

압전 수정진동자의 밀도법 기반 위상 최적설계

하윤도¹ · 변태욱² · 조선희^{3*}

¹군산대학교 조선공학과, ²호서대학교 Co-op 학부, ³서울대학교 아이소-지오메트릭 최적설계 창의연구단

Density-based Topology Design Optimization of Piezoelectric Crystal Resonators

Youn Doh Ha¹, Taeuk Byun² and Seonho Cho^{3*}

¹Dept. of Naval Architecture, Kunsan National Univ., Gunsan, 573-701, Korea

²Faculty of Co-op, Hoseo Univ., Asan-si, 336-795, Korea

³National Creative Research Initiatives(NCRI) Center for Isogeometric Optimal Design, Seoul National Univ., Seoul, 151-742, Korea

Abstract

Design sensitivity analysis and topology design optimization for a piezoelectric crystal resonator are developed. The piezoelectric crystal resonator is deformed mechanically when subjected to electric charge on the electrodes, or vice versa. The Mindlin plate theory with higher-order interpolations along thickness direction is employed for analyzing the thickness-shear vibrations of the crystal resonator. Thin electrode plates are masked on the top and bottom layers of the crystal plate in order to enforce to vibrate it or detect electric signals. Although the electrode is very thin, its weight and shape could change the performance of the resonators. Thus, the design variables are the bulk material densities corresponding to the mass of masking electrode plates. An optimization problem is formulated to find the optimal topology of electrodes, maximizing the thickness-shear contribution of strain energy at the desired motion and restricting the allowable volume and area of masking plates. The necessary design gradients for the thickness-shear frequency(eigenvalue) and the corresponding mode shape(eigenvector) are computed very efficiently and accurately using the analytical design sensitivity analysis method using the eigenvector expansion concept. Through some demonstrative numerical examples, the design sensitivity analysis method is verified to be very efficient and accurate by comparing with the finite difference method. It is also observed that the optimal electrode design yields an improved mode shape and thickness-shear energy.

Keywords : piezoelectric material, crystal resonator, eigenvalue analysis, topology design optimization

1. 서 론

압전 수정진동자(Piezoelectric Crystal Resonator)는 압전 수정(Piezoelectric Crystal)과 수정 표면에 도금되는 전극경(Electrode)으로 구성된다. 압전 수정진동자에는 두 가지 압전 효과가 발생된다. 첫번째는 직접적인 압전 효과(Direct Piezoelectric Effect; Cady, 1946)로서 전극경을 통해 전하가 가해졌을 때 수정이 기계적으로 변형하는 것을 말한다. 두번째는 반대로 수정이 강제적으로 진동하면 전극경 사이에 전기장이 발생하는 효과이다. 가장 간단한 형태의 압전 진동자는 하나의 수정판과 수정판 양면에 동일한 모

양으로 도금되는 전극경이다. 이때 수정판은 그 형태와 잘린 방향에 따라 다양한 타입이 존재한다. 본 연구에서는 고차진동인 두께방향 전단 진동(Thickness Shear Vibration)에 적합한 AT-컷 퀴츠(AT-cut Quartz) 수정판(Bottom, 1982)을 사용한다. AT-컷 퀴츠 압전 수정진동자는 원하는 설계주파수에서 두께방향 전단 진동 모드(Thickness Shear Vibration Mode)를 통해 요구되는 전기적 신호를 발생시켜야 한다. 그러나 압전 수정판은 부도체이므로 전기적 신호를 얻기 위해서 수정판의 양면에 동일한 모양으로 얇은 층의 전극경을 도금한다. 전극경은 가급적 수정진동자의 기계적 진동에 방해가 되지 않고 전기적 신호만 검출할 수 있도록 연성이 좋은

* Corresponding author:

Tel: +82-2-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr

Received June 2 2013; Revised March 25 2014;

Accepted March 26 2014

©2014 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

금이나 은을 사용하지만, 전극경 도포로 인해 수정판 표면의 부가질량이 증가하기 때문에 기계적인 영향이 나타난다. 전극경에 대한 연구는 여러 학자들에 의해 연구되어 왔다 (Mindlin, 1963; Tiersten, 1969; Lee *et al.*, 1987). 현재까지는 전극경 형상을 정하기 위해 설계자의 경험과 실험값들에만 의존하고 있기 때문에 적절한 형상을 얻기가 용이하지 않았다. 따라서 본 연구에서는 수정진동자에 대하여 위상 최적설계 기법을 적용하여 최적의 전극경 형상을 찾아내는 방법을 제안하고자 한다.

고차 민들린(Mindlin) 판이론에 기반한 유한요소법을 통해 압전 수정진동자의 자유진동 거동을 해석하였다. 압전 수정진동자는 얇은 판이면서 두께방향의 전단변형을 해석하기 때문에 두께방향으로는 고차 형상함수를 사용하는 고차 민들린 판이론(Mindlin, 1984)을 도입하였다. 압전 수정진동자의 지배방정식은 기계적 운동방정식과 정전기적 전하방정식으로 구성된다. 두 방정식은 압전 재료에 대한 구성방정식을 통해 연결되며 고유치 해석을 통해 두께방향 전단모드 주파수(고유치) 및 거동(고유벡터) 등을 산출한다. 압전 수정진동자의 수치 해석기법을 위상 최적설계 기법과 결합하여 최적의 기계적, 전기적 성능을 발휘하는 압전 수정진동자의 전극경 형상을 얻고자 한다. 위상 최적설계 문제는 필연적으로 매우 많은 수의 설계변수를 가지고 있기 때문에 효율적인 설계민감도 해석이 필수적이다. 본 연구에서는 연속체에 기반한 설계민감도 해석을 통해 고유치 및 고유벡터의 설계구배를 효율적이고 정확하게 계산한다. 계산된 설계민감도를 위상 최적설계의 목적함수 및 제약조건의 설계민감도를 구하는데 사용함으로써 매우 효율적인 위상 최적설계가 가능하게 하였다.

본 논문의 2장에서는 고차 민들린 판 이론을 도입하여 압전 수정진동자의 고유치 해석 문제를 구성한다. 또한 전극경의 영향을 해석 이론에 포함시키도록 고유치 해석 문제를 수정한다. 3장에서는 목적함수의 설계 구배를 계산하기 위해 고유치와 고유벡터의 설계민감도 해석을 한다. 엄밀하고 효율적인 설계민감도 해석을 위해 연속체에 기반한 해석적 설계민감도 해석법을 제안한다. 소개된 고유치 해석 및 설계민감도 해석과 결합하여 4장에서는 위상 최적설계 문제를 정식화한다. 5장에서는 수치예제들을 통해 개발된 설계민감도 해석 및 위상 최적설계 기법을 검증한다.

2. 압전 수정진동자 고유치 해석

2.1 선형 압전 이론(Linear Piezoelectricity)

Fig. 1과 같이 표현되는 압전체(Piezoelectric Body)를

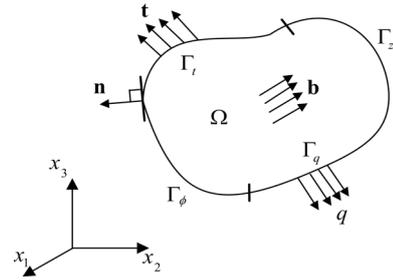


Fig. 1 Piezoelectric body

고려하자. 압전체는 영역 Ω 와 닫힌 경계 Γ 로 구성된다. 또한 경계는 기계적 표면력 경계 Γ_t , 변위경계 Γ_z 와 전기적 표면전하 경계 Γ_q , 전기적 포텐셜 경계 Γ_ϕ 로 구성되며, 각각의 경계는 아래 식과 같은 조건을 만족한다.

$$\Gamma_t \cap \Gamma_z = \emptyset, \Gamma_q \cap \Gamma_\phi = \emptyset \quad (1)$$

$$\Gamma_t \cup \Gamma_z = \Gamma, \Gamma_q \cup \Gamma_\phi = \Gamma \quad (2)$$

압전체는 또한 기계적 체적력 \mathbf{b} 와 Γ_t 에서 표면력 \mathbf{t} , Γ_z 에서 $\hat{\mathbf{z}}$, Γ_q 에서 전하 q , Γ_ϕ 에서 $\hat{\phi}$ 의 경계조건을 만족한다. \mathbf{n} 은 경계에서의 법선벡터이다.

운동방정식과 정전기적 전하방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$T_{ij,i} + b_j = \rho \ddot{z}_j \quad (3)$$

$$D_{i,i} = 0, (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

여기서, $T_{ij}, b_j, \rho, z_j, D_i$ 는 각각 응력텐서, 체적력, 질량밀도, 기계적 변위, 전기적 변위를 의미한다. $(\cdot)_{,i}$ 와 $(\ddot{\cdot})$ 는 편미분과 시간에 대해 두 번 미분하는 것을 나타낸다. 경계조건은 다음 식들과 같다.

$$T_{ij}n_i = t_j \text{ on } \Gamma_t \quad (5)$$

$$z_j = \hat{z}_j \text{ on } \Gamma_z \quad (6)$$

$$D_i n_i = q \text{ on } \Gamma_q \quad (7)$$

$$\phi = \hat{\phi} \text{ on } \Gamma_\phi \quad (8)$$

기계적 및 전기적 응답은 다음 구성방정식을 통해 연성된다.

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (9)$$

$$D_i = e_{ijk} S_{jk} + \epsilon_{ij} E_j \quad (10)$$

여기서, $c_{ijkl}, e_{kij}, \epsilon_{ij}$ 는 각각 강성(Mechanical Stiffness), 압전 변형률 계수(Piezoelectric Strain Constant), 유전

율(Dielectric Permittivity)을 의미한다. 또한 변형율-변위 관계식과 전기장-포텐셜 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(z_{i,j} + z_{j,i}) \quad (11)$$

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (12)$$

2.2 압전 수정판의 고유치 문제

Fig. 2와 같이 표현되는 판 요소를 고려하자. x_2 는 두께 방향 좌표계이고, x_1 과 x_3 는 중심면(Mid-surface)에서의 좌표계를 의미한다. $2b$ 와 $2t$ 는 각각 수정판의 두께와 수정판 한 면에 마스크된 전극경의 두께를 의미한다.

고차 민들린 판 이론(Mindlin, 1984)에서는 두께방향 변형 및 전기적 응답을 엄밀하게 표현하기 위해 기계 변위와 전기 포텐셜을 두께방향으로 무한급수 전개를 하여 다음과 같이 표현한다.

$$z_j(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0} z_j^{(n)}(x_1, x_3) x_2^n \quad (13)$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0} \phi^{(n)}(x_1, x_3) x_2^n \quad (14)$$

여기서, $z_j^{(n)}$ 와 $\phi^{(n)}$ 는 각각 기계적 변위와 전기적 포텐셜의 2차원 n 차 요소가 된다. 식 (11)과 식 (12)를 사용하여 변형율-변위 관계식과 전기장-포텐셜 관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_{ij}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(z_{j,i} + z_{i,j}) = \sum_{n=0} S_{ij}^{(n)}(\mathbf{z}) x_2^n \quad (15)$$

$$E_i(\phi) = -\phi_{,i} = \sum_{n=0} E_i^{(n)}(\phi) x_2^n \quad (16)$$

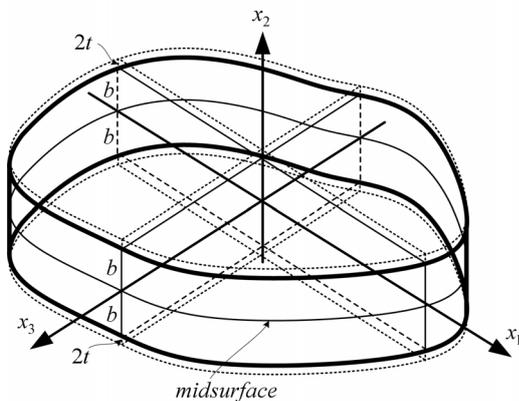


Fig. 2 Higher-order Mindlin Plate Model

여기서, $S_{ij}^{(n)}(\mathbf{z})$ 과 $E_i^{(n)}(\phi)$ 는 각각 기계적 변형율과 전기장의 2차원 n 차 요소로 다음 식으로 나타난다.

$$S_{ij}^{(n)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} [z_{j,i}^{(n)} + z_{i,j}^{(n)} + (n+1)(\delta_{i2} z_j^{(n+1)} + \delta_{2j} z_i^{(n+1)})] \quad (17)$$

$$E_i^{(n)}(\phi) = -\phi_{,i}^{(n)} - (n+1)\delta_{i2}\phi^{(n+1)} \quad (18)$$

또한 식 (9), (10)으로부터 압전 재료의 2차원 선형 구성 방정식은 다음과 같다.

$$T_{ij}(\mathbf{z}, \phi) = c_{ijkl} S_{kl}(\mathbf{z}) - e_{kij} E_k(\phi) \quad (19)$$

$$D_i(\mathbf{z}, \phi) = e_{ijk} S_{jk}(\mathbf{z}) + \epsilon_{ij} E_j(\phi) \quad (20)$$

여기서, n 차 기계적 응력과 전기적 변위는 다음과 같다.

$$T_{ij}(\mathbf{z}, \phi) = \int_{-b}^b x_2^n T_{ij}(\mathbf{z}, \phi) dx_2 \quad (21)$$

$$= \sum_{m=0} B_{mn} (c_{ijkl} S_{kl}^{(m)}(\mathbf{z}) - e_{kij} E_k^{(m)}(\phi))$$

$$D_i(\mathbf{z}, \phi) = \int_{-b}^b x_2^n D_i(\mathbf{z}, \phi) dx_2 \quad (22)$$

$$= \sum_{m=0} B_{mn} (e_{ijk} S_{jk}^{(m)}(\mathbf{z}) + \epsilon_{ij} E_j^{(m)}(\phi))$$

또한, B_{mn} 은 두께방향 적분에 의해 나타나는 적분상수로써 다음과 같다.

$$B_{mn} = \begin{cases} \frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}, & m+n = \text{even} \\ 0, & m+n = \text{odd} \end{cases} \quad (23)$$

전극경은 압전 수정판의 상/하 표면에 대칭적으로 매우 얇게 도포되는 금 또는 은 등의 재료로서 전극경에 의한 구조 강성 혹은 전기적 영향은 극히 미미하다. 따라서 전극경에 의한 영향은 부가적인 질량에 의한 효과가 지배적이기 때문에 지배방정식인 식 (3)과 식 (4)는 다음과 같이 구성된다.

$$T_{i,j,i} = \rho[1 + (m+n+1)R] \ddot{z}_j \quad (24)$$

$$D_{i,i} = 0 \quad (25)$$

식 (24), (25)로부터 유도되는 2차원 변분방정식은 다음과 같다.

$$\sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} (c_{ijkl} S_{kl}^{(m)}(\mathbf{z}) - e_{kij} E_k^{(m)}(\phi)) S_{ij}^{(n)}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (26)$$

$$= \lambda \sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} \rho [1 + (m+n+1)R] z_j^{(m)} \bar{z}_j^{(n)} d\Omega$$

$$\sum_n \sum_m B_{ij} \int_{\Omega} (e_{ijk} S_{jk}^{(m)}(\mathbf{z}) + \varepsilon_{ij} E_j^{(m)}(\phi)) E_i^{(n)}(\bar{\phi}) d\Omega = 0 \quad (27)$$

여기서, ρ 는 수정판의 밀도를 의미하며, Ω 는 판의 중심면을 의미한다. 또한 고유치 λ 는 고유진동수 ω 의 제곱수를 의미하며, $\bar{\mathbf{z}}$ 와 $\bar{\phi}$ 는 각각 \mathbf{z} 와 ϕ 의 변분을 의미한다. R 은 전극 경과 수정판의 질량비로 다음과 같으며 μ 는 전극경의 밀도가 된다.

$$R = \frac{2t\mu}{b\rho} \quad (28)$$

식 (26), (27)에서 \mathbf{z} 와 ϕ 를 일반화된 변위장으로 표현하고 유한요소로 이산화하면 다음과 같이 일반화된 유한요소 정식화가 가능하다(Wang *et al.*, 1999).

$$\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{K} \mathbf{y} = \lambda \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \quad (29)$$

여기서,

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega \quad (30)$$

또한, \mathbf{y} 는 이산화된 자유도 벡터로 식 (29)와 같은 자유진동문제의 고유벡터가 된다.

3. 연속체 기반 설계민감도 해석

3.1 고유치 설계민감도

설계변수 u 에 대해 식 (29)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$a_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) \equiv \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}(u) \mathbf{y}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}(u) \mathbf{y}_i \equiv \lambda_i d_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}})$$

for all $\bar{\mathbf{y}} \in Z$ (31)

여기서, λ_i 와 \mathbf{y}_i 는 i 번째 고유치와 고유벡터를 의미한다. 균일(Homogeneous) 경계조건을 만족하는 변위벡터 공간 Z 는 다음과 같이 정의된다. 여기서 \mathbf{G} 는 경계조건을 부여하며 설계변수에 무관하다.

$$Z = [\mathbf{y}_i \in R^n; \mathbf{G} \mathbf{y}_i = 0] \quad (32)$$

$$a_u(\mathbf{y}'_i; \bar{\mathbf{y}}) - \lambda_i d_u(\mathbf{y}'_i; \bar{\mathbf{y}}) \quad (33)$$

$$= \lambda'_i d_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) + \lambda_i d'_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) - a'_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{y}} \in Z$$

식 (33)은 모든 $\bar{\mathbf{y}} \in Z$ 에 대해 성립하므로, $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_i$ 로 두고 $a_u(\cdot, \cdot)$ 과 $d_u(\cdot, \cdot)$ 의 대칭성을 고려하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\lambda'_i d_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) = a'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) - \lambda_i d'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) - [a_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}'_i) - \lambda_i d_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}'_i)] \quad (34)$$

또한 $\mathbf{y}'_i \in Z$ 이므로, 식 (34) 우항의 대괄호 항은 0이 된다. 따라서 i 번째 고유치의 설계민감도를 다음과 같이 얻는다.

$$\lambda'_i = \frac{a'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) - \lambda_i d'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i)}{d_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i)} \quad (35)$$

또한 정규화 조건 $d_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_j) = \delta_{ij}$ 을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\lambda'_i = a'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) - \lambda_i d'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) \quad (36)$$

3.2 고유벡터 설계민감도

n 자유도계에서 고유벡터의 설계민감도는 전체 고유벡터의 선형합으로 근사가 가능하다(Nelson, 1986).

$$\mathbf{y}'_i = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k \quad (37)$$

여기서, c_k 는 임의의 상수가 된다. 먼저 c_k 를 계산하기 위해 식 (37)을 식 (33)에 대입하면 다음과 같다.

$$a_u(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k; \bar{\mathbf{y}}) - \lambda_i d_u(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k; \bar{\mathbf{y}}) = \lambda'_i d_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) + \lambda_i d'_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) - a'_u(\mathbf{y}_i; \bar{\mathbf{y}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{y}} \in Z \quad (38)$$

식 (38)는 모든 $\bar{\mathbf{y}} \in Z$ 에 대해 성립하므로 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_m$ ($m \neq i$)로 둘 수 있다. 또한 다음의 정규화 조건

$$a_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (39)$$

$$d_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_j) = \delta_{ij} \quad (40)$$

을 적용하면 c_k ($k \neq i$)를 계산할 수 있다.

$$c_k = - \frac{a'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_k) - \lambda_i d'_u(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_k)}{\lambda_k - \lambda_i}, k \neq i \quad (41)$$

따라서 식 (37)은 다음과 같이 분리된다.

$$\mathbf{y}'_i = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k + c_i \mathbf{y}_i \quad (42)$$

c_i 를 구하기 위해 $d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) = 1$ 을 설계에 대해 변분을 취한다.

$$2d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}'_i; \mathbf{y}_i) + d'_{\delta \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) = 0 \quad (43)$$

식 (43)에 (42)를 대입하고 (40)을 적용하면 다음을 얻는다.

$$c_i = \frac{1}{2} d'_{\delta \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i) \quad (44)$$

4. 위상 최적설계 정식화

압전 수정진동자는 두께방향 전단진동으로부터 전기적 신호를 검출하기 위해서 사용되므로, 전기적 신호를 보다 명확하게 얻어내기 위해서는 전단진동이 지배적인 모드형상을 구현해야 한다. 이를 위해서 전단변형에 의한 에너지를 최대화하도록 위상 최적설계 문제를 다음과 같이 구성한다.

Maximize (45)

$$\Psi = \sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} (c_{12kl} S_{kl}^{(m)}(\mathbf{z}) - e_{k12} E_k^{(m)}(\phi)) S_{12}^{(n)}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega$$

Subject to

$$\int_{\Omega} u d\Omega \geq V_0 \quad (46)$$

$$\int_{\Omega(u \geq 0.7)} u d\Omega \geq V_1 \quad (47)$$

여기서, Ψ , u 는 각각 전단 변형에너지와 정규 재료밀도 함수를 뜻한다. 또한 첫번째 제약조건은 전극경에 의해 발생하는 부가질량이 전단변형을 구속하기 때문에 최저 사용 재료량 V_0 과 최저 집중 사용재료량 V_1 을 부여해서 전극경 형상을 유지하도록 하였다. 여기서 정규 재료밀도 값의 기준은 형상을 유지할 수 있도록 경험적으로 0.7을 부여하였다. 설계 변수는 각 요소의 전극경의 밀도와 관련되는 재료밀도 함수이다.

$$\mu_i = u_i^P \mu_0, (i = 1, 2, \dots, N.E.) \quad (48)$$

여기서, P 는 집중된 재료분포를 얻기 위한 벌칙인자(Penalty Parameter)이며 수치적 특이점(Singularity)을 피하기 위해 최소점 u_{\min} 을 부여하였다.

$$0 < u_{\min} \leq u_i \leq 1 \quad (49)$$

목적함수를 설계변수에 대해 미분을 취해서 얻어진 목적함수의 설계민감도는 다음과 같다.

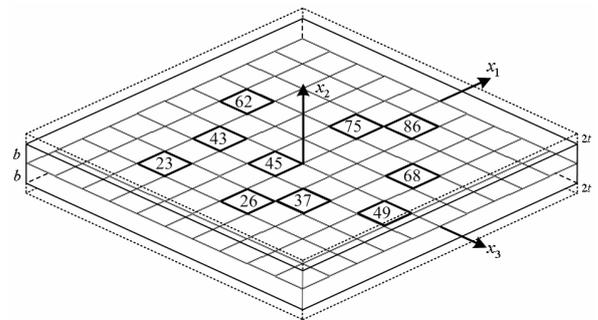
$$\frac{d\Psi}{du} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{d\mathbf{y}_i}{du} \quad (50)$$

여기서, 변형에너지 Ψ 는 설계변수에 대해 명시적 종속성이 없으므로 $\partial \Psi / \partial u = 0$ 이고, $d\mathbf{y}_i / du$ 는 고유벡터의 설계민감도이다.

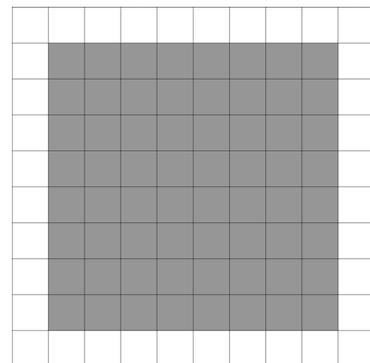
5. 수치예제

5.1 설계민감도 해석 검증

설계민감도 식 (50)의 정확성 및 효율성을 알아보기. 설계 민감도가 정확하게 구해졌는지 확인하기 위해서, 유한차분법을 이용하여 검증한다. Fig. 3(a)와 같이 너비와 폭이



(a) Crystal plate model and selected elements



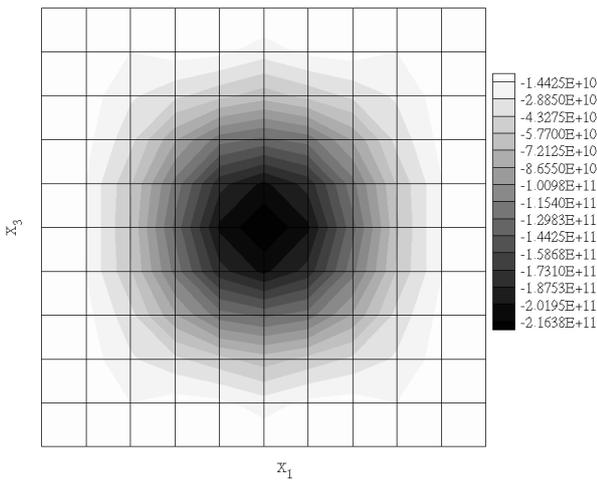
(b) Design domain

Fig. 3 Crystal plate model and design domain

각각 $1750\mu\text{m}$ 이고 두께(2b)가 $100\mu\text{m}$ 인 수정판을 고려한다. 수정판과 전극경의 밀도는 각각 $2649 \times 10^{-18} \text{kg}/(\mu\text{m})^3$ 와 $1049 \times 10^{-8} \text{kg}/(\mu\text{m})^3$ 이다. 사용된 전극경은 은(Ag, silver)이며, 두께(2t)는 $10^{-4}\mu\text{m}$ 이다. 모델은 100개의 고차 민들린 판 요소로 구성되어 있다. 설계변수는 전극경의 밀도와 연관이 되는 각 요소의 정규 재료밀도 함수 u 이며, Fig. 3(b)에 나타나 있는 회색부분만 설계영역으로 설정한다. 설계영역에 아닌 부분은 전극경이 마스크되지 않는다.

성능함수는 위상 최적설계의 목적함수와 동일하게 진단 변형에너지 ψ 로 하였다. 각 요소의 정규 재료밀도 함수에 대한 설계민감도 해석 결과를 Fig. 4(a)에 나타내었고, 설계민감도 해석값과 유한차분법의 결과를 Fig. 4(b)에서 비교하였다.

$d\psi/du_i$ 은 설계민감도 해석을 통해 해석적으로 구한 결과를 $\Delta\psi/\Delta u_i$ 는 유한차분법을 통해 구한 결과를 의미한다. 유한차분법의 결과와 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 전체 설계



(a) Distributions of design sensitivities

설계 변수	$\frac{d\psi}{du_i} (\times 10^{10})$	$\frac{\Delta\psi}{\Delta u_i} (\times 10^{10})$	$\frac{\Delta\psi}{\Delta u_i} / \frac{d\psi}{du_i} (\%)$
u_{23}	-4.2737	-4.3051	100.7349
u_{26}	-8.6935	-8.7603	100.7684
u_{37}	-13.956	-14.070	100.8164
u_{43}	-9.1668	-9.2415	100.8152
u_{45}	-23.080	-23.268	100.8146
u_{49}	-2.7403	-2.7622	100.7975
u_{62}	-3.2360	-3.2607	100.7640
u_{68}	-7.1927	-7.2497	100.7926
u_{75}	-8.6935	-8.7603	100.7687
u_{86}	-4.4124	-4.4411	100.6492

(b) Comparison with finite difference sensitivities

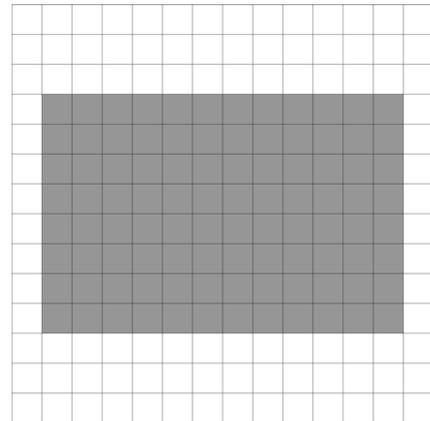
Fig. 4 Verification of design sensitivities

변수에 대한 설계민감도를 구하는데 유한차분법은 약 8883.2초가 걸린 반면, 해석적인 방법은 약 0.15%정도인 13.7초가 소요되어 매우 효율적이며 정확함을 알 수 있다(Xeon CPU 2.4GHz, 2GB RAM 기준).

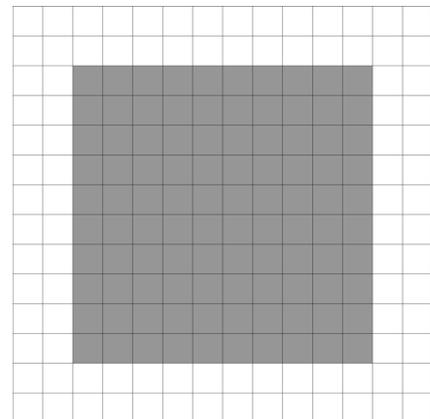
5.2 압전 수정진동자의 위상 최적설계

Fig. 5와 같은 196개의 요소로 이루어진 수정판을 고려하자. 회색부분은 설계영역을 의미하며 Fig. 3(a)의 수정판과 동일한 크기와 물성치를 가진다. 두 모델에 공통적으로 V_0 와 V_1 는 각각 설계 영역의 40%, 20%로 설정하였다.

단순한 위상이 나오는 모델 A의 경우는 벌칙인자 P 는 1, 전극경의 두께 $2t$ 는 $10^{-4}\mu\text{m}$ 로 설정하고, 뚜렷한 위상이 잘 나오지 않는 모델 B는 P 는 2,는 $10^{-6}\mu\text{m}$ 로 설정하였다. 일반적으로 전극경은 수정판의 상/하 표면에 대칭적으로 마스크되기 때문에 본 연구에서는 한 면의 전극경만을 독립적인 설계영역으로 취급하고 다른 한 면은 설계영역에 나타나는 분포와 대칭적으로 전극경을 분포시키도록 설정하였다.

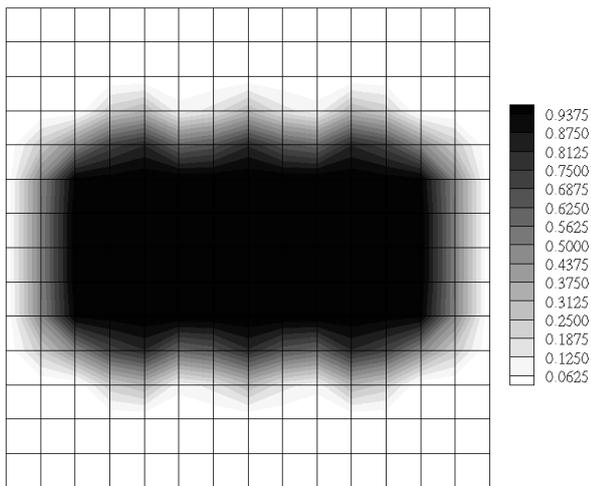


(a) Model A

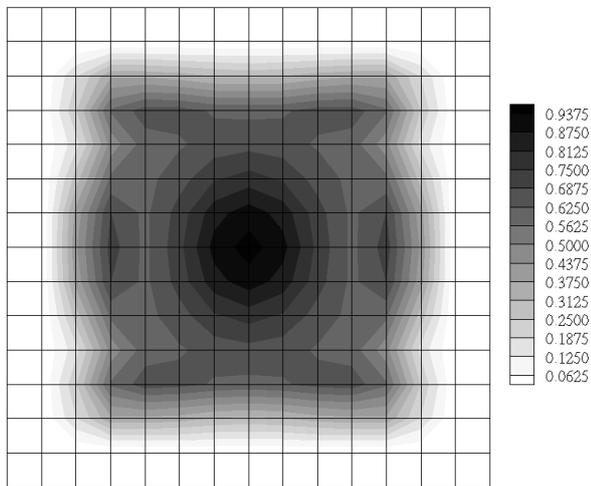


(b) Model B

Fig. 5 Design domain of crystal plate



(a) Model A

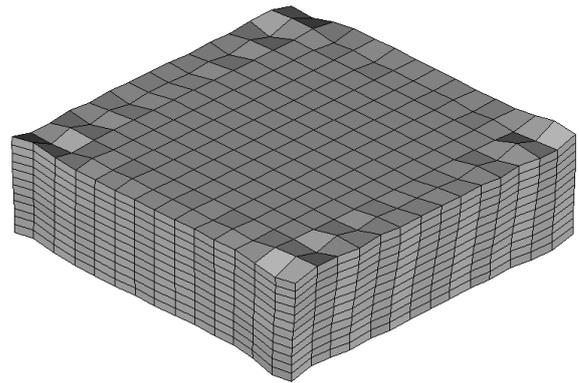


(b) Model B

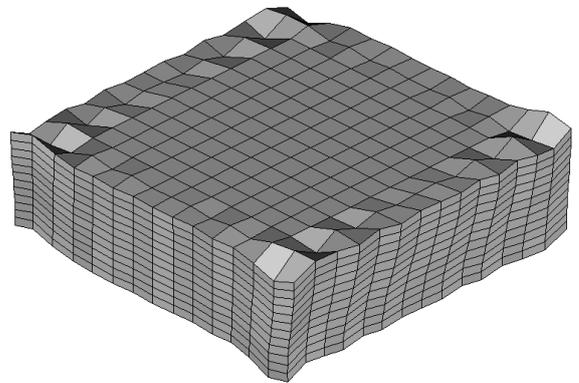
Fig. 6 Optimal designs of topology optimization

위상 최적설계 결과는 Fig. 6과 같다. 두 모델에 공통적으로 전단 변형에너지를 높이기 위해서 전극경이 중앙으로 집중되어 배치되는 것을 확인할 수 있다. 이미 상용화되어 사용되고 있는 대부분의 압전 수정진동자들에 마스킹된 전극경이 수정판의 중앙부에 집중적으로 분포하는 형상을 보이고 있는 것과 비교하더라도 위상 최적설계가 타당한 방향을 제시하고 있는 것을 알 수 있다. 또한 위상 최적설계를 이용하면 수치적으로 전극경의 형상을 결정하기 때문에 보다 높은 성능을 내는 형상을 결정할 수 있다.

위상 최적설계에 의한 성능개선 효과를 확인하기 위해 모델 B에 대해서 모드 형상과 고유진동수, 전단 변형에너지를 Fig. 7에서 비교하였다. 초기 재료분포에서의 모드형상보다 위상 최적설계 후의 모드형상이 전단변형을 좀 더 구체적으로 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 고유진동수는 0.1% 정도로 거의 변화가 없지만, 전단 변형에너지는 약 2.6%정도



Natural frequency 110.07 MHz
Thickness shear strain energy 10462.22 J
(a) Before optimization



Natural frequency 109.93 MHz
Thickness shear strain energy 10743.02 J
(b) After optimization

Fig. 7 Performances of original and optimal designs

개선된 것을 알 수 있다. 고유진동수는 설계주파수에 해당하는 것으로 위상 최적설계에 의한 변화가 거의 없어야 하므로 타당한 방향임을 알 수 있다. 또한 전단 변형에너지의 절대적인 증가량은 작아 보이지만, 설계주파수에 해당하는 모드 자체가 전단변형이고, 전체 변형에너지의 86.3%를 차지하던 전단 변형에너지가 위상 최적설계 후에는 88.9%로 증가한 것이므로 실제 성능개선은 상당한 것으로 볼 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 압전 수정진동자의 성능 향상을 위한 전극경의 최적배치를 찾기 위해 위상 최적설계 기법을 개발하였다. 설계변수는 전극경의 질량 밀도와 관계되어 있으며, 수정판의 상/하 표면에 대칭으로 도포되는 전극경의 특성을 이용하여 한 면의 전극경 영역만 설계영역으로 설정하고 다른 한

면은 설계영역에 따라 변화하도록 설정하였다. 연속체 기반의 설계민감도 해석을 통해 고유치와 고유벡터의 설계변수에 대한 구배를 엄밀하고 효율적으로 계산할 수 있었다. 연속체 기반 설계민감도 해석은 유한차분법을 통한 민감도 해석에 비해 약 0.15%정도의 계산시간만 필요하고 매우 정확하게 계산됨을 확인하였다. 또한 유도된 설계민감도를 위상 최적설계에 적용하였다. AT-컷 쿼츠 수정판의 두께 방향 전단 변형을 엄밀하게 구현하기 위해서 두께방향으로 고차 형상함수를 사용하는 고차 민들린 판 이론을 도입하였다. 수치 예제를 통해서 위상 최적설계를 통해 설계주파수를 변경하지 않으면서 전단변형 모드가 보다 명확하게 나올 수 있는 결과를 제시할 수 있음을 확인하였다. 또한 설계영역에 따라서 다양한 위상을 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단이 지원하는 창의적 연구진흥사업(No. 2010-18282)의 지원을 받아 수행되었습니다. 첫번째 저자는 또한 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단이 지원하는 일반 연구자 사업(No. 2012R1A1A1040019)의 지원에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

Bottom, V.E. (1982) *Introduction to Quartz Crystal unit Design*, Van Nostrand Reinhold Co., New Work.

Cady, W.G. (1946) *Piezoelectricity*, McGraw-Hill, New Work.

Lee, P.C.Y., Syngellakis, S., Hou, J.P. (1987) A Two-dimensional Theory for High-frequency Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates with or Without Electrodes, *Journal of Applied Physics*, 61(4), pp.1249~1262.

Mindlin, R.D. (1963) High Frequency Vibrations of Plated, Crystal Plates, *Progress in Applied Mechanics*, Macmillan, New York, pp.73~84.

Mindlin, R.D. (1984) Frequencies of Piezoelectrically Forced Vibrations of Electroded, Doubly Rotated, Quartz Plates, *International Journal of Solids and Structures*, 20(2), pp.141~157.

Nelson, R.B. (1986) Simplified Calculation of Eigenvector Derivative, *AIAA Journal*, 14(9), pp.823~832.

Tiersten, H.F. (1969) *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York.

Wang, J., Yong, Y.K., Imai, T. (1999) Finite Element Analysis of Piezoelectric Vibrations of Quartz Plate Resonators with Higher-order Plate Theory, *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp.2303~2319.

Kim, M.-G., Kim, J.-H., Cho, S. (2010) Topology Design Optimization of Heat Conduction Problems using Adjoint Sensitivity Analysis Method, *Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 23(6), pp.683~691.

요 지

본 논문에서는 압전 수정진동자의 설계민감도 해석 및 위상 최적설계 기법을 개발하였다. 압전 수정진동자는 가해지는 전하에 의해 두께방향 전단 변형하게 되거나, 혹은 그 반대방향으로 기계 변형에 의해 전기적 신호를 검출하게 된다. 엄밀한 두께방향 전단해석을 위해 두께방향으로 고차 보간을 하는 고차 민들린(Mindlin) 판 이론을 도입하였다. 압전 수정진동자에서 수정판은 부도체이기 때문에 전기적 신호를 검출하거나 전기적 신호에 의해 수정판을 기계적으로 진동시키기 위해 수정판의 상/하 표면에 얇은 전극경을 도포한다. 비록 전극경이 매우 얇기는 하지만 그 무게와 형상에 따라 진동자의 거동이 달라지기 때문에, 설계민감도 해석 및 위상 최적설계를 위한 설계변수는 전극경의 질량 밀도와 관계된다. 따라서 위상 최적설계 문제는 두께방향 전단 변형에너지를 최대화하는 최적의 전극경 분포를 구하도록 구성한다. 또한 보다 의미있는 설계안을 얻기 위해 전극경의 재료량과 면적에 제약조건을 부여한다. 두께방향 전단 주파수(고유치)와 상응하는 모드형상(고유벡터)에 대한 설계구배는 고유벡터 확장법을 이용한 해석적 설계민감도 해석법을 통해 매우 효율적이고 정확하게 계산될 수 있다. 수치예제를 통해 제안된 해석적 설계민감도가 유한차분 설계민감도와 비교하여 매우 효율적이고 정확하게 계산됨을 확인하였다. 또한 위상 최적설계를 통해 도출된 최적 전극경 설계가 모드형상과 두께방향 전단 변형에너지를 개선시킴을 확인하였다.

핵심용어 : 압전재료, 수정진동자, 고유치 해석, 위상 최적설계