.

표 3을 보면, 일차 홀드 방식을 이용함으로써 영차 홀드 방식을 사용하는 기존 연구보다 가상 강체의 스프링 상수를 수십 배 크게 할 수 있음을 알 수 있다. 특히 샘플링 주기가 작아질수록 그 비율은 더 커지는 것을 볼 수 있다. 특히 이 결과들은 MATLAB Simulink 시뮬레이션을 통해서 영차 홀드 방식과 일차 홀드 방식의 성능을 비교한 기존 연구의 결과들[10]과 거의 같다. 표 3에서 오차 (error)는 (16)의 수학적 해석의 단순화된 해와 MATLAB 시뮬레이션 결과의 상대 오차를 의미하며, 상대 오차가 최대 3.2% 미만으로 두 결과가 거의 같음을 알 수 있다.

따라서 시스템의 안정성을 보장하면서 보다 큰 가상 스프링을 구현할 수 있다는 것은 그 만큼 가상 강체에 대한 현실감과 몰입감을 향상시킬 수 있음을 의미한다.

표 3. 시스템 안정성을 보장하는  $K_w$  최댓값에 대한 영차 홀드 방식과 일차 홀드 방식의 성능 비교

Table 3. Comparison of ZOH and FOH effect on the maximum stable margin of  $K_w$ .

T (sec)	$K_w$ (N/m) @ZOH	$K_w$ (N/m) @FOH			$\frac{K_w@FOH}{K_w@ZOH}$
		Simulation [10]	Simplified solution	Error (%)	
0.001	200	12210	12247	0.30	61.2
0.002	100	4310	4330	0.46	43.3
0.003	67	2340	2357	0.73	35.4
0.004	50	1520	1531	0.72	30.6
0.005	40	1080	1095	1.39	27.4
0.006	33	820	833	1.59	25.0
0.007	29	650	661	1.69	23.1
0.008	25	530	541	2.08	21.6
0.009	22	440	454	3.18	20.4
0.01	20	380	387	1.84	19.4

표 4. 상용 햅틱 장치에서  $K_w$  최댓값에 대한 영차 홀드 방식과 일차 홀드 방식의 성능 비교

Table 4. Maximum stable margin of  $K_w$  in commercial haptic device when ZOH and FOH are used respectively.

	Delta Device	Impulse Engine	Omega	PHANTOM 1.0
T (msec)	0.33	0.2	0.33	1
$M_d$ (Kg)	0.25	0.032	0.22	0.072
$B_d$ (Ns/m)	0.01	0.02	0.01	0.005
$K_w$ (N/m) @ZOH	60	200	60	10
$K_w$ (N/m) @FOH, analytic solution	14610	15454	13366	1037
$\frac{K_w@FOH}{K_w@ZOH}$	241	77	220	103

표 4는 상용 햅틱 장치의 질량과 댐퍼, 샘플링 주기를 기준으로 시스템의 안정성이 보장되는  $K_w$  최댓값에 대해서 영차 홀드 방식과 일차 홀드 방식의 성능을 비교한 것이다. 영차 홀드 방식은 (17)을 사용하여 계산되며, 일차 홀드 방식의 경우는 (11)을 사용하여 엄밀해를 계산한다. 표 4에서 햅틱 장치의 물성치는 Diolaiti [5]의 데이터를 사용한다. 상용 햅틱 장치에서도, 논문에서 제시된 일차 홀드 방식을 이용하여 반력을 구현할 때 시스템의 안정성을 유지하면서 가상 강체의 스프링 상수를 70배 ~ 240배 더 크게 설계할 수 있음을 보여준다. 이는 안정성을 향상시키는 물론, 가상 스프링 상수를 크게 함으로써 몰입감과 현실감도 증강할 수 있음을 보여준다.

#### IV. 결론

햅틱 시스템의 안정성을 유지하면서 가상 강체 임피던스를 증가시킬 수 있는 방법으로 일차 홀드 방식을 이용한 반력 구현 방법을 제시하고, 시스템 안정성 해석의 수학적 방법인 루트-후르비쯔 판별법 (Routh-Hurwitz criterion)을 이용하여 가상 강체 스프링상수에 대한 시스템 안정성 조건을 해석했다.

안정성 조건식의 단순화과정을 통해 가상 스프링 상수  $K_w$ 의 최댓값이 햅틱 장치의 질량 ( $M_d$ )과 댐핑상수 ( $B_d$ ), 샘플링주기 ( $T$ )에 대해서  $0 < K_w < (3M_d B_d)^{0.5} T^{-1.5}$ 의 관계를 가짐을 증명했다. 그리고 단순화를 거친 근사해와 엄밀해 사이의 차이를 샘플링 주기축면에서 비교한 결과 1% 미만의 오차범위 내에서 일치함을 알 수 있어 근사식이 타당함을 보였다. 상용 햅틱 장치를 대상으로 성능을 비교한 결과, 일차 홀드 방식을 이용하는 반력 구현 방법이 기존의 영차 홀드 방식을 이용하는 것보다 약 70배에서 약 240배 더 큰 가상 스프링 상수를 구현할 수 있음을 보였다. 따라서 일차홀드 방식을 이용할 때 보다 현실에 가까운 느낌의 가상 강체를 구현할 수 있을 것으로 기대된다.

향후 일차홀드 방식의 반력 구현 시스템을 하드웨어적으로 구현하고 실험을 통해 그 성능을 검증할 것이다.

## REFERENCES

- [1] K.-W. Noh, D.-H. Lee, J.-H. Han, S. Park, and J. Lee, "Haptic joystick implementation using vibration pattern algorithm," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 19, no. 3, pp. 605-613, 2013.
- [2] H. Kim and J.-H. Ryu, "The effect of asynchronous haptic and video feedback on teleoperation and a comment for improving the performance," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 2, pp. 156-160, 2012.
- [3] J. E. Colgate and G. Schenkel, "Passivity of a class of sampled-data systems: application to haptic interfaces," *Journal of Robotic Systems*, vol. 14, no. 1, pp. 37-47, 1997.
- [4] J. J. Abbott and A. M. Okamura, "Effects of position quantization and sampling rate on virtual-wall passivity," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, no. 5, pp. 952-964, Oct. 2005.
- [5] N. Diolaiti, G. Niemeyer, F. Barbagli, and J. K. Salisbury, "Stability of haptic rendering: discretization, quantization, time delay, and coulomb effects," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, no. 2, pp. 256-268, Apr. 2006.
- [6] J. J. Gil, A. Avello, A. Rubio, and J. Florez, "Stability analysis of a 1 DOF haptic interface using the Routh-Hurwitz criterion," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 583-588, Jul. 2004.
- [7] M. H. Lee and D. Y. Lee, "Nonlinear virtual coupling for stable haptic interaction," *Journal of Control, Automation, and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 9, no. 8, pp. 610-615, 2003.
- [8] T. Hulin, C. Preusche, and G. Hirzinger, "Stability boundary for haptic rendering: influence of physical damping," *Proc. of 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Beijing, China, pp. 1570-1575, Oct. 9-15, 2006.
- [9] J. J. Gil, E. Sanchez, T. Hulin, C. Preusche, and G. Hirzinger, "Stability boundary for haptic rendering: influence of damping and delay," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, pp. 124-129, Apr. 2007.
- [10] K. Lee, "Effect on data-hold methods on stability of haptic system," *Journal of Institute of Convergence Technology (in Korean)*, vol. 2, no. 2, pp. 35-39, 2012.
- [11] K. Lee, "Stability of haptic system with consideration for sample-and-hold methods and properties of haptic device," *Journal of the Korea Academic-Industrial Cooperation Society (in Korean)*, vol. 14, no. 22, pp. 5338-5343, 2013.



## 이 경 노

1996년 연세대 기계공학과 학사. 1998년 KAIST 기계공학과 석사. 2007년 KAIST 기계공학과 박사. 2012년~현재 국립 한국교통대학교 에너지시스템공학과 조교수. 관심분야는 가상현실, 시뮬레이터, 햅틱 인터페이스 및 제어.