<학술논문> DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2014.38.5.545 ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

스퀼 융합모델을 이용한 모드연성에 의한 빔 구조 마찰 소음 연구

강 재 영*†
* 공주대학교 기계자동차공학부

Investigation on Friction Noise in Beam Structure Under Mode-Coupling by Using Analytical Finite-Element Squeal Model

Jaeyoung Kang*†
* Div. of Mechanical and Automotive Engineering, Kongju Nat'l Univ.

(Received January 28, 2014 ; Revised February 21, 2014 ; Accepted February 27, 2014)

Key Words: Friction Noise(마찰소음), Mode-Coupling(모드연성), Finite Element Method(유한요소법)

초록: 본 연구는 복잡한 빔 구조체의 마찰에 의한 소음을 유한요소기법을 이용하여 예측하였다. 마찰접촉 모델을 수학적으로 유도하여 유한요소기법에 접목하였다. 그 결과 빔 구조체의 특정 모드에서 모드연성에 의해서 동적 불안정성이 유발되고 있음을 보여주었다. 또한 마찰의 방향이 모드 불안정성에 매우 큰 영향을 미치고 있음을 보여주었다. 또한 실제 빔 구조체 시스템을 제작하여 해석에서 예측한 특정 주파수에서 소음 피크주파수가 발생하고 있음을 실험적으로 검증하였다.

Abstract: This study provided the analytical finite element method estimating the friction-induced noise on the complex beam structure. The frictional contact model was theoretically constructed and applied to the analytical finite element squeal model. The numerical results showed that the beam structure was excited by the mode-coupling instability of the specific system modes. Also, the direction of friction was shown to influence on the dynamic instability of the modes. Besides, the unstable modal frequencies estimated from the numerical calculation were validated by the experiment of the actual beam structure.

1. 서 론

마찰소음 연구는 오랫동안 연구되어 온 진동분야의 한 분야이다.[1,2] 마찰소음 메커니즘을 수학적 기법으로 연구하기 위해서 주로 단순 스프링-질량-마찰 모델이 소개되어 왔다.[3~5] 실제 시스템에 대한 마찰소음 문제에 있어서 대표적인 마찰소음 문제로는 브레이크 스퀼 문제가 있으며 이러한 브레이크 스퀼 해석의 경우 Nack[6,7]에 의해 소개되었듯이 유한요소(FE)를 이용하여 연구되어 왔다. 마찰소음 해석은 두 물체의 접촉면에서 상대운동으로 인하여 마찰이 발생하고 이를 시스템 모델에 삽입하여 마찰발생 시스템에 대한 복소수해석(Complex eigenvalue analysis)을 수행하였다. 또한 Bajer 등[8,9]은 상용소프트웨어인 ABAQUS 를 이용하여 브레이크 마찰소음해석을 수행하여 왔다. 하지만 브레이크 시스템 이외의 마찰소음 응용문제에 있어서 유한요소법(FEM)을 적용하는데 한계가 있기 때문에 주로 수학적인 모델에 의존하며 마찰소음 메카니즘을 연구하여 왔다. Kang 등[10,11]은 볼조인트 마찰소음에 대한 수학적인 모델을 제시하였고, 또한 리드스크류에 대한 정량적 마찰소음 해를 제시하기도 하였다. 하지만 수학 모델은 시스템 형상이 단순할 때만 모델링이 가능하기 때문에 복잡한 시스템에 대한 접근은 유한요소모델을 이용할 수 밖에 없다. 하지만 마찰소음 모델을 연구자의 의지대로 모델링 할 수 있는 상용소프트웨어가 존재하지 않기 때문에 특화된 마찰소음 유한요소 모델링 기법이 요구되고 있다.

이러한 기존 문제점들을 해결하기 위해서 수학적 마찰 모델링을 유한요소모델에 적용하는 스퀼 융합모델이 제시되어 왔다. 스퀼 융합모델이란 접촉면의

† Corresponding Author, jkang@kongju.ac.kr
Ⓒ 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

마찰접촉모델을 수학적으로 유도하고, 시스템형상은 유한요소법을 이용하여 설계하여 이 둘을 병합하는 기법이다. Kang[12,13]은 디스크 브레이크 스퀼 문제에 있어서 기존 상용소프트웨어로는 해결할 수 없는 주요한 스퀼 인자들을 스퀼 융합모델을 이용하여 연구할 수 있음을 보여 왔다.

본 연구에서는 디스크 브레이크 스퀼 융합모델에서 사용되었던 이론을 다른 마찰 소음 시스템에 응용하였다. 브레이크 스퀼 해석의 경우 불안정모드가 많이 존재하고, 넓고 불규칙한 접촉면에 의해서 실제 시험에서의 소음주파수와의 관계를 규명하는 것이 대단히 어렵다. 하지만 본 연구에 사용한 빔 구조는 구조가 간단하고 단순한 점 접촉에 의해 명확한 마찰 소음이 발생하였다. 따라서 단순 빔 모델에 대해 스퀼 융합모델을 이용하여 동적 불안정성을 예측하였고, 이를 시험 검증하여 스퀼 융합모델의 적합성을 검증하고자 하였다.

2. 운동방정식

복잡한 빔 구조의 마찰 소음 모델을 해석하기 위해서 유한요소법(FEM)을 이용하여 형상을 설계한다. 하지만 주요 마찰 접촉 모델은 수학적 이론으로 수식화하여 이를 유한요소 모델에 접목한다. 빔 구조는 정지해 있고 이송중인 곡면에 의해 상대 속도가 발생하며 Fig. 1과 같이 점접촉이 되어 있다고 모델링 한다. 특히 접촉강성(Contact stiffness) 모델은 강체 접촉(Rigid contact)에서 발생하는 접촉면 투과현상을 현실적으로 표현할 수 있다.[14]

빔 구조가 변형이 되었을 때 빔의 접촉점(a')에 대한 변위벡터를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}_{a'} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

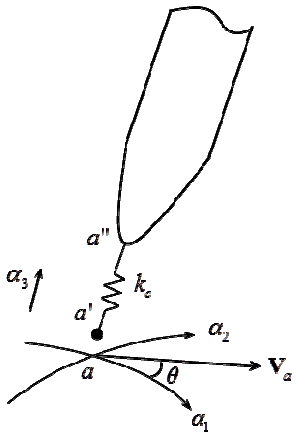

Fig. 1 Description of contact model, k_c is contact stiffness

여기서 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 는 각각 접촉곡면 α_1, α_2 의 방향벡터 및 법선방향(α_3)의 방향벡터이다. 또한 수평이동중인 곡면의 접촉점(a) 속도를 V 라고 할 때 속도벡터를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{V}_a = V\cos\theta\mathbf{e}_1 + V\sin\theta\mathbf{e}_2 \tag{2}$$

따라서, 빔과 이동곡면 간 접촉점의 상대속도는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{V}_{a'} - \mathbf{V}_a = (\dot{u}_1 - V\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\dot{u}_2 - V\sin\theta)\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

그에 따른 마찰력을 쿨롱의 법칙(Coulomb's law)에 따라 표현해 보면 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_\mu = -\mu\cdot p\cdot\frac{\mathbf{V}_{rel}}{|\mathbf{V}_{rel}|} \tag{4}$$

이때 μ 는 접촉점에서의 마찰계수이고, p 는 법선방향의 접촉압력을 의미한다. 여기서 접촉압력 p 는 정압 및 진동에 따른 압력으로 나타낼 수 있다.

$$p = p - k_c u_3 \tag{5}$$

모드가정법(Assumed mode method)를 이용하여 빔 구조의 마찰접촉 운동방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{n=1}^{N} Q_{mn}(q_n),$$
$$m = 1,\ldots,N \ , \ n = 1,\ldots,N \tag{6}$$

$$L = T - (U + U_c) \tag{7}$$

$$\mathbf{q} == \{q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N\}^T \tag{8}$$

여기서 N 은 해석에 사용된 총 모드의 개수를 의미한다. 또한 T , U , U_c 는 각각 빔 구조의 운동에너지, 단품 강성에너지 및 접촉 강성에너지를 의미하며, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T = \rho\int_{\Omega_b}\langle\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle d\Omega \tag{9}$$

$$U_c = \frac{k_c}{2}u_3^2 \tag{10}$$

이때, Ω_b 는 빔 구조의 체적을 의미하며, $\langle\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle$ 는 빔 구조의 임의의 지점에서의 속도벡터 $\mathbf{V}$ 간 내적(Vector inner product)를 의미한다. 또한 U 는 빔 구조의 단품 강성에너지로써, 유한요소법(FEM) 모달해석으로 구할 수 있다. 이때 접촉점에서의 마찰력에 의한 일반화된 힘 Q_{mn} (Generalized force)은 마찰력에 의한 가상일로 부터 구할 수 있다.

$$\delta W = \sum_{n=1}^{N} Q_{mn}(q_n)\cdot \delta q_m = \left\langle \mathbf{F}_{\mu}, \delta \mathbf{u}_{a'} \right\rangle \tag{11}$$

여기서 가상 변위는 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{u}_{a'} = \delta u_1 \mathbf{e}_1 + \delta u_2 \mathbf{e}_2 + \delta u_3 \mathbf{e}_3 \tag{12}$$

모드가정법에 사용할 모드함수(Trial function)는 경계조건을 만족하는 함수를 사용해야 한다. 이를 위해서는 빔 구조에 대한 고유치 함수(Eigenfuction)를 유도해야 한다. 하지만 구조가 복잡하여 수학해(exact solution)를 구할 수 없다면 유한요소법의 모달해석에 의한 고유모드에 대한 모드벡터(Mode vector)들을 사용할 수 있다. 빔 구조의 접촉점(Contact node)에 대한 변위벡터를 다음과 같이 유한요소 고유벡터의 모드합성(Modal expansion form)으로 표현해 보면 다음과 같다.

$$u_1(t) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n^{\alpha_1} q_n(t) \tag{13}$$

$$u_2(t) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n^{\alpha_2} q_n(t) \tag{14}$$

$$u_3(t) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n^{\alpha_3} q_n(t) \tag{15}$$

여기서, $\Phi_n^{\alpha_1}$, $\Phi_n^{\alpha_2}$, $\Phi_n^{\alpha_3}$ 는 각각 α_1, α_2, α_3 방향의 n 번째 모드벡터를 의미한다. 본 연구에서는 Fig. 2에 보는 바와 같이 빔 구조를 직접 설계, 제작하여 시험을 수행해 보았다. 마찰소음을 계측하기 위해서 가속도계를 로드 하단부에 부착하였다. Fig. 2의 실제 빔 구조체에 대한 유한요소모델을 Fig. 3과 같이 구축하였다.

운동방정식 (6)을 정상 상태(Steady-sliding)에 대해서 선형화하면 다음과 같은 선형 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K}_{sym} + \mathbf{K}_{nonsym}\right)\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{16}$$

이때 $\mathbf{C}\left(=\mathbf{C}^T\right)$ 는 감쇄행렬로 마찰 댐핑에 의해 발생하였고, $\mathbf{K}_{sym}$ 는 단품 강성 및 접촉강성에 의한 대칭 강성행렬이다. 또한 $\mathbf{K}_{nonsym}$ 는 마찰에 의한 모드간 연성 항으로 불안정성을 유발하는 비대칭 강성행렬이다. 이러한 시스템 행렬은 다음과 같이 표기된다.

$$\mathbf{C} = \frac{\mu p}{V}\begin{Bmatrix} \sin^2\theta\left[\Phi_i^{\alpha_1}\Phi_j^{\alpha_1}\right] - \cos\theta\sin\theta\left[\Phi_i^{\alpha_1}\Phi_j^{\alpha_2}\right] \\ -\cos\theta\sin\theta\left[\Phi_i^{\alpha_2}\Phi_j^{\alpha_1}\right] + \cos^2\theta\left[\Phi_i^{\alpha_2}\Phi_j^{\alpha_2}\right] \end{Bmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{K}_{sym} = \left[\omega_{ii}^2\right] + k_c\left[\Phi_i^{\alpha_3}\Phi_j^{\alpha_3}\right] \tag{18}$$

$$\mathbf{K}_{nonsym} = \mu k_c\left\{\cos\theta\left[\Phi_i^{\alpha_1}\Phi_j^{\alpha_3}\right] + \sin\theta\left[\Phi_i^{\alpha_2}\Phi_j^{\alpha_3}\right]\right\} \tag{19}$$

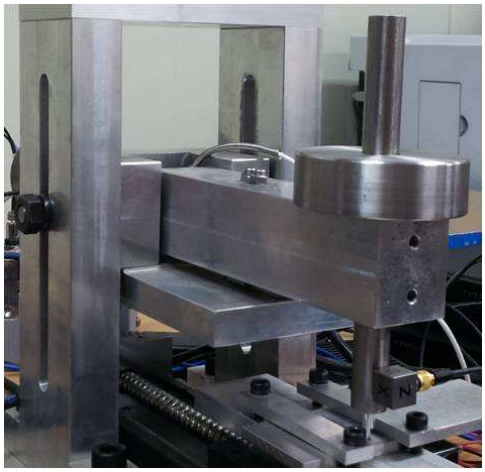

Fig. 2 Experiment set-up of beam structure, $\theta = 90°$

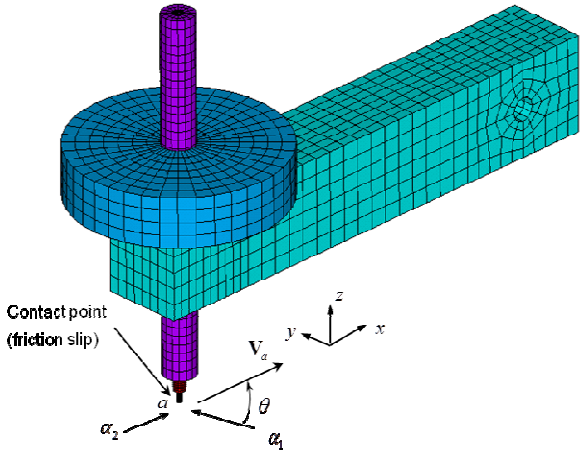

Fig. 3 Finite element model, $\theta = 90°$

여기서 $\left[\omega_{ii}^2\right]$ 는 시스템 고유주파수 제곱의 대각선 행렬이다. 이때 운동방정식 (16)이 선형이므로 고유치(Eigenvalue)를 구할 수 있으며, 비대칭 행렬구조이므로 고유치(λ)가 복소수($\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\,\mathrm{Im}(\lambda)$) 형태로 나타날 수 있다. 이때 복소수 해의 실수부($\mathrm{Re}(\lambda)$)가 양의 실수인 시스템을 불안정 시스템이라고 할 수 있다.

3. 결 과

선형운동방정식(16) 을 이용하여 복소수 해를 구하여 빔 구조의 마찰에 의한 불안정성을 구하고자 한다. 특히 빔 구조의 특정모드의 경우 동적 불안정성을 발생시키게 되는데 이에 대한 마찰유발 불안정 특성을 살펴보고자 한다. 본 연구에 사용된 설계 인자 값은 다음과 같다. 빔 구조의 사각 빔과 접촉핀의 경우 알루미늄 재질로 밀도 $2770kg\cdot m^{-3}$, 탄성계수

$71GPa$, 푸아송비 0.33 이고, 그외 원통형 하중구조 및 원통 로드의 경우 철 재질이며 밀도 $7850kg \cdot m^{-3}$, 탄성계수 $200GPa$, 푸아송비 0.3 이다. 또한, 원통형 정하중은 $500g$ 이고, 알루미늄 핀의 접촉강성은 $1.67 \times 10^9 N \cdot m^{-1}$ 이다.

우선 마찰계수의 증가에 따른 빔 구조의 진동모드의 불안정성을 살펴보기 위하여 마찰계수 변화에 따라 복소수해를 추적해 보았다. Fig. 4에서 보듯이 마찰계수가 증가할 때 특정 주파수에서 불안정성이 발생 ($\mathrm{Re}(\lambda) > 0$) 할 수 있음을 알 수 있다. 특히 주파수 궤적(Frequency loci)의 특성을 보면 두 주파수가 마찰계수가 증가할 때 서로 만나는 특성을 볼 수 있다. 이러한 특성을 모드연성 불안정성(Mode-coupling instability)라고 한다. 이를 자세히 살펴보기 위해서 Fig. 5와 같이 마찰계수가 증가할 때의 실수부의 궤적을 살펴보았다. Fig. 5에서 보듯이 특정 마찰계수 이상으로 증가할 때 두 개의 특정 궤적이 둘로 분기하는 것을 볼 수 있다. 이렇게 실수부가 둘로 분기하면서 양의 실수부가 증가하게 되는데 이러한 특성은 모드연성 불안정성에 기인한 것이다.

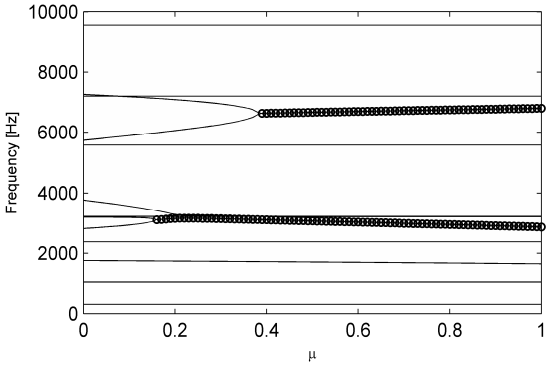

Fig. 4 Frequency with friction coefficient, $\theta = 90°$; dot indicates the dynamic instability, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

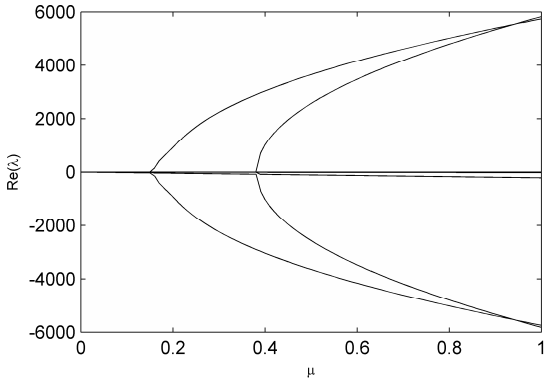

Fig. 5 Real parts of eigenvalues with friction coefficient, $\theta = 90°$

Fig. 6은 마찰이 발생하는 방향에 대한 빔 구조의 불안정성을 고찰해 보고자 하였다. 이 경우 마찰의 방향이 변하더라도 불안정성이 발생하는 모드가 정해져 있음을 알 수 있다. 하지만 이러한 불안정 모드가 마찰 방향에 대해 갖는 불안정성 성향은 매우 큰 변화를 갖는다. Fig. 7에서 보듯이 마찰의 방향이 변할 때 양의 실수부의 크기가 매우 크게 변하고 있으며, 특히 $\theta = 90°$ 일 때 양의 실수부가 최대가 됨을 알 수 있다. 이는 마찰 방향이 빔의 방향과 일치할 때 마찰에 의한 불안정성이 최대가 되고 있음을 의미한다.

Fig. 8 과 Fig. 9 에서의 진동 모드형상들은 상기 결과에서 모드연성의 의해서 불안정해진 특정 진동모드의 형상을 보여주고 있다. Fig.8 에서는 3500Hz 부근의 불안정 모드를 발생시키는 주요 두 단품 모드를 나타내었고, Fig. 9 에서는 6500Hz 부근의 불안정성 모드연성에 기여한 두 단품 모드를 나타내었다. 이러한 불안정 모드들은 x 방향으로 굽힘 변위를 갖고 있다는 공통점이 있다. 따라서, 로드의 굽힘 진동모드가 마찰계수가 증가하면서 모드연성에 의해 불안정성이 발생할 수 있음을 보여주고 있다.

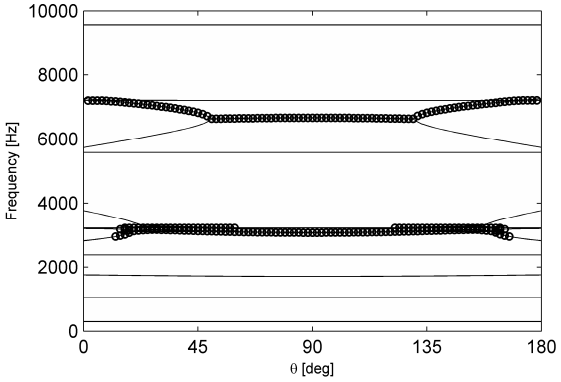

Fig. 6 Frequency with the direction of friction, $\mu = 0.5$; dot indicates the dynamic instability, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

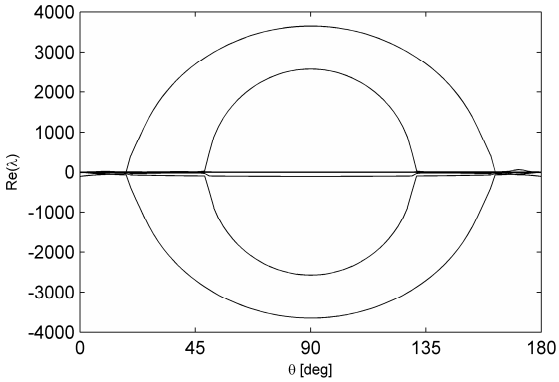

Fig. 7 Real parts of eigenvalues with the direction of friction, $\mu = 0.5$

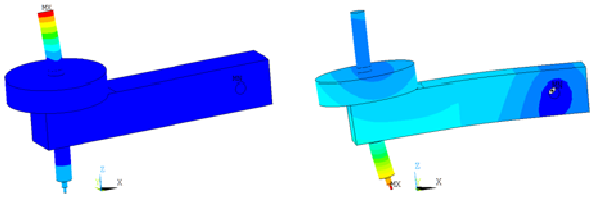

Fig. 8 Mode shapes involved in mode-coupling instability at 3500Hz, $\mu = 0.5$

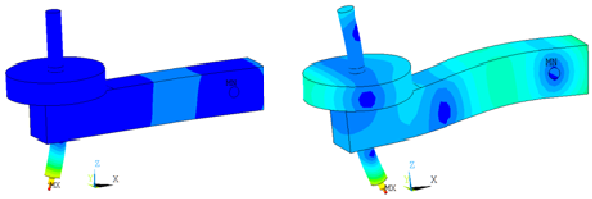

Fig. 9 Mode shapes involved in mode-coupling instability at 6500Hz, $\mu = 0.5$

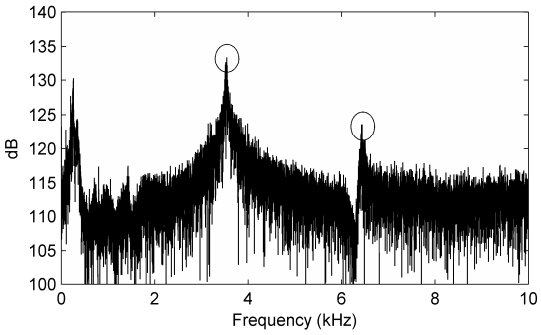

Fig. 10 FFT of acceleration during friction noise.

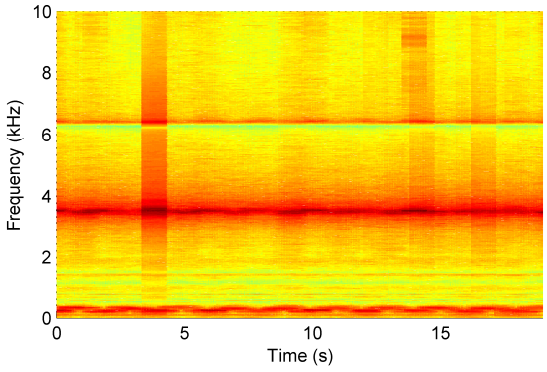

Fig. 11 Spectrogram of acceleration during friction noise

상기 해석을 검증하기 위해서 Fig. 2 에 보여지는 실험장치를 통해서 마찰에 의한 소음실험을 실시하였다. 마찰운동이 진행되면서 서서히 소음이 발생하며 가속도계를 빔 구조에 부착하여 발생하는 마찰소음의 주파수를 분석하였다. 그 결과 Fig. 10 에서 보는 바와 같이 3500Hz 부근과 6500Hz 부근 주파수에서 진동이 증가하는 것을 알 수 있다. 이는 해석결과에서 보듯이 3500Hz 부근과 6500Hz 부근의 모드가 불안정하여 마찰소음을 유발하고 있음을 보여준다. Fig. 11 에서는 20 초간의 소음을 Spectrogram 을 이용하여 보여주는 것으로 3500Hz 부근과 6500Hz 부근의 모드가 지속적으로 불안정하여 마찰소음을 발생시키고 있음을 보여주고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 수학적 마찰접촉모델을 유한요소 형상모델에 접목하여 빔 구조체에 대한 마찰소음 모델을 구축하고 해석을 수행하였으며, 이를 실험적으로 검증하였다. 이를 통해 다음과 같은 결론에 도달하였다.

첫째, 빔 구조의 접촉점에서 마찰계수가 증가하면서 시스템 고유치의 양수부가 발생하였고, 이는 시스템의 동적 불안정성을 유발하였다.

둘째, 빔 구조의 동적 불안정성은 특정 굽힘모드간 모드연성에 의해 유발되었다.

셋째, 굽힝모드 동적 불안정성은 마찰방향에 영향을 받으며, 안으로 작용하는 마찰조건에서 불안정성 성향이 증가하였다.

넷째, 특정 불안정 모드에 상응하는 주파수가 소음주파수로 발현되어 가속도계로 계측되었다.

향후 이러한 스퀼 융합모델을 이용하여 각종 기어류 마찰소음, 자동차 내외장재 및 샤시부품 마찰소음, 가전부품 마찰소음 및 인공관절 마찰소음 등에 응용할 예정이며, 특히 환경 영향도를 해석기법에 적용하여 환경적 마찰소음 인자를 연구할 예정이다.

후 기

이 논문은 2012 년 공주대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌
(References)

(1) Ibrahim, R. A., 1994, “Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos Part Ⅱ: Dynamics and Modeling,” *Applied Mechanics Reviews, ASME*, Vol. 47, pp. 227~253.

(2) Akay, A., 2002, “Acoustics of Friction,” *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 111, pp. 1525~1548.

(3) Brockley, C. A. and Ko, P. L., 1970, “Quasi-Harmonic Friction-Induced Vibration,” *Journal of Lubrication Technology, ASME,* Vol. 89, pp. 550~556.

(4) Popp, K. and Stelter, P., 1990, “Stick-Slip Vibrations and Chaos,” *Proceedings of the Royal Society A,* Vol. 332, pp. 89~105.
(5) Leine, R. I., Campen, D. H. V., Kraker, A. D. and Steen, L. V., 1998, “Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models,” *Nonlinear Dynamics,* Vol. 16, pp. 41~54.
(6) Nack, W. and Joshi, A. M., 1995, “Friction Induced Vibration: Brake Moan,” 951095, SAE, Warrendale, PA.
(7) Nack, W., 2000, “Brake Squeal Analysis by Finite Elements,” *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 23, pp. 263~275.
(8) Bajer, A., Belskyl, V. and Zeng, L., 2003, “Combining a Nonlinear Static Analysis and Complex Eigenvalue Extraction in Brake Squeal Simulation,” 2003-01-3349, SAE, Warrendale, PA.
(9) Bajer, A., Belskyl, V. and Kung, S., 2004, “The Influence of Friction-Induced Damping and Nonlinear Effects on Brake Squeal Analysis,” 2004-01-2794, SAE, Warrendale, PA.
(10) Kang, J., 2011, “Theoretical Model of Ball Joint Squeak,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, pp. 5490~5499.
(11) Kang, J. and Kim, K., 2010, “Squeak Noise in Lead Screw Systems: Self-Excited Vibration of Continuous Model, “*Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 3587~3595.
(12) Kang, J., Krousgrill, C. M. and Sadeghi, F., 2009, “Comprehensive Stability Analysis of Disc Brake: Gyroscopic, Negative Slope and Mode-Coupling Instability," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 324, pp. 387~407.
(13) Kang, J., 2009, “Squeal Analysis of Gyroscopic Disc Brake System Based on Finite Element Method,” *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 51, pp. 284~294.
(14) Kang, J. and Krousgrill, C. M., 2010, “The Onset of Friction-Induced Vibration and Spragging," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 3537~3549.