

초미세 틈새의 기체 베어링 해석용 유효 점도의 표현식과 관련 계수들의 민감도 해석

김의한¹ · 임윤철^{2*}

¹연세대학교 기계공학부, ²연세대학교 기계공학과

Sensitivity Analysis of Effective Viscosity Coefficients for Computing Characteristics of Ultrathin Gas Film Bearings

Ui Han Kim¹ and Yoon Chul Rhim^{2*}

¹School of Mechanical Engineering, Yonsei University

²Dept. of Mechanical Engineering, Yonsei University

(Received October 18, 2013 ; Revised November 5, 2013 ; Accepted November 20, 2013)

Abstract – A more accurate expression for effective viscosity is obtained using a linear regression of the data from Fukui-Kaneko's model, which are obtained through numerical calculations based on the linearized Boltzmann equation. Veijola and Turowski's expression is adopted as a base function for effective viscosity. The four coefficients in that equation are optimized, and sensitivity analysis is conducted for these coefficients. The results show that the coefficient for the first-order Knudsen number is the most accurate, whereas the coefficient in the exponential of the Knudsen number is the least accurate compared with Fukui-Kaneko's results. The expression for effective viscosity is accurate within 0.02% rms of Fukui-Kaneko's results for the inverse Knudsen numbers from 0.01 to 100 and surface accommodation coefficients ranging from 0.7 to 1.

Keywords – effective viscosity (유효점도), knudsen number (누센 수), slip boundary condition (미끄럼 경계 조건), linear regression (선형회귀분석), sensitivity analysis (민감도분석), surface accommodation coefficient (표면조정계수), mean free path (평균자유행정)

1. 서 론

디지털 정보를 기록/재생하는데 가장 많이 사용되고 있는 하드 디스크 드라이브(Hard Disk Drive: HDD) 속에는 정보를 쓰고 읽는 Head를 탑재한 슬라이더가 회전하는 디스크와 작은 간격을 유지하면서 베어링 효과에 의하여 뜬 상태로 반경방향으로 움직이며 신호를 기록/재생한다.

HDD의 기록밀도가 증가함에 따라 슬라이더와 디스

크 사이의 간극은 점점 더 작아져 현재는 3~5 nm 정도로까지 작아졌다. 이렇게 좁은 간극에서의 유동은 공기 분자의 평균자유행정(mean free path) 1가 상온, 상압에서 64 nm정도인 것을 감안할 때 연속체로 가정하여 해석할 수 없으며 점성유체의 특징적 경계조건인 no-slip도 보장할 수 없다. 이처럼 윤활유체를 연속체로 가정할 수 없게 되면 간극에서의 기본식인 레이놀즈 방정식을 사용할 수 없으며 압력분포, 하중 등 기본적인 베어링 특성을 분자의 운동에 근거한 Boltzmann 방정식을 사용하여 구해야 한다. 그러나 이 방법은 절차도 복잡하고 시간도 오래 걸리는 단점이 있어 Fukui와 Kaneko는 유량 인자(flow factor)

*Corresponding author : rhimyc@yonsei.ac.kr

©이 논문은 한국윤활학회 2013년도 추계학술대회(2013. 10. 16~18/여수) 발표논문임.

라는 개념을 레이놀즈 방정식에 도입하여 희박유체의 유동문제를 연속체의 개념에서 빠르고 쉽게 해석할 수 있는 방법을 제시하였다[1].

유량 인자는 간극에 대한 윤활 유체의 평균자유행정의 비를 나타내는 Knudsen 수($Kn = \lambda/h_0$)의 함수로 표현된다. 본 논문에서는 아주 넓은 범위의 Kn 수에 대하여 정확한 유량 인자를 구할 수 있는 표현식을 찾고 선형화된 Boltzmann 방정식을 사용하여 구한 유량 인자 값에 근사하도록 회귀분석을 수행하여 그 표현식의 계수들을 결정하며 계수들의 오차에 대한 민감도를 분석하였다.

2. 유효 점도(Effective Viscosity)

슬라이더 베어링의 특성을 해석하기 위한 레이놀즈 방정식은 간극을 흐르는 유체의 속도분포를 구한 후 이를 간극 방향으로 적분하여 얻어진다. 베어링의 간극이 매우 작으므로 Navier-Stokes 방정식에서 관성항은 무시되며 점성항에서도 간극방향의 변화만이 고려의 대상이 된다. 즉, Fig. 1과 같은 1-D 베어링의 경우 간극 유동에 대한 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 단순화된다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

식 (1)을 간극 방향인 z -방향에 대하여 두 번 적분하면 식 (3)과 같은 속도 분포를 얻는다.

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + f_1(x)z + f_2(x) \quad (3)$$

여기서 $f_1(x)$ 와 $f_2(x)$ 는 두 개의 경계조건에 의해서 정해지는데 좁은 간극의 경우 slip을 고려한 경계조건을 사용한다.

Shen 등은 표면의 조정계수(surface accommodation coefficient) a 를 고려하여 선형화된 Boltzmann 방정식으

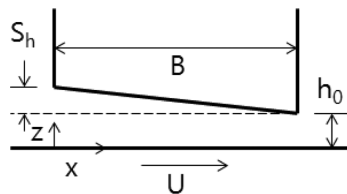


Fig. 1. 1-D bearing model for analysis.

로부터 다음과 같은 경계조건을 제시하였다[2].

$$u_{z=0} = \frac{2-a}{a} \lambda \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\lambda_{eff} 2\lambda}{a \mu} \frac{\partial p}{\partial x} + U \quad (4)$$

$$u_{z=h} = -\frac{2-a}{a} \lambda \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} - \frac{\lambda_{eff} 2\lambda \partial p}{a \mu \partial x} \quad (5)$$

경계조건 (4)와 (5)를 사용하여 속도분포 (3)의 $f_1(x)$ 와 $f_2(x)$ 를 정하면 간극에서의 속도분포 $u(x,z)$ 는 다음과 같다.

$$u(x,z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[z^2 - hz - \frac{2-a}{a} h\lambda \right] + U \left[1 - \frac{z + (2-a)\lambda/a}{h + 2(2-a)\lambda/a} \right] - \frac{2 \lambda_{eff} \lambda \partial p}{a \mu h \partial x} \quad (6)$$

속도분포에 밀도 ρ 를 곱한 후 다시 간극 방향(z)으로 적분하면 간극사이를 흐르는 질량 유동(mass flux)이 구해지는데 이를 슬라이딩 방향(x)으로 미분하면 질량 보존법칙에 의해 0이 되어야 한다. 즉,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h \rho u dz \right) = 0 \quad (7)$$

이며 따라서 slip을 고려한 1-D 레이놀즈 방정식은

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho h^3 \left(1 + 6 \frac{2-ah}{a} \frac{\lambda}{h} + \frac{24 \lambda_{eff} \lambda}{a h} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 6 \mu U \frac{\partial \rho h}{\partial x} \quad (8)$$

으로 표현된다. 여기서 h 는 간극, λ_{eff} 를 유효평균자유행정(effective mean free path)이라 하는데 점도와의 다음과 같은 관계에 있다[3].

$$\lambda_{eff} = \frac{\mu_{eff}}{\mu} \quad (9)$$

μ_{eff} 는 유효 점도로서 전단 응력과 전단 변형율이 비례관계에 있다고 가정할 경우의 비례상수에 해당한다. Burgdorfer는 1차 slip을 고려하여 간극에서의 유속 분포를 다음과 같이 계산하였고[4]

$$u = \frac{h + \lambda - z}{h + 2\lambda} U \quad (10)$$

이 식에서 유효 점도를 구해보면

$$|\tau| = \left| \mu \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} \right| = \frac{\mu}{h + 2\lambda} U = \frac{\mu}{1 + 2Kn} \frac{U}{h} \quad (11)$$

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{1 + 2Kn}$$

이 된다. 많은 연구자들이 보다 넓은 범위의 Kn 수에 대해서 적절한 μ_{eff} 를 표현하고자 노력하였다. Hsia 등은 2차 slip까지 고려한 표현식을 유도하였고 유효 점도를 다음과 같이 구하였다[5].

$$\mu_{eff} = \mu \left[\frac{1}{1 + 2Kn} + \frac{h^2}{2\mu U} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (12)$$

한편, Fukui와 Kaneko는 초미세 간극을 흐르는 유동에 대한 일반적 레이놀즈 방정식을 유량 인자 Q_p 의 개념을 도입하여 무차원화한 후 다음과 같이 제시하였다[1].

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(PH^3 \overline{Q_p} \frac{\partial P}{\partial X} \right) = \Lambda \frac{\partial(PH)}{\partial X} \quad (13)$$

여기서 $X=x/B$, $P=p/p_a$, $H=h/h_0$, $\Lambda=6\mu UB/(p_a h_0^2)$ 이며 $\overline{Q_p}$ 는 간극 위, 아래 면에서의 slip을 고려한 무차원 계수로서 non-continuum 상황의 레이놀즈 방정식을 continuum 상태로 해석할 수 있도록 표면조정계수 a 와 Kn 수의 함수로 계산되는 계수이다. 유량 인자 Q_p 는 간극 h 를 따라 압력차에 의해 흐르는 Poiseuille 유량을 다음과 같이 무차원화하여 구하였으며 $\overline{Q_p}$ 는 Q_p 를 연속체로 가정하였을 경우의 유량 인자인 $Q_{p,com} = \sqrt{\pi}/12Kn$ 으로 정규화(normalizing)한 값이다.

$$Q_p = -\frac{q_p \sqrt{\pi} \mu}{\lambda \rho h^2 \frac{\partial P}{\partial x}}, \quad \overline{Q_p} = \frac{Q_p}{Q_{p,com}} \quad (14)$$

따라서 간극에서의 유동이 continuum, no-slip인 경우 $Q_p = \sqrt{\pi}/12Kn$ 즉, $\overline{Q_p} = 1$ 이며 식 (13)은 일반적인 압축성 레이놀즈 방정식과 같은 형태가 된다. 한편 slip을 고려한 식 (6)의 속도분포를 사용하면

$$Q_p = \frac{D}{6} + \frac{2-a\sqrt{\pi}}{a} + \frac{\pi}{aD_{eff}} \quad (15)$$

$$\overline{Q_p} = 1 + 6\frac{2-a}{a}Kn + \frac{24}{a}KnKn_{eff} \quad (16)$$

가 된다. 여기서 $D = \sqrt{\pi}/2Kn$ 로서 inverse Knudsen number이며 $D_{eff}(= \sqrt{\pi}/2Kn_{eff})$ 는 effective inverse Knudsen number이고 $Kn_{eff} = \lambda_{eff}/h_0$ 이다.

또한 Fukui와 Kaneko는 선형화한 Boltzmann 방정식으로부터 유량 인자 Q_p 를 a 와 Kn 수의 함수로 계산하고 이를 테이블로 정리하였다[6]. 따라서 Kn 수와 a 가 주어지면 해당하는 Q_p 및 $\overline{Q_p}$ 값을 알 수 있고 이를 사용하여 레이놀즈 방정식을 해석할 수 있게 되었다. 그런데 Q_p 및 $\overline{Q_p}$ 값을 결정하려면 D_{eff} 와 Kn_{eff} 를 알아야 하고 이는 λ_{eff} 를 정해야 하며 다시 μ_{eff} 를 정해야 한다. 식 (11)과 (12)에서처럼 1차와 2차 slip을 고려한 μ_{eff} 을 사용할 경우 Boltzmann 방정식의 결과와 비교해 보면 Kn 수 증가에 따라 압력이 과소 또는 과대 평가되는 결과를 보여주었다. 이에 여러 연구자들이 μ_{eff} 를 Kn 수의 적절한 함수로 표현하고자 하였다. 1차 slip과 2차 slip에 대한 유효 점도의 표현식이 식 (11)과 (12)와 같이 표현되는데 기초하여 Veijola와

Turowski는 다음과 같은 식을 제안하였고 계수들의 값으로 $C_1=2$, $C_2=0.2$, $C_3=0.788$ 과 $C_4=-0.1$ 을 제안하였다.

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{1 + C_1Kn + C_2Kn^{C_3} \cdot e^{C_4Kn}} \quad (17)$$

그러나 이 표현식을 현재까지 가장 정확하다고 인정되는 Fukui와 Kaneko의 유량 인자 표와 비교하면 Kn 수가 증가함에 따라 상당한 오차가 발생하므로 본 논문에서는 식 (17)에 사용된 4개의 계수에 다중선형회귀분석법을 적용하여 오차를 최소화하고자 한다. 또한, 식 (9)로부터 유효평균자유행정 λ_{eff} 를 식 (18)과 같이 구할 수 있고 Kn_{eff} 역시 식 (19)와 같이 구할 수 있다.

$$\lambda_{eff} = \frac{\lambda}{1 + C_1Kn + C_2Kn^{C_3} \cdot e^{C_4Kn}} \quad (18)$$

$$Kn_{eff} = \frac{Kn}{1 + C_1Kn + C_2Kn^{C_3} \cdot e^{C_4Kn}} \quad (19)$$

3. 다중선형회귀분석

Fukui와 Kaneko는 표면조정계수 a 가 1, 0.9, 0.8, 0.7의 4종류에 대하여 Kn 수에 따른 유량 인자 Q_p 를 D 를 사용하여 구하였다. 따라서 주어진 $Q_{p,iF-K}$ 와 식 (15)와 (19)를 사용하여 구한 $Q_{p,iCF}$ 과의 차이를 최소화시키는 식 (18)에서 사용한 4개의 계수 C_j , $j=1, 2, 3, 4$ 를 다중선형회귀분석법을 사용하여 구한다. 즉,

$$E = \sum_i (Q_{p,iF-K} - Q_{p,iCF})^2 \quad (20)$$

이며 오차 E 를 최소화시키는 C_j 는 다음 4개의 비선형 연립방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_1(C_1, C_2, C_3, C_4) &= \partial E / \partial C_1 = 0 \\ f_2(C_1, C_2, C_3, C_4) &= \partial E / \partial C_2 = 0 \\ f_3(C_1, C_2, C_3, C_4) &= \partial E / \partial C_3 = 0 \\ f_4(C_1, C_2, C_3, C_4) &= \partial E / \partial C_4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)은 비선형성이 강하기 때문에 적절한 초기값과 under-relaxation 방법을 사용하여 다음과 같이 반복 계산으로 구한다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \\ \Delta C_3 \\ \Delta C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial C_1} & \frac{\partial f_1}{\partial C_2} & \frac{\partial f_1}{\partial C_3} & \frac{\partial f_1}{\partial C_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial C_1} & \frac{\partial f_2}{\partial C_2} & \frac{\partial f_2}{\partial C_3} & \frac{\partial f_2}{\partial C_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial C_1} & \frac{\partial f_3}{\partial C_2} & \frac{\partial f_3}{\partial C_3} & \frac{\partial f_3}{\partial C_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial C_1} & \frac{\partial f_4}{\partial C_2} & \frac{\partial f_4}{\partial C_3} & \frac{\partial f_4}{\partial C_4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\{C_{j,new}\} = \{C_{j,old}\} + \text{URF} \{\Delta C_j\} \quad (23)$$

여기서 URF는 under-relaxation factor로서 0부터 1 사이의 값을 사용한다. 표면조정계수에 따른 최적화된 계수들을 Table 1에 정리하였다.

Fig. 2는 여러 유효 점도 모델에 대한 D-Q 선도를 a=1인 경우에 대하여 보여준다. Inverse Kn수가 10보다 작은 영역에서 Veijola와 Turowski의 모델보다 본

연구에서 제시한 모델이 Fukui-Kaneko의 D-Q 결과를 가장 잘 표현하고 있음을 알 수 있으며 특히 D가 작은 영역 즉, 초박막인 경우에서도 선형화한 Boltzmann방정식의 결과를 정확하게 추종하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 3은 표면 조정 계수가 변화하여도 Table 1의 계수를 사용하여 계산한 유량 인자는 D의 모든 범위에 대하여 F-K의 결과를 정확히 묘사함을 보여준다.

4. 유효 점도 표현 계수의 민감도 해석

다중선형회귀분석을 통하여 유효 점도를 표현하는 식의 계수를 정함으로써 다양한 Kn수의 범위에 대하여 레이놀즈 방정식을 해석할 수 있는 기초가 마련되었다. 그러나 회귀분석의 특성상 식 (21)로 표현되는 오차를 최소화할 수는 있어도 0으로 만들 수는 없다. 따라서 Table 1에서 구한 계수들에는 작은 오차가 있을 수 있는데 어느 계수가 전체 오차에 미치는 영향이 큰가는 민감도 해석을 통하여 알 수 있다. 민감도는 Table 1에서 제시한 값을 기준으로 정규화하여 표시하였으며 계수들이 각각 2.5%, 5%, 7.5% 씩 증가 및 감소하였을 때 식 (21)의 E값의 변화를 Fig. 4에 도시하였다.

Fig. 4에서 보면 계수 C1이 표면조정계수에 관계없이 가장 크게 변화하므로 1차 slip에 해당하는 계수가 전체 오차에 미치는 영향이 가장 큼을 알 수 있다. Table 1의 내용에서 알 수 있듯이 a가 1에서 감소함에 따라 계수 C2는 거의 선형적으로 급격히 증가하고 C1과 C3는 서서히 감소하며 C4는 거의 0에 가까운 값으로 수렴해 간다. 이는 완벽한 난반사를 이루는 a=1인 경우에 대해서 a<1인 규칙성이 증가하기 시작할 경우 1차 이상의 slip을 고려해야 할 필요성이 빠르게 증가함을 뜻한다.

또한 Fig. 4에서 a값 변화에 따라 그래프의 y축이 급격히 작아지는데 이는 다중선형회귀분석을 통하여 오차를 최소화하는 계수를 구하기는 하였으나 오차의 제곱의 합이 a값이 감소함에 따라 갑자기 증가함에 기인한 것이다. Fig. 5에서 보듯이 a=1인 경우 E=0.1441로 매우 작으나 a<1이 되면 급격히 증가하므로 이 값으로 정규화 할 경우 민감도가 a=1에서는 크게 그리고 a<1인 경우는 작은 것처럼 계산된다. a≠1인 경우 오차의 제곱의 합이 급격히 증가한 이유는 Veijola와 Turowski가 제안한 식(17)의 형태가 a≠1인 경우를 충분히 반영하지 못하였기 때문이다. 그러나 대부분의 표

Table 1. Coefficients for effective viscosity expression of optimized results from linearized Boltzmann eqns.

a	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
1.0	1.59375	4.06830	0.67174	-0.03126
0.9	1.32879	5.59403	0.49423	-0.00879
0.8	1.33291	7.08117	0.39079	-0.00646
0.7	1.35442	9.11584	0.28997	-0.00478

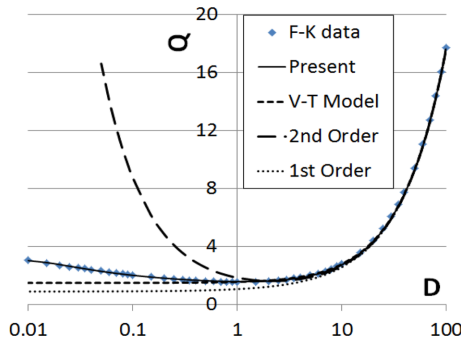


Fig. 2. Comparison of flow factor, Q, according to the inverse Knudsen number (a=1).

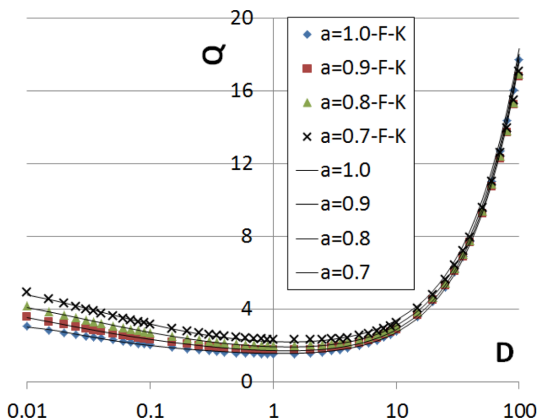


Fig. 3. Comparison of flow factors with optimized coefficients and with F-K's result according to the inverse Knudsen number.

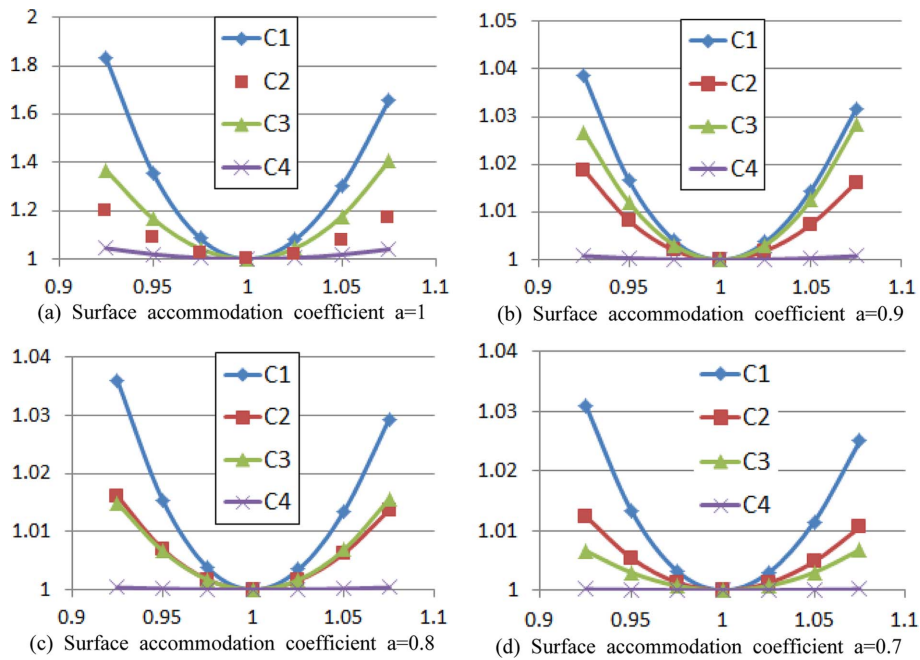


Fig. 4. Sensitivity analysis of Effective viscosity coefficients.

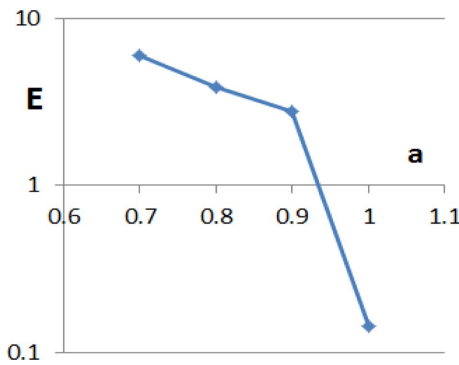


Fig. 5. Sum squared errors in flow factors between with optimized coefficient and with F-K's result.

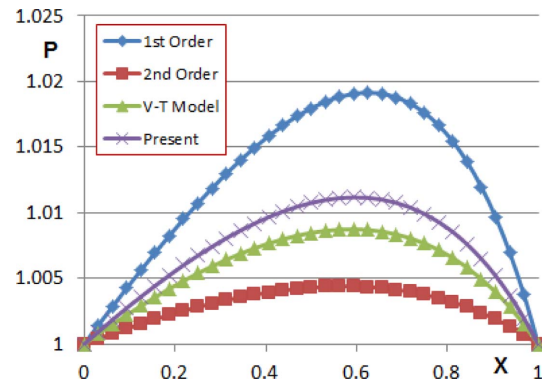


Fig. 6. Comparison of pressure distributions in linear slider bearing ($S_h=h_0$, $L=10$, $Kn=5$).

면이 $a=1$ 로 가정할 수 있으므로 식 (17)은 충분히 유용한 식이라고 볼 수 있다.

5. 레이놀즈 방정식 응용

유량 인자의 차이가 압력 분포 및 하중에 미치는 영향을 파악하기 위하여 초미세 틈새를 갖는 슬라이더 베어링을 대상으로 여러 유효 점도 모델에 대하여 1-D 레이놀즈 방정식을 풀고 그 결과를 Fig. 6에 도시하였다. 앞서 언급하였던 것처럼 1차 slip만을 고려하면

압력 및 하중이 과대평가되며 2차 slip으로 계산하면 과소평가됨을 알 수 있다. 또한 연속체로 가정할 경우의 주변 압력으로 무차원화된 최대 압력이 1.361정도 인데 비해서 Kn 수가 5인 경우의 최대압력은 1.0104정도이므로 Kn 수가 증가함에 따라 압력 P 가 현격히 감소함을 알 수 있다. 얼핏 숫자상으로 26%의 감소로 생각할 수 있으나 주변 압력으로 무차원화된 점을 감안한다면 이는 97.1%의 감소를 의미한다.

Fig. 7에는 Kn 수 변화에 따른 W 의 변화를 도시하였다 Kn 수가 아주 작아서 연속체로 가정할 수 있는

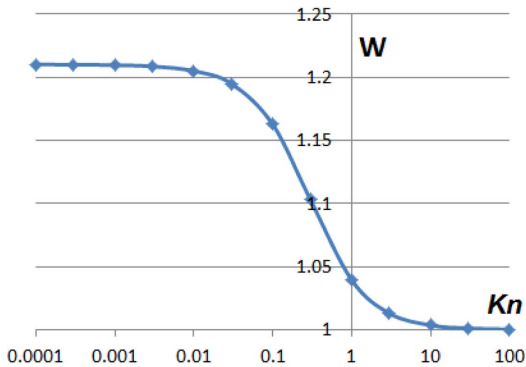


Fig. 7. Variation of non-dimensional load according to the Knudsen number.

경우의 무차원 하중 W 는 1.210 정도인데 비해서 Kn 수가 10이 되면 W 는 1.0034 정도가 된다. 이 역시 얼핏 보면 16% 정도의 감소로 생각할 수 있지만 실제로는 98.4% 정도가 감소한 것이어서 no-slip 연속체로 설계하였을 경우의 하중에 비하여 1.6%에 지나지 않으므로 slip에 대하여 적절한 평가가 이루어지지 않는다면 베어링 설계에서 매우 심각한 오류를 범할 수 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

초미세 간극의 윤활문제를 해석하기 위하여 유량 인자 개념을 도입한 레이놀즈 방정식을 널리 사용한다. 유량 인자 값의 정확한 계산을 위하여 선형화한 Boltzmann 방정식으로부터 구한 결과를 이용하여 Veijola와 Turowski가 제안한 유효 점도 근사식의 계수를 다중선형회귀분석을 통하여 결정하였고 각 계수의 민감도를 해석하였다. 결과로 표면조정계수에 따른 유효 점도 근사식의 계수들을 구하였고 민감도 해석으

로부터 Kn 수의 1차 항의 계수가 가장 중요함을 보였다. Kn 수가 0.01보다 증가하면 하중이 급격히 감소하므로 slip을 고려한 모델을 반드시 사용해야 함도 1-D 슬라이더 베어링의 계산 결과를 통하여 보였다.

References

- [1] Fukui, S. and Kaneko, R., "Analysis of Ultra-Thin Gas Film Lubrication Based on Linearized Boltzmann Equation: First Report-Derivation of a Generalized Lubrication Equation Including Thermal Creep Flow," ASME J. Tribol., 110, pp. 335-341, 1988.
- [2] Shen, S., Chen, G., Crone, R., and Anaya-Dufresne, M., "A kinetic-theory based first order slip boundary condition for gas flow," Phys. Fluids, 19, p.086101, 2007.
- [3] Dongari, N., Durst, F., and Chakraborty, S., "Predicting microscale gas flows and rarefaction effects through extended Navier-Stokes-Fourier equations from phoretic transport considerations," Microfluid Nanofluid, 9 pp. 831-846, 2010.
- [4] Burgdorfer, A., "The Influence of the Molecular Mean Free Path on the Performance of Hydrodynamic Gas Lubricated Bearings," ASME J. Basic Eng., 81, pp. 94-100, 1959.
- [5] Hsia, Y. and Domoto, G., "An Experimental Investigation of Molecular Rarefaction Effects in Gas Lubricated Bearings at Ultra-Low Clearance," ASME J. Tribol., 105, pp. 120-130, 1983.
- [6] Fukui, S. and Kaneko, R., "A Database for Interpolation of Poiseuille Flow Rates for High Knudsen Number Lubrication Problems," ASME J. Tribol., 112, pp. 78-83, 1990.
- [7] Veijola, T. and Turowski, M., "Compact Damping Models for Laterally Moving Microstructures with Gas Rarefaction Effects," J. Microelectromech. Syst., 10, pp. 263-272, 2001.