

## 시간에 따른 압력변화에 대한 마이크로 기포의 동적 반응

이우민\* · 이승현\*\* · 성재용† · 이명호\*\*\*

### Dynamics Response of a Micro Bubble under Temporal Pressure Variations

Woo Min Lee, Seung Hyun Lee, Jaeyong Sung and Myeong Ho Lee

**Abstract.** The growth of micro bubble has been simulated under the variation of ambient pressure. The Rayleigh-Plesset equation governs the dynamic growth and collapse of a bubble according to pressure and temperature conditions. The Rayleigh-Plesset equation was solved by 4th-order Runge-Kutta method for wide range of pressure variations. As numerical parameters, the pressure difference between initial and final pressures, and the temporal pressure gradient are changed. The results show that the pressure difference has little effect on the growth rate of the micro bubble in the inertia controlled growth region. On the other hand, the growth rate increases linearly with the increase of the pressure gradient.

**Key Words:** Micro Bubble(마이크로 기포), Pressure Variation(압력변화), Rayleigh-Plesset Equation(레이리 플리셋 방정식)

#### 1. 서 론

마이크로 기포는 의료기기 및 산업 현장에 적용 등 다양한 가능성과 무한한 응용성을 가지고 있다. 따라서 유체시스템에서 기포 크기와 체적을 자유자재로 제어하고 시스템을 유용하게 하기 위해서는 기포의 역학을 이해하는 것이 매우 중요하다.

기포에 대한 기초적인 연구로는, Rayleigh<sup>(1)</sup>가 기포 경계를 통한 질량이동이 없고 표면장력과 점성력을 무시한다는 가정하에 단일 기포의 역학에 대한 방정식을 제안했다. 그 후, Plesset<sup>(2)</sup>이 처음으로 움직이는 캐비테이션 기포에 대하여 이 방정식을 적용하였다. 최근에는 Robinson과 Judd<sup>(3)</sup>가 표면장력을 고려한 성장역학(growth dynamics)을 제안하고, 변화를 지배하는 매개변수의 고찰을 통해 관성이 지배적인 영역, 확산이 지배적인 영역 그리고 이 두 영역의 천이과정에서 구형

기포 성장의 역학에 대해 연구하였다. Yang 등<sup>(4)</sup>은 단일 구형 기포의 변화에 대한 수학적 모델을 에너지 보존 법칙을 적용하여 Rayleigh-Plesset 방정식을 수정하였다. 또한 Alehossein과 Qin<sup>(5)</sup>이 다양한 시간간격을 이용하여 Rayleigh-Plesset 방정식을 효율적으로 수치해석하는 기술을 제안하였다. 이러한 선행연구에도 불구하고 시간에 따른 압력변화나 초기압력과 최종압력 차이에 따른 마이크로 기포성장은 연구되어지지 않았다.

따라서 본 연구에서는 동일한 초기압력 상태에서 최종압력과 시간에 따른 압력변화가 기포의 성장에 어떠한 영향을 끼치는지를 고찰하고자 한다. 이를 위해서 기포 역학을 표현하는 대표적인 Rayleigh-Plesset 방정식을 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하여 수치해석으로 접근한다. 수치해석을 통하여 다양한 압력변화량과 변화율에 따른 기포 성장에 대한 결과를 고찰한다.

Corresponding Author: Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology, 172, Gongreung-2 dong, Nowon-gu, Seoul 139-743, Korea, E-mail: jysung@seoultech.ac.kr, Tel: 02-970-6398

\* Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology, E-mail: oh\_woomin@hanmail.net, Tel: 02-971-6322

\*\* Graduate School, Seoul National University of Science and Technology, E-mail: duck3000@naver.com, Tel: 02-971-6322

† Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology, E-mail: jysung@seoultech.ac.kr, Tel: 02-970-6398

\*\*\* Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology, E-mail: myeong@seoultech.ac.kr, Tel: 02-970-6322

## 2. 기본 이론

### 2.1 Rayleigh-Plesset 방정식

유체에서 구형 캐비티 (cavity) 붕괴의 문제에 대한 Rayleigh의 해법은 캐비테이션 연구에서 기초가 되는 이론이다. 이 이론에서는 기포와 충분히 떨어진 곳에서의 압력은 일정하고, 유체는 비압축성 유체라고 가정한다. 시간에 따른 기포 반지름의 변화는 운동에너지를 적분하여 얻어진다. Plesset에 의해 확장된 Rayleigh의 이론은 처음으로 움직이는 캐비테이션 기포 문제에 대한 방정식을 적용하였다. 이 방정식은 무한영역에 완전한 비압축성 유체 안에 있는 단일 구형 기포라는 가정에 의해 얻어졌다. 따라서 최종적인 Rayleigh-Plesset 방정식<sup>(6)</sup>은 다음과 같다.

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R} \quad (1)$$

여기서,  $p_B$ 는 기포 내부압력,  $p_\infty$ 는 기포 외부압력,  $R$ 은 기포 반지름,  $S$ 는 물의 표면장력,  $\rho_L$ 은 물의 밀도 그리고  $\nu_L$ 은 물의 동점성 계수를 말한다. 기포 외부압력 ( $p_\infty$ )을 압력 변화조건으로 주고, 기포 내부에 압력 ( $p_B$ )을 안다면 Rayleigh-Plesset 방정식을 이용하여 시간에 따른 기포 반지름을 구할 수 있다.

기포 내부 압력  $p_B$ 를 구하기 위해, 기포는 부분압이  $p_{g0}$ 인 가스를 포함하고 있다고 가정한다. 일정한 온도에서 물의 증기압  $p_v$ 가 일정하고, 가스는 응결할 수 없다고 가정하면 가스의 부분압  $p_g$ 는 다음과 같다.

$$p_g = p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\eta} \quad (2)$$

여기서  $\eta$ 는 열과정 요소로써 만약 과정이 등온이면  $\eta = 1$ 이고, 열과정이 단열이라면  $\eta = C_p / C_v$ 로 표현되어질 수 있다.  $C_p$ 와  $C_v$ 는 각각 유체의 정압비열 정적비열이다. 최종적으로 기포 안에 압력은 다음과 같이 표현된다.

$$p_B = p_v + p_g = p_v + p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (3)$$

### 2.2 수치해석 기법

Rayleigh-Plesset 방정식에서 유체의 표면 장력, 밀도 및 동점성 계수와 같은 물성치는 상수라고 가정하고 기포 안의 압력  $p_B$ 는 식 (3)을 이용하여 구하면,  $p_\infty(t)$ 가 변할 때 시간에 따른 기포 반지름  $R(t)$ 의 값을 얻을 수 있다.

본 연구에서는 Rayleigh-Plesset 방정식을 수치해석적으로 풀기위해 여러 수치해법 중 오차가 적은 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하였다. 식(1)은 독립변수가 시간인 초기치 문제이며, 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_1(R, U) = \frac{dU}{dt} = \frac{p_B(t) - p_\infty}{R\rho_L} - \frac{4\nu_L}{\rho_L} \frac{U}{R^2} - \frac{2S}{\rho_L R^2} - \frac{3}{2} \frac{U^2}{R} \quad (4)$$

$$f_2(U) = \frac{dR}{dt} = U$$

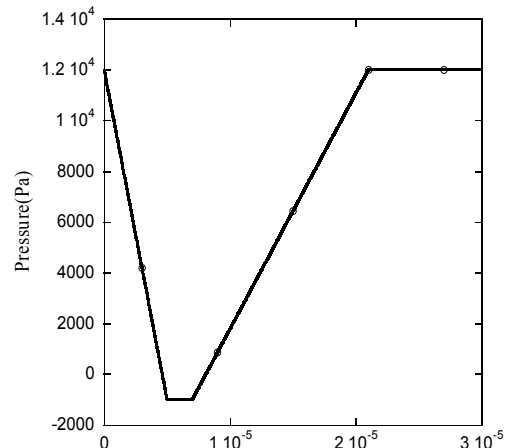
기포 반지름 속도  $U$ 와 기포 반지름  $R$ 을 식 (5)과 같이 계수를 각각 구하고 최종적으로 식 (6)을 통하여 이 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} l_1 &= h \times f_2(U) \\ k_1 &= h \times f_1(R, U) \\ l_2 &= h \times f_2(U + k_1/2) \\ k_2 &= h \times f_1(R + l_1/2, U + k_1/2) \\ l_3 &= h \times f_2(U + k_2/2) \\ k_3 &= h \times f_1(R + l_2/2, U + k_2/2) \\ l_4 &= h \times f_2(U + k_3) \\ k_4 &= h \times f_1(R + l_3, U + k_3) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U &= U + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ R &= R + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  $h$ 는 시간간격으로 본 연구에서는  $2 \times 10^{-9}$  s를 사용하였다.

본 연구의 수치해석 기법을 검증하기 위하여 Alehossin와 Qin<sup>(5)</sup>이 수행한 동일한 압력 변화 조건에서 시간에 따른 기포 반지름 변화를 고찰하였다.



(a)

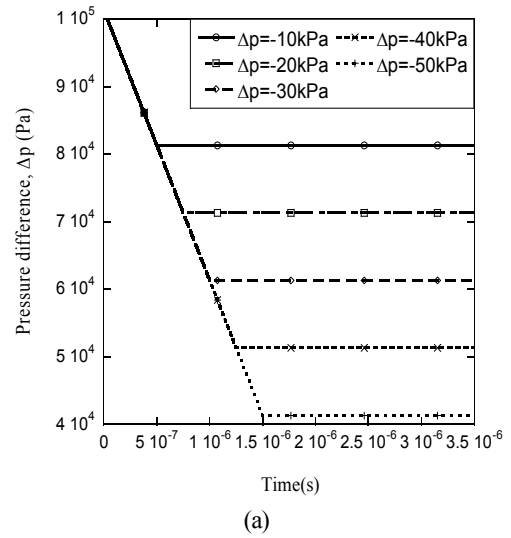
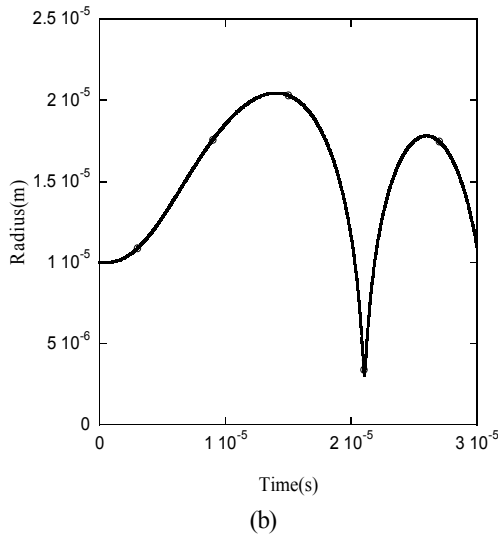


Fig. 1. Verification of the present numerical method by solving the problem fulfilled by Alehossin and Qin<sup>(5)</sup>. Temporal variations of (a) the ambient pressure and (b) the radius of micro bubble are compared.

Fig. 1(a)는 기포의 외부압력 변화 조건으로써 초기 압력에서 압력이 떨어진 후 다시 초기 압력을 찾는 형태의 압력변화이다. Fig. 1(b)는 압력변화에 따라 시간에 대한 기포 반지름 변화이다. Fig. 1에서 시간에 따른 외부 압력 변화와 물성치로 들어간 상수값을 동일하게 주었을 때, 시간에 따른 기포 반지름의 변화가 기존 연구와 잘 일치하였다.

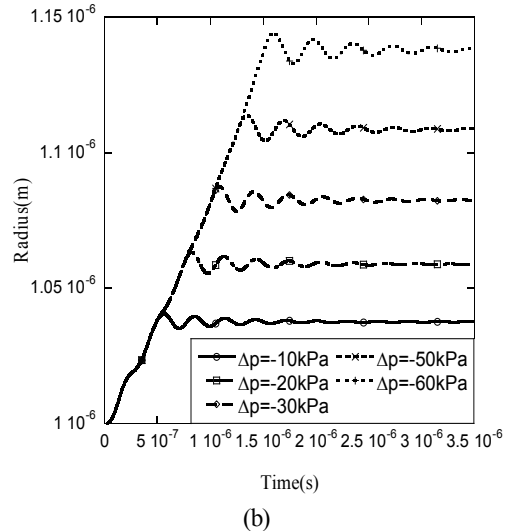


Fig. 2. Effect of the pressure difference on the bubble radius. (a) Temporal variation of the ambient pressure; (b) Response of bubble radius

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 압력변화(Δp)에 따른 기포 반응

본 연구에서는 기포 외부압력  $p_{\infty}$ 가 대기압에서 시간이 지나면서 점점 떨어져서 주어진 최종 압력에 도달하는 것으로 하였다. 초기 대기압 상태에서 평형상태에 놓여 있는 것으로 가정하고 떨어진 최종 압력과의 차이  $\Delta p$ 에 따른 기포 반지름 변화를 고찰하였다. Fig. 2(a)는 본 연구의 압력 변화 조건으로 외부 압력변화  $p_{\infty}(t)$ 를 나타낸다. 초기압력은 대기압이고, 최종압력은 -10kPa부터 10kPa 씩 감소하여 -50kPa까지 총 5 가지 경우에 대해서 수치해석을 수행하여 그 경향을 분석하였다. 초기 기포의 반지름은 1  $\mu\text{m}$ 이며, Fig. 2(b)는 압력변화에 따른 마이크로 기포 반지름 변화  $R(t)$ 를 시간에 대해 나타내었다.

Fig. 2(b)에서 볼 수 있듯이 최종압력 변화에 따라 기포 성장률( $dR/dt$ )은 변화가 없고 최종 기포 반지름의 크기에만 영향을 주는 것으로 나타났다. 마이크로 기포의 성장이 관성의 영역을 지나게 되면 외부의 압력변화가 기포 성장률에 영향을 미치지 않았고 최종 반지름으로 수렴하는 값은 표면장력과 기포 내외부 압력차가 힘의 평형상태를 이룰 때의 값과 같았다. 기포의 외부의 압력변화가 발생하게 될 때 기포 내부는 외부의 압력과 평형상태를 이루기 위해 압력변화가 생긴다. 평형상태에서 기포 외부 압력이 떨어지면 기포의 크기가 커지고 그에 따라 기포

내부 압력도 떨어진다. Fig. 2에서는 기포 외부 압력의 변화율이 일정하므로 그 변화율에 맞게 기포가 성장하며, 최종 압력의 변화폭은 기포의 크기 변화에만 영향을 준다.

3.2 압력변화율(dp/dt)에 따른 기포 반응

다음으로는 압력변화율과 기포 반지름의 변화 간의 관계에 대해서 알아보았다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 압력 변화율이 클수록 기포 성장률도 크다. 최종 기포 반지름은 표면장력과 기포 내외부 압력차가 힘 평형상태를 이루는 경우와 같았다. 최종압력이 같기 때문에 압력변화율에 상관없이 5 가지 경우 모두 최종 기포 반지름의 크기는 같았다. Fig. 3(b)에서 기포가 진동을 하면서 평형상태로 수렴하는 것을 볼 수 있는데, 압력변화율이 클수록 진동이 더 커서 과도응답(overshoot)이 크게 발생한다. 본 연구에서 사용한 Rayleigh-Plesset 방정식은 기포 경계면을 통한 열 및 물질전달을 고려하지 않았기 때문에 기포 외부의 압력변화에 동기화되어 기포 내부의 압력 변화가 일어난다. 따라서 외부 압력 변화율에 비례하여 기포 성장률이 결정되며, 외부 변화에 대한 응답속도가 빠르기 때문에 과도응답 특성이 나타난다.

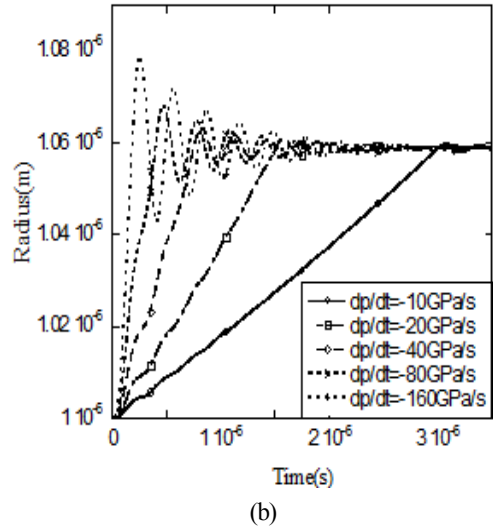
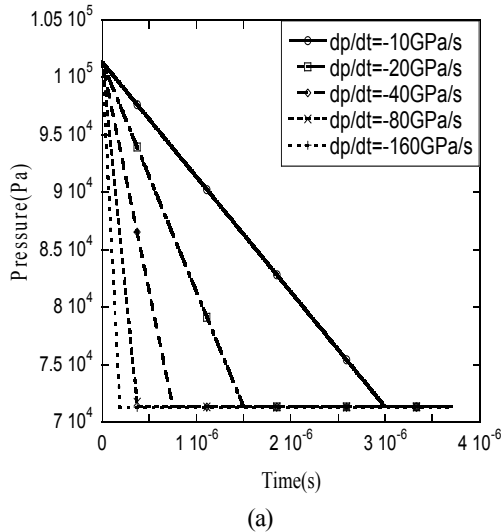


Fig. 3. Effect of the pressure gradient on the bubble radius. (a) Temporal gradient of the ambient pressure; (b) Response of bubble radius to the pressure variation.

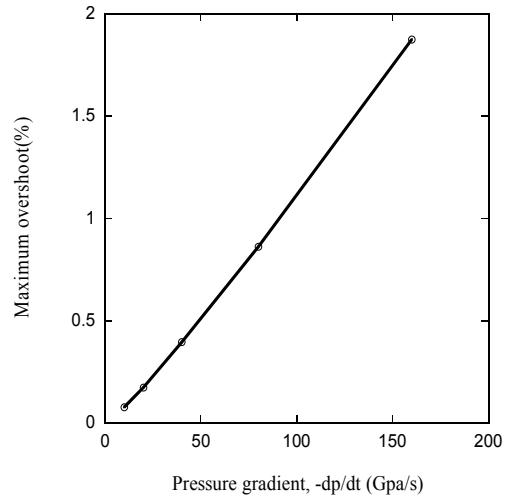


Fig. 4. Maximum overshoot according to the pressure gradient.

Fig. 4에서는 압력변화율과 과도응답의 정확한 관계를 알아보았다. 각 압력변화율에 따라 기포가 진동 할 때, 평형상태의 반지름 값과 과도응답 값의 차가 가장 큰 값을 선택하여 최대 과도응답값(maximum overshoot)을 계산하였다. Fig. 4를 보면 압력변화율에 따른 과도응답의 최대치가 선형적으로 증가한다. 과도응답값이 크면 기포가 파괴되는 현상이 일어날 수 있으며, 추후 실험적으로 압력변화율과 기포 파괴의 상관관계를 파악할 필요가 있다.

실제 기포에 있어서는 외부 압력 변화에 의해 기포 크기가 순간적으로 변하면 기포 계면에서의 수증기 증발에 의해 과도응답에 대한 댐핑(damping) 효과가 있을 것으로 생각된다. 향후 연구에서는 이러한 기포 내 온도 변화와 수증기 분압의 변화를 고려한 해석도 필요하다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 시간에 따라 변하는 압력장에서 마이크로 기포의 반응에 대해서 고찰하였다. Rayleigh-Plesset 방정식을 수치해석적으로 풀어서 변화하는 압력에 따른 기포 반지름을 관찰하였다. 그 결과 초기 대기압에서 시작하여 최종적으로 떨어지는 압력차에 의해서는 최종 평형 상태에 도달한 기포 크기에 영향을 미치지만 기포 성장률에는 영향이 없다. 하지만 최종압력이 같고 압력변화율이 다를 경우 기포의 성장속도가 다르다. 또한 압력변화에 의해 기포 반지름이 진동하면서 평형상태로 수렴할 때 압력변화율에 따른 기포 반지름의 과도응답의 최대치가 선형적으로 증가한다.

#### 후 기

이 논문은 2013년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2013R1A1A2005242).

#### 참고문헌

- (1) Rayleigh, L., 1917, "On the Pressure Developed in a Liquid during the Collapse of a Spherical Cavity," *Phil. Mag.*, Vol. 32, pp. 94-98.
- (2) Plesset, M. S., 1949, "The Dynamics of Cavitation Bubbles," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol.16, pp. 228-231.
- (3) Robinson, A. J., Judd, R. L., 2004, "The Dynamics of Spherical Bubble Growth," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 5101-5113.
- (4) Yang, H., Desyatove, A. V., Cherkasov, S. G., and McConnell, D. B., 2008, "On the Fulfillment of the Energy Conservation Law in Mathematical Model of Evolution of Single Spherical Bubble," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, pp. 3623-3629.
- (5) Alehossein, H., Qin, Z., 2007, "Numerical Analysis of Rayleigh-Plesset Equation for Cavitating Water Jets," *Int. J. Numer. Method Engrg.*, Vol. 72, pp. 780-807.
- (6) Brennen, C. E., 1995, *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford University Press, pp. 47-50.