<학술논문> DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2014.38.5.535 ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

비선형계획법에서 목적함수의 상한함수를 이용한 강건최적설계

이 세 정*· 박 경 진*†
* 한양대학교 기계공학과

Robust Optimization Using Supremum of the Objective Function for Nonlinear Programming Problems

Se Jung Lee* and Gyung Jin Park*†
* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received December 12, 2013 ; Revised March 2, 2014 ; Accepted March 3, 2014)

Key Words: Robust Optimization (강건최적설계), Robustness Index (강건성지수), Supremum function (상한함수), Optimum Sensitivity (최적민감도)

초록: 강건최적설계 분야에서 목적함수의 강건성은 목적함수의 변화가 둔감한 해를 강조한다. 일반적으로 목적함수의 강건성은 설계변수나 파라미터에 대한 목적함수의 변동을 줄임으로써 달성할 수 있다. 하지만, 기존의 방법들에서는 변동에 둔감한 목적을 달성하기 위해 목적함수의 값이 희생되는 경우가 있다. 또한, 설계변수의 수가 증가할수록 비선형계획법을 이용한 강건최적설계의 수치적 계산비용은 증가한다. 본 연구에서는 상한함수를 사용한 새로운 강건성지수와 비선형계획법에서의 강건최적설계 방법을 제안한다. 또한, 제안한 방법의 효율성을 향상시키기 위하여 선형화된 함수의 상한 값을 이용한 방법도 소개한다. 이를 다양한 수학예제에 적용하고 기존의 강건성지수와 수치적 성능 비교를 통해 제안한 방법의 유용성을 검증한다. 제안한 강건성지수는 목적함수의 성능에 손실이 발생하지 않으며 효율성을 크게 향상시킬 수 있다.

Abstract: In the robust optimization field, the robustness of the objective function emphasizes an insensitive design. In general, the robustness of the objective function can be achieved by reducing the change of the objective function with respect to the variation of the design variables and parameters. However, in conventional methods, when an insensitive design is emphasized, the performance of the objective function can be deteriorated. Besides, if the numbers of the design variables are increased, the numerical cost is quite high in robust optimization for nonlinear programming problems. In this research, the robustness index for the objective function and a process of robust optimization are proposed. Moreover, a method using the supremum of linearized functions is also proposed to reduce the computational cost. Mathematical examples are solved for the verification of the proposed method and the results are compared with those from the conventional methods. The proposed approach improves the performance of the objective function and its efficiency.

1. 서 론

실제 구조물이 존재하는 환경에는 다양한 불확실성(Uncertainty)이 존재한다. 이와 같은 불확실성은 설계자가 정의한 공학적 특성을 저하시키는 원인이 된다. 설계과정에서 불확실성을 고려하기 위한 노력의 일환으로 강건최적설계 방법(Robust Design Optimization, RDO)이 대두되었다. 강건최적설계는 설계변수나 시스템 파라미터의 불확실성에 목적함수의 변화가 둔감하고 설계 제약조건을 만족할 수 있는 보수적인 해를 추구한다.

강건최적설계의 연구는 최적설계의 설계정식화에 강건성을 표현하는 방법에 따라 분류할 수 있다. 일반적으로 불확실성을 고려하지 않는 확정론

† Corresponding Author, gjpark@hanyang.ac.kr

적 최적설계(Deterministic Optimization, DO)의 정식화는 크게 선형계획문제(Linear programming problem, LP)와 비선형계획문제(Nonlinear programming problem, NLP)로 나뉜다.[1] 강건최적설계의 연구는 모두에 대하여 이루어졌으며, 각 설계 정식화를 구성하는 목적함수와 제한조건의 강건성을 확보하기 위한 지수의 개발로 이어졌다. 본 연구에서는 목적함수의 강건성을 확보하기 위한 강건성지수와 이를 이용한 비선형계획법에서 강건최적설계 방법에 대해 논한다.

비선형계획법을 사용한 강건최적설계의 연구에서 목적함수의 강건성지수들은 일반적으로 목적함수의 값은 다소 희생하더라도 목적함수의 변화가 둔감한 해를 강조한다. 이러한 목적을 달성하기 위해 현재까지 다양한 목적함수의 강건성지수들이 제안되었다. Belegundu 등[2]은 민감도정보를 최소화하여 강건성을 확보하려 하였다. 설계변수에 대한 목적함수의 민감도에 따른 가중치를 부여할 수 있는 특징이 있다. Han,[3] Kim[4] 등은 최악조건의 개념을 이용하여 설계변수의 변동에 가장 민감한 부분을 최소화 하는 방법을 소개하였다. Ramakrishnan 등[5]은 테일러 급수에 의해 유도된 분산식을 정의하고 이를 최소화하는 강건최적설계 방법을 제시하였다. Parkinson[6]는 정의되는 설계변수의 공차범위 내에서 목적함수의 최대값과 최소값의 편차를 최소화하는 방법을 제시하였다.

목적함수의 강건성지수에서 성능과 강건성을 동시에 확보하려는 방법들도 소개되었다. Sundaresan 등[7]은 설계 점에서 최악조건을 변동으로 가정하고 직교배열표를 이용하여 평균과 분산을 계산하는 방법을 제안하였다. Su 등[8]은 목적함수의 분산에 대한 계산을 테일러 근사식으로부터 정의된 방법을 이용하였다. Doltsinis,[9] Lee 등[10]은 정규화를 통해 목적함수의 평균과 표준편차의 상대적 비율을 고려할 수 있는 다중목적함수 형태의 강건성지수를 제시하고 목적함수의 평균과 분산을 동시에 줄이고자 하였다. Chen 등[11]은 절충의사 결정 문제를 적용하여 목적함수에 대한 제한조건을 만족하면서 동시에 편차를 최소화하는 방법을 소개하였다. Jung 등[12]은 명시함수로 표현할 수 있는 파라미터를 도입하고 이를 제한조건에서 목적함수의 상한 값으로 정의하여 설계자가 의도한 목적함수의 목표확률을 만족하는 강건최적설계 방법을 제시하였다.

기존에 소개된 강건성지수들은 공통적으로 목적함수의 변화가 둔감한 해를 강건성으로 강조하고 있다. 하지만 이러한 특성은 목적함수의 손실을 발생시킬 수 있다. 또한, 기존의 방법들에서는 정의한 강건성지수를 이용하여 비선형계획법에서 강건최적설계를 수행할 때 목적함수로 정의된 강건성지수에 대한 민감도를 계산해야 하는 특성이 있다. 이러한 이유로 강건최적설계는 일반적으로 확정론적 최적설계에 비해 상대적으로 많은 설계비용을 필요로 한다.

본 연구에서는 기존의 강건성지수와 비선형계획법을 이용한 강건최적설계 방법이 내포하고 있는 한계점을 개선하기 위하여 비선형계획법에서 목적함수의 상한함수를 이용한 강건최적설계방법을 제안한다. 목적함수의 상한함수로 표현되는 강건성지수는 설계변수나 파라미터의 변동을 고려할 때 목적함수가 가장 큰 부분을 의미한다. 이 강건성지수를 이용하여 강건최적설계를 수행하면 불확실성의 변동을 고려함에도 목적함수의 성능에 손실이 발생하지 않는 강건해를 제시한다. 또한, 제안한 강건성지수로 비선형계획법을 이용한 강건최적설계를 수행함에 있어 최적민감도[13]를 적용하여, 강건성지수의 계산만으로 별도의 민감도 계산이 필요하지 않음을 수학적 전개과정을 통해 보인다. 더불어 제안한 강건최적설계 과정의 효율성을 향상시키기 위하여 선형화된 목적함수의 강건성지수를 소개한다. 제안한 방법은 수학예제에 적용하고 기존의 강건성지수와 수치적 성능 비교를 통해 제안한 방법의 유용성을 검증한다.

2. 기존 목적함수의 강건성지수

비선형계획법을 사용한 강건최적설계에서 목적함수의 강건성을 확보하기 위해 제안된 강건성지수들은 공통적으로 설계변수나 파라미터의 불확실

Table 1 Robustness index (Ref. 14)

Type	Design formulation	Type	Design formulation
A	$\min \sum_{i=1}^{n} w_i \left\lvert \frac{df(b)}{db_i} \right\rvert$	E	$\min f(\mathbf{b}) + \alpha \cdot \mathrm{var}[f(\mathbf{b})]$
B	$\min \max \left\lvert \frac{df(\mathbf{b})}{d\mathbf{b}} \right\rvert$	F	$\min w \cdot \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1-w) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*}$
C	$\min \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial b_i} \right)^2 \sigma_{b_i}^2$	G	$\max \mu_f - \sigma_f$
D	$\min \lvert f_U - f_L \rvert$	H	$\min \tau$ sub to $\Pr[f(\mathbf{b}) \le \tau] \ge P_t$

성 범위에 대하여 목적함수의 변화가 작은 해를 강건해로 간주한다. 이와 같은 목적을 달성하기 위해 기존에 소개된 강건성지수들은 Table 1과 같다.[14] Table 1에 나타난 바와 같이, 기존의 목적함수의 강건성지수는 크게 목적함수의 변동을 최소화하는 지수(A, B, C, D)와 평균과 변동을 동시에 고려하는 지수들(E, F, G, H)로 구분할 수 있으나, 목적함수의 변동이 작은 해를 강조하는 점은 공통적이다.

목적함수의 강건성만을 고려한 강건최적설계의 일반화된 정식화는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{b} \in R^n && \text{(1a)} \\ &\text{to minimize} && F(\mathbf{b}+\mathbf{z}^{\mathbf{b}}, \mathbf{p}+\mathbf{z}^{\mathbf{p}}) && \text{(1b)} \\ &\text{subject to} && g_j \le 0,\ j=1,\cdots,m && \text{(1c)} \\ & && \mathbf{b}_{\mathrm{L}} \le \mathbf{b} \le \mathbf{b}_{\mathrm{U}} && \text{(1d)} \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{b}$ 는 n 개의 요소로 이루어진 설계변수 벡터이며, $\mathbf{z}^{\mathbf{b}}$ 와 $\mathbf{z}^{\mathbf{p}}$ 는 각각 설계변수와 설계파라미터에 발생하는 공차, 잡음 혹은 외란을 나타낸다. F 는 평균과 변동으로 정의되는 목적함수를 의미하며 g_j 는 제한조건을 의미한다. $\mathbf{b}_{\mathrm{L}}$ 과 $\mathbf{b}_{\mathrm{U}}$ 는 각각 설계변수의 상한, 하한벡터이며, m 은 제한조건의 수를 의미한다.

앞서 소개한 목적함수의 강건성지수들은 식 (1b)의 F 를 대체하게 된다. 이를 토대로 비선형계획법을 사용한 강건최적설계를 수행하려면, 정의한 강건성지수에 대한 계산과 더불어 지수에 대한 민감도의 계산이 필요하다. 이러한 이유로 비선형계획법을 이용한 강건최적설계는 확정론적 최적설계에 비해 설계 비용이 고가인 특성을 가지고 있다.

3. 상한함수를 이용한 강건최적설계 방법

본 연구에서는 설계변수의 공차나 파라미터의 불확실성에 대한 변동 범위가 정의되었을 때 목적 강건성을 확보할 수 있는 지수와 강건최적설계 방법을 제안한다.

3.1 상한함수를 이용한 목적함수의 강건성지수

제안하는 강건성지수는 목적함수의 상한함수(Supremum function)로 정의된다. 강건성을 나타내기 위해 상한함수의 개념을 이용한 방법은 선형계획법에서 강건성을 고려하기 위한 연구에서 시작한다.[15,16] 본 연구에서는 상한함수를 이용한 개념을 차용하여 비선형계획법에서 강건최적설계를 위한 목적함수의 강건성 지수를 새로이 제안한다. 설계변수의 공차나 파라미터의 변동 범위가 정의될 때 목적함수의 상한함수는 다음과 같다.

$$\hat{f}(\mathbf{b}) = \sup_{\substack{\mathbf{b}-\Delta\mathbf{b}\le\mathbf{c}\le\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b} \\ \mathbf{p}-\Delta\mathbf{p}\le\mathbf{q}\le\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}}} f(\mathbf{c},\mathbf{q}) \tag{2}$$

여기서 $\Delta\mathbf{b}$ 는 설계변수의 공차를 $\Delta\mathbf{p}$ 는 파라미터에 대한 불확실성의 범위를 나타낸다. 목적함수의 상한함수가 지니는 의미는 정의한 변동 범위 내에서 목적함수가 가장 큰 값을 의미한다. 식 (2)는 설계변수와 파라미터의 변동의 범위 내에서 목적함수의 상한 값을 계산하는 정식화로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{c} \in R^n \text{ and } \mathbf{q} \in R^o \\ &\text{to maximize} && f(\mathbf{c},\mathbf{q}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{b}-\Delta\mathbf{b} \le \mathbf{c} \le \mathbf{b}+\Delta\mathbf{b} \\ & && \mathbf{p}-\Delta\mathbf{p} \le \mathbf{q} \le \mathbf{p}+\Delta\mathbf{p} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $\mathbf{c}$ 와 $\mathbf{q}$ 는 상한 값을 계산하기 위한 정식화에서 각각 설계변수와 파라미터에 해당한다. 제안한 강건성지수는 식 (3)에 대한 최적설계를 수행함으로써 변동을 고려한 목적함수의 상한 값을 계산하게 된다.

3.2 상한함수를 이용한 강건최적설계 방법

앞서 소개한 목적함수의 상한함수를 이용한 강건성지수로 구성된 강건최적설계의 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{b} \in R^n \\ &\text{to minimize} && \hat{f}(\mathbf{b}) \\ &\text{subject to} && g_j(\mathbf{b}) \le 0,\quad j=1,\cdots,m \\ & && \mathbf{b}_{\mathrm{L}} \le \mathbf{b} \le \mathbf{b}_{\mathrm{U}} \end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)의 정식화에서는 설계변수가 갱신되는 매 반복과정(Iteration)마다 강건성지수를 계산하는 식 (3)의 정식화를 수행해야 한다. 본 논문에서는 식 (4)를 외부루프(Outer loop), 식 (3)을 내부루프(Inner loop)로 지칭한다. 따라서 제안한 방법은 외부루프에서 강건최적설계를 수행하기 위해 내부루프를 순환하는 이중루프(Double loop)구조로 구성되어 있다. 제안한 강건최적설계의 순서를 요약하면 다음과 같다.

단계 1: 초기 설계점을 설정한다. 설계변수의 공차범위와 파라미터의 불확실성 범위를 정의한다. (반복횟수 $k=0$)

단계 2: 초기 값 혹은 k 번째 반복과정에서 주어

진 설계변수와 불확실성의 범위를 이용하여 강건성 지수를 계산하는 내부루프를 수행한다. 초기 값 혹은 k 번째 반복과정에서 주어진 설계변수와 불확실성의 범위는 내부루프의 설계변수 혹은 파라미터에 대한 하한벡터와 상한벡터로 사용된다. 식 (3)의 최적설계를 각각 수행하여 목적함수에 대한 상한 값과 최적민감도를 구한 후, 단계 3으로 이동한다.

단계 3: 단계 2에서 구한 상한 값과 최적민감도를 이용하여 외부루프인 식 (4)에서의 설계변화량 $\delta\mathbf{b}$ 을 결정한다.

단계 4: 수렴여부를 결정한다. 수렴조건을 만족하면 반복과정을 멈춘다. 그렇지 않으면 단계 5로 이동한다.

단계 5: 양의 이동거리를 결정한다. 사용하는 일변수 최적화 알고리즘마다 이를 결정하는 방법이 다를 수 있다. 앞서 구한 설계변화량과 양의 이동거리를 이용하여 외부루프에서 새로운 설계 점으로 갱신한다. 반복횟수를 $k = k+1$ 로 대치하고 단계 2로 되돌아간다.

위 일련의 과정을 순서도로 나타내면 Fig. 1과 같다.

4. 비선형계획법을 이용한 강건최적설계로의 적용

4.1 최적민감도를 이용한 민감도 계산

앞서 목적함수의 강건성을 확보하기 위한 강건최적설계를 수행함에 있어 제안한 방법은 내부루프의 최적점에서 계산된 최적민감도를 이용하여 외부루프의 민감도로 그대로 이용하는 특성을 지닌다. 최적민감도는 최적설계 시 상수로 고려하는 파라미터가 바뀌었을 때 그 파라미터에 대한 최적값의 변화율이다. 제안한 방법에서 외부루프의 설계변수 $\mathbf{b}$ 는 내부루프에서 상한벡터와 하한벡터를 구성하는 상수로 취급된다. 따라서, 내부루프인 최적점 $\mathbf{c}^*$ 에서 상수로 고려하는 파라미터가 바뀌었을 때 파라미터의 변화에 대한 최적 값의 변화율, 즉 최적민감도를 계산하게 된다. 최적민감도의 일반화된 수식은 Barthelem 와 Sobieszczanski-Sobieski 가 제안[13]하였으며 아래와 같다.

$$\frac{d\hat{f}(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{db_i} = -\left(\frac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial b_i} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial b_i}\right) \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{h}(\mathbf{c},\mathbf{q})$ 는 내부루프에서 정의되는 제한조건 함수들을 의미하며, $\mathbf{w}$ 는 라그랑지 승수벡터이다.

식 (5)를 이용하여 내부루프의 최적민감도가 외부루프의 민감도로 사용될 수 있는 수학적 전개과정을 소개한다. 앞서 목적함수의 상한 값을 계산하기 위한 내부루프의 정식화인 식 (3)은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\text{Find} && \mathbf{c} \in R^n \text{ and } \mathbf{q} \in R^o \\
&\text{to maximize} && f(\mathbf{c},\mathbf{q}) \equiv \text{to minimize} - f(\mathbf{c},\mathbf{q}) \\
&\text{subject to} && -\mathbf{c} + (\mathbf{b} - \Delta\mathbf{b}) \le \mathbf{0} \\
& && \mathbf{c} - (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \le \mathbf{0} \\
& && -\mathbf{q} + (\mathbf{p} - \Delta\mathbf{p}) \le \mathbf{0} \\
& && \mathbf{q} - (\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \le \mathbf{0}
\end{aligned} \quad (6)$$

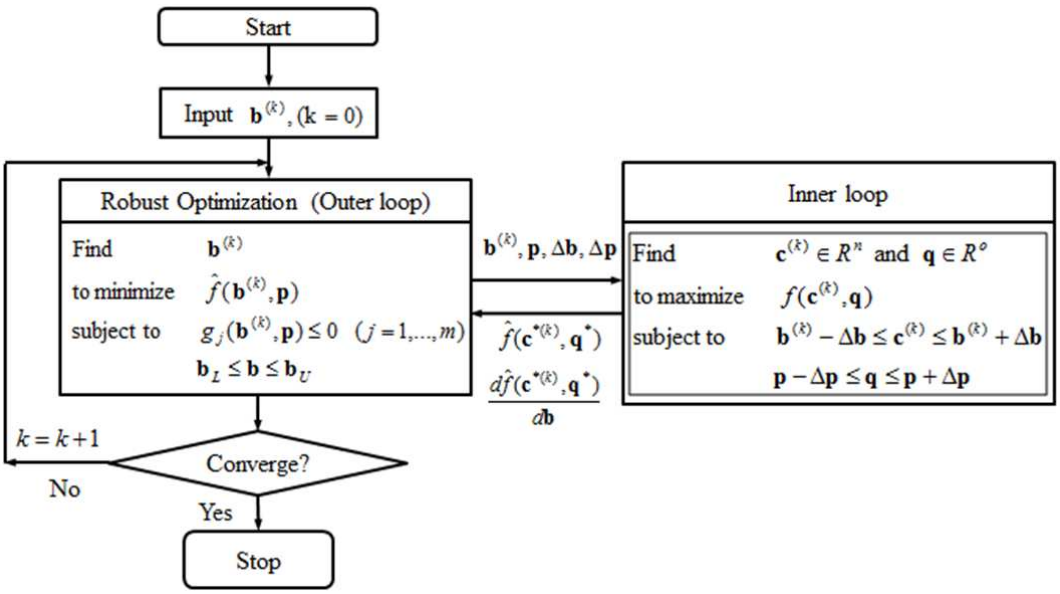


Fig. 1 Flowchart for robust optimization using the supremum functions of the objective function

식 (6)을 라그랑지 함수(Lagrange function, L)식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L(\mathbf{c},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_3,\mathbf{s}_4) = & -f(\mathbf{c},\mathbf{q}) \\ & +\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{c}+(\mathbf{b}-\Delta\mathbf{b})+\mathbf{s}_1) \\ & +\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{c}-(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})+\mathbf{s}_2) \\ & +\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{q}+(\mathbf{p}-\Delta\mathbf{p})+\mathbf{s}_3) \\ & +\mathbf{y}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q}-(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})+\mathbf{s}_4) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\mathbf{u}\in R^n$ 과 $\mathbf{v}\in R^n$ 는 각각 설계변수의 하한벡터와 상한벡터에 대한 라그랑지 승수벡터(Lagrange multiplier vectors)이다. 또한, $\mathbf{x}\in R^o$ 와 $\mathbf{y}\in R^o$ 는 설계파라미터의 하한벡터와 상한벡터에 대한 라그랑지 승수벡터이다. $\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\in R^n$, $\mathbf{s}_3,\mathbf{s}_4\in R^o$ 는 완화변수벡터(slack variables vectors)이다.

설계점이 제한조건이 있는 최적화문제의 해가 되기 위한 필요충분조건은 KKT 조건을 만족해야 하며, 이를 위해서는 라그랑지 함수의 경사도 벡터가 0 이어야 한다.[17]

$$\nabla L = \mathbf{0} \tag{8}$$

설계변수와 관련된 변수들에 대하여 라그랑지 함수의 미분치를 계산하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{c}} = -\frac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{c}} - \mathbf{u}^* + \mathbf{v}^* = \mathbf{0} \tag{9a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{c}^* + (\mathbf{b}-\Delta\mathbf{b}) + \mathbf{s}_1^* = \mathbf{0} \tag{9b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{c}^* - (\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) + \mathbf{s}_2^* = \mathbf{0} \tag{9c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}_1} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_1^* \tag{9d}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}_2} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_2^* \tag{9e}$$

$$u_i \ge 0, \quad i = 1,\cdots,\mathrm{n} \tag{9f}$$

$$v_i \ge 0, \quad i = 1,\cdots,\mathrm{n} \tag{9g}$$

여기서 $*$는 식 (3)에서의 최적해를 의미한다. 식 (9a)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{c}} = -\mathbf{u}^* + \mathbf{v}^* \tag{10}$$

식 (10)은 내부루프에서 제한조건의 활성화 여부에 따라 3가지로 구분된다. 내부루프의 (a) 상한벡터가 활성화 제한조건인 경우 (b) 하한벡터가 활성화 제한조건인 경우 (c) 제한조건이 활성화되지 않는 경우이다. 각 경우에 대한 내부루프의 최적해와 민감도를 요약하면 아래와 같다.

Table 2 Optimum sensitivity according to the optimum point

$c_i^* = b_i + \Delta b_i$	$\dfrac{d\hat{f}(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{db_i} = v_i = \dfrac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial c_i}$
$c_i^* = b_i - \Delta b_i$	$\dfrac{d\hat{f}(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{db_i} = -u_i = \dfrac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial c_i}$
$b_i - \Delta b_i < c_i^* < b_i + \Delta b_i$	$\dfrac{d\hat{f}(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{db_i} = 0$

Table 3 Characteristics of the linearized function and its optimum point

$\dfrac{\partial f(\mathbf{b}^{(k)},\mathbf{p})}{\partial c_i} > 0$	$c_i^* = b_i + \Delta b_i$
$\dfrac{\partial f(\mathbf{b}^{(k)},\mathbf{p})}{\partial c_i} < 0$	$c_i^* = b_i - \Delta b_i$
$\dfrac{\partial f(\mathbf{b}^{(k)},\mathbf{p})}{\partial c_i} = 0$	$b_i - \Delta b_i < c_i^* < b_i + \Delta b_i$

(a) $c_i^* = b_i + \Delta b_i$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial c_i} = v_i$ (11a)

(b) $c_i^* = b_i - \Delta b_i$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial c_i} = -u_i$ (11b)

(c) $b_i - \Delta b_i < c_i^* < b_i + \Delta b_i$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{c}^*,\mathbf{q}^*)}{\partial c_i} = 0$ (11c)

앞서 식 (6)의 정식화를 최적민감도의 일반화된 식 (5)에 대입하여 정리하면, 먼저 식 (5)에서 우변의 첫째 항은 b_i 에 대하여 명시함수(explicit function)가 아니기 때문에 생략된다. 두 번째 항에서 내부루프의 제한조건들은 b_i 의 함수로 구성된다. 따라서 정리된 식 (5)와 내부루프에서의 최적설계 결과인 식 (11)를 정리하면 Table 2와 같이 3가지 경우로 요약할 수 있다.

설계파라미터의 경우도 파라미터에 해당되는 변수들에 대한 라그랑지 함수의 미분치를 계산하고, 그에 대한 제한조건의 활성화 여부를 3가지 경우로 정리할 수 있다. 설계파라미터의 경우도 동일하게 유도할 수 있으므로 이에 대한 설명은 생략한다.

내부루프의 최적설계 결과에 따라 정리된 Table 2는 외부루프에서 설계변수에 대한 목적함수의 상한 값에 대한 민감도가 내부루프의 최적점에서 계

산된 목적함수의 최적민감도와 같음을 보여준다. 이러한 이유로 제안한 방법의 강건최적설계과정은 내부루프 수행을 통해 계산된 최적민감도를 외부루프의 민감도로 그대로 이용하기 때문에 민감도 계산으로 인한 별도의 수치적 비용이 요구되지 않는다.

4.2 선형화된 상한함수를 이용한 강건최적설계

앞서 소개한 강건최적설계 과정은 내부루프와 외부루프에서 최적설계를 수행해야 하는 특징이 있다. 이는 설계변수의 개수가 증가할 경우 제안한 방법의 효율성을 감소시킬 수 있다. 따라서 내부루프에서 최적설계과정을 수행하지 않고 해를 구할 수 있는 방법을 소개한다.

식 (6)에서 k 번째 반복과정의 목적함수에 대한 선형화된 함수 형태는 테일러급수의 1 차 전개를 토대로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{\mathrm{L}}(\mathbf{c}^{(k)},\mathbf{q}) = -f(\mathbf{b}^{(k)},\mathbf{p}) + \left[\frac{-\partial f(\mathbf{b}^{(k)},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{c}}\right]^{\mathrm{T}}(\mathbf{c}^{(k)}-\mathbf{b}^{(k)}) + \left[\frac{-\partial f(\mathbf{b}^{(k)},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}}\right]^{\mathrm{T}}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \tag{12}$$

선형화된 상한함수를 이용한 강건최적설계 방법은 내부루프에서 원래의 목적함수 대신 아래의 정식화를 사용한다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{c}\in R^n \text{ and } \mathbf{q}\in R^o \\ &\text{to maximize} && f_{\mathrm{L}}(\mathbf{c},\mathbf{q}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{b}-\Delta\mathbf{b}\le\mathbf{c}\le\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b} \\ & && \mathbf{p}-\Delta\mathbf{p}\le\mathbf{q}\le\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p} \end{aligned} \tag{13}$$

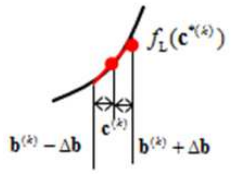
식 (13)은 목적함수와 제한조건이 모두 선형인 문제이다. 식 (13)에서 목적함수의 선형화된 함수 형태인 식 (12)를 살펴보면 목적함수를 미소 변동량에 대하여 선형화된 함수를 생성하는데 있어 경사도 벡터가 필요한 것을 확인할 수 있다. 이 경사도벡터를 이용하면 내부루프의 최적설계를 수행하지 않고도 쉽게 내부루프의 해를 판별할 수 있다. 경사도 벡터의 부호에 따라 미소 변동 범위 내에서 내부루프의 최적해는 크게 3 가지로 구분할 수 있다. (a) 양의 부호를 갖는 경우, (b) 음의 부호를 갖는 경우, (c) 0 인 경우이다. 이에 따른 내부루프의 최적해는 Table 3 과 같이 요약할 수 있다. 따라서 경사도벡터의 부호에 따른 최적해와 이에 대한 선형화된 목적함수의 상한 값은 최적설계를 수행하지 않고 계산될 수 있다. 설계파라미터에 대해서도 이와 같은 특성은 동일하게 적용할 수 있다.

한편, 내부루프에서는 목적함수의 상한 값과 더불어 최적민감도가 계산되어야 한다. 선형화된 함수에 대하여 내부루프의 최적점에서의 최적민감도는 k 번째 반복과정에서 설계점 $\mathbf{b}^{(k)}$ 에 대한 민감도와 동일하다. 이는 선형화된 함수식을 전개할 때의 경사도 벡터를 최적민감도 값으로 이용할 수 있음을 의미한다.

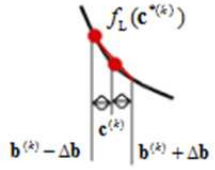
Fig. 2는 선형화된 상한함수를 이용할 때, 내부루푸의 최적설계 결과에 따른 최적점과 최적 민감도를 개략적으로 보여준다. Fig. 2에 나타난 바와 같이, 미소 변동 범위 내에서 비선형 함수의 상한 값이나 민감도와 거의 유사함을 확인할 수 있다. 이러한 이유로 선형화된 상한함수를 목적함수의 강건성지수로 이용할 경우, 최적설계 과정을 수행하지 않고 목적함수의 상한 값과 최적민감도를 계산할 수 있기 때문에 제안한 강건최적설계 방법의 효율성이 향상될 수 있다.

5. 예 제

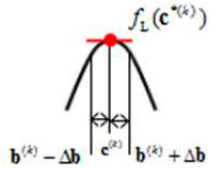
제안한 알고리즘의 유용성을 검증하기 위해 수학 예제를 이용하여 제안한 방법과 기존의 방법의 비교를 수행하였다. 기존의 방법에서는 대표적으



(a) Case 1 (upper bound active)



(b) Case 2 (lower bound active)



(c) Case 3 (inactive)

Fig. 2 Case of the active constraints with a linearized function

로 다중목적함수 형태의 가중치법(Weighted sum approach)을 이용하여 제안한 방법과의 결과를 비교하였다. 가중치법을 대조군으로 이용한 이유는 목적함수의 변동과 더불어 평균도 같이 고려할 수 있는 대표적인 방법이기 때문이다. 각 방법들의 효율성은 함수 호출 횟수를 이용하여 비교하였고, 민감도 계산은 유한차분법(Finite Difference Method)을 사용하였다.

5.1 오목한 형태를 갖는 목적함수 (예제 1)

이 예제는 비선형성이 있는 목적함수와 1 개의 제한조건으로 구성된 문제이다. 초기설계점은 (8.0 9.0) 이고 설계변수의 공차범위는 (0.1 0.1) 로 가정하였다. 가중치법에서의 가중치는 $w = 0.5$ 로 정의하였다. 최적설계를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{b} \\ &\text{to minimize} && f(\mathbf{b}) = (b_1+2)^2 + (b_2+2)^2 - 2b_1b_2 \\ &\text{subject to} && g_1(\mathbf{b}) = -9.042 + 11.082b_1 + 6.906b_2 \\ & && \quad -1.874b_1^2 - 1.212b_2^2 \le 0.0 \\ & && 3.0 \le \mathbf{b} \le 10.0 \ \ (\text{for } i = 1,2) \end{aligned} \tag{14}$$

Table 4 는 초기 값, 확정론적 최적해의 결과와 더불어 기존의 방법과 제안한 방법을 이용한 강건최적설계를 보여준다. 먼저, 확정론적 최적해에서는 초기 설계에 비해 목적함수의 평균과 표준편차가 모두 감소한 결과를 보인다. 이는 목적함수의 성능 향상과 둔감한 설계를 동시에 충족하는 부분으로, 설계변수의 하한 상한 값에 대하여 목적함수가 오목한 형태를 보일 때 나타나는 특성이다. 목적함수가 오목한 형태의 문제에서는 기존의 가중치법이나 상한함수를 이용한 강건최적설계의 결과 모두 확정론적 최적해와 유사한 위치로 수렴하였다. 강건최적설계 결과의 효율성 비교에 있어서는 기존의 방법이나 상한함수를 이용한 방법보다 선형화된 함수를 이용한 강건최적설계방법이 가장 적은 함수 호출 횟수를 보임을 확인할 수 있다. 본 예제에 있어 선형화된 상한함수를 이용한 경우 상한함수를 이용한 강건성지수의 결과와 비교해 볼 때 동일한 위치로 수렴함에도 계산 비용에 있어서 가장 효과적임을 알 수 있다.

5.2 볼록한 형태를 갖는 목적함수 (예제 2)

이 예제는 비선형성이 있는 목적함수와 3 개의 제한조건으로 구성된 문제이다. 초기설계점은 (3.0 3.5) 이고 설계변수의 공차범위는 (0.2 0.2) 로 가정하였다. 가중치법에서의 가중치 $w = 0.5$ 로 정의하였다. 최적설계를 위한 정식화는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && b_1, b_2 \\ &\text{to minimize} && f(\mathbf{b}) = b_1 \sin(b_1) + b_2 \cos(b_2) + 10 \\ &\text{subject to} && g_1(\mathbf{b}) = 1 - \frac{b_1^2 b_2}{10} \le 0 \\ & && g_2(\mathbf{b}) = 1 - \frac{60}{(b_1^2 + 8b_2 + 7)} \le 0 \\ & && g_3(\mathbf{b}) = -\left(\frac{(b_1+b_2-5)^2}{30} + \frac{(b_1-b_2-20)^2}{60} - 6.3\right) \le 0 \\ & && 0.0 \le \mathbf{b} \le 7.0 \ \ (i = 1,2) \end{aligned} \tag{15}$$

Table 5 는 강건최적설계의 결과를 나타낸다. 기존의 방법에서는 초기 설계에 비해 목적함수의 표

Table 4 Results of example 1

		Initial value	Det. Opt.	Weighted sum method	$\hat{f}$	$\hat{f}_L$
$(b_1\ b_2)$		(8.0 9.0)	(5.514 4.864)	(5.291 5.248)	(5.514 4.864)	(5.514 4.864)
Obj. fn.		77.0	77.0 → 49.936	1.000 → 0.773	77.0 → 50.736	77.0 → 50.378
μ_f		77.0	49.936	50.155	49.936	49.936
σ_f		0.634	0.595	0.567	0.595	0.595
Sup $f(\mathbf{b})$		-	50.736	50.955	50.736	50.378
Iteration		-	10	15	13	10
No. of function call	f	-	46	177	358	78
	g	-	36	39	46	36
Sen. Call	f	-	-	-	13	10

Table 5 Results of example 2

		Initial value	Det. Opt.	Weighted sum method	$\hat{f}$	$\hat{f}_L$
$(b_1\ b_2)$		(3.0 3.5)	(4.832 3.643)	(2.027 3.422)	(4.870 3.660)	(4.832 3.643)
Obj. fn.		7.146	7.146 → 2.008	1.000→ 0.598	7.146 → 2.429	7.146 → 2.265
μ_f		7.146	2.008	8.531	2.012	2.008
σ_f		0.570	0.194	0.001	0.195	0.194
Sup $f(\mathbf{b})$		-	2.447	8.608	2.429	2.265
Iteration		-	6	12	8	6
No. of function call	f	-	21	150	197	27
	g	-	19	26	28	19
Sen. Call	f	-	-	-	8	6

준편차 줄었지만 평균과 상한 값이 증가한 결과를 보인다. 이는 수렴된 강건해가 목적함수의 성능에 손실이 있는 결과를 제시하고 있음을 의미한다. 하지만 제안한 방법은 표준편차도 줄었으며 동시에 평균과 상한 값 또한 감소하여 성능에 손실이 발생하지 않는 강건해를 제시하고 있음을 보여준다. 목적함수가 볼록한 함수 형태의 비선형성을 지니는 경우 기존의 방법과 제안한 방법이 제시하는 강건해가 상이함을 확인할 수 있다. 한편, 효율성을 비교하였을 때 제안한 방법에서는 기존의 방법에 비해 해석 횟수의 향상 정도가 두드러진다.

5.3 기어감속기 예제 (Ref. 18)

이 예제는 7 개의 설계변수, 비선형 목적함수와 11 개의 비선형 제한조건을 갖는 문제이다. 기어감속기 시스템의 특성을 수학식으로 묘사한 예제로 목적함수는 기어 감속기의 질량을, 제한조건은 감속기를 구성하는 기어와 축에 실제 부여되는 설계 제약조건들을 의미한다. 설계변수의 공차범위는 $\Delta b_i = 0.012$ 로 가정하였고, 가중치법에서의 가중치 $w = 0.5$ 로 정의하였다. 설계를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\text{Find} \quad \mathbf{b} \\
&\text{to minimize} \quad f(\mathbf{b}) = 0.7854 b_1 b_2^2 (3.3333 b_3^2 + 14.9334 b_3 \\
&\qquad - 43.0934) - 1.508 b_1 (b_6^2 + b_7^2) \\
&\qquad + 7.477 (b_6^3 + b_7^3) + 0.7854 (b_4 b_6^2 + b_5 b_7^2) \\
&\text{subject to} \quad g_j(\mathbf{b}) \le 0, \quad j = 1, \cdots, 11 \\
&\qquad \mathbf{b}^L \le \mathbf{b} \le \mathbf{b}^U \\
&\textit{where} \\
&g_1(\mathbf{b}) = \frac{27}{b_1 b_2^2 b_3} - 1,\ g_2(\mathbf{b}) = \frac{397.5}{b_1 b_2^2 b_3^2} - 1, \\
&g_3(\mathbf{b}) = \frac{1.93 b_4^3}{b_2 b_3 b_6^4} - 1,\ g_4(\mathbf{b}) = \frac{1.93 b_5^3}{b_2 b_3 b_7^4} - 1, \\
&g_5(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{(745 b_4 / (b_2 b_3))^2 + 16.9 E^6}}{0.1 b_6^3} - 1100, \\
&g_6(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{(745 b_5 / (b_2 b_3))^2 + 157.5 E^6}}{0.1 b_7^3} - 850, \\
&g_7(\mathbf{b}) = b_2 b_3 - 40,\ g_8(\mathbf{b}) = 5 - \frac{b_1}{b_2},\ g_9(\mathbf{b}) = \frac{b_1}{b_2} - 12, \\
&g_{10}(\mathbf{b}) = \frac{1.5 b_6 + 1.9}{b_4} - 1,\ g_{11}(\mathbf{b}) = \frac{1.1 b_7 + 1.9}{b_5} - 1, \\
&\mathbf{b}^0 = [3.5, 0.7, 17, 7.3, 7.72, 3.35, 5.29]^{\mathrm{T}}, \\
&\mathbf{b}^L = [2.6, 0.7, 17, 7.3, 7.3, 2.9, 5.0]^{\mathrm{T}}, \\
&\mathbf{b}^U = [3.6, 0.8, 28, 8.3, 8.3, 3.9, 5.5]^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, \cdots, 7)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Table 6 은 강건최적설계를 보여준다. 확정론적 최적해에서는 초기 설계에 비해 목적함수의 평균과 표준편차가 모두 감소한 결과를 보인다. 이는 목적함수가 오목한 형태를 보일 때 나타나는 특성이다. 이와 같은 문제에서는 상한함수를 이용한 강건최적설계의 결과나 기존의 방법도 확정론적 최적해와 유사한 위치로 수렴하였다. 함수 호출 횟수를 통한 효율성 비교에 있어서는 기존의 방법이나 상한함수를 이용한 방법보다 선형화된 함수를 이용한 강건최적설계방법이 가장 우수함을 확인할 수 있다. 선형화된 상한함수를 이용한 강건최적설계의 방법이 상한함수를 이용한 강건성지수의 결과와 동일한 위치로 수렴하고 효율성 측면에 있어서도 우수한 결과를 보인다.

Table 6 Results of example 3

		Initial value	Det. Opt.	Weighted sum method	$\hat{f}$	$\hat{f}_L$
b_1		3.60	3.50	3.50	3.50	3.50
b_2		0.70	0.70	0.70	0.70	0.70
b_3		20.00	17.00	17.00	17.00	17.00
b_4		7.30	7.30	7.30	7.30	7.30
b_5		7.30	7.72	7.71	7.72	7.72
b_6		3.40	3.35	3.35	3.35	3.35
b_7		5.30	5.29	5.29	5.29	5.29
Obj. fn.		3620.4	3620.4 → 2994.34	1.0 → 0.078	3620.4 → 3065.00	3620.4 → 3066.45
μ_f		3620.4	2994.34	2994.29	2994.34	2994.34
σ_f		76.303	55.12	55.12	55.12	55.12
Sup $f(\mathbf{b})$		-	3065.00	3064.96	3065.00	3066.45
Iteration		-	14	20	14	14
No. of function call	f	-	173	1824	1720	600
	g	-	173	228	173	173
Sen. Call	f	-	-	-	14	14

6. 결 론

기존의 비선형계획법에서 목적함수의 강건성을 확보하기 위한 연구는 설계변수나 파라미터의 변동에 목적함수의 변화가 둔감한 설계를 추구하여 강건성을 달성하려 하였다. 하지만, 제시하는 강건해가 목적함수의 성능에 손실을 발생시킬 수 있는 특징이 있으며, 비선형계획법에서 강건최적설계를 수행할 때 수치적 비용이 비싸다는 이유로 실제 구조문제에 적용하는데 큰 한계점으로 지적되어 왔다. 본 논문에서는 이를 해결하고자 목적함수의 상한함수를 이용한 강건최적설계방법을 제안하였다. 제안한 지수를 통해 강건최적설계를 수행할

경우 기존 방법에서 일반적으로 추구하던 강건성의 개념과는 달리 목적함수의 손실이 발생하지 않는 강건해를 제시하였다. 또한, 제안한 방법의 효율성을 향상시키기 위하여 선형화된 함수를 이용한 강건성지수와 과정을 소개하였고, 예제를 통해 비선형계획법을 이용한 강건최적설계를 수행함에 있어 효율성이 향상된 강건해를 얻을 수 있도록 하였다.

본 연구에서는 목적함수의 상한함수를 이용한 강건성지수와 과정을 소개하였다. 상한함수를 이용한 개념이나 제안한 방법이 비선형계획법을 이용한 강건최적설계에서 수치적 비용이 크게 줄어드는 특징은 제한조건의 강건성으로도 충분히 확대 적용할 수 있으리라 판단된다.

후 기

이 논문은 2011 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임. (No. 2011-0016364)

참고문헌
(References)

(1) Arora, J. S., 2012, *Introduction to Optimum Design*, Elsevier, Korea, pp. 754~760.

(2) Belegundu, A. D. and Zhang, S., 1992, "Robustness of Design Through Minimum Sensitivity," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 213–217.

(3) Han, J. S. and Kwak, B. M., 2004, "Robust Optimization Using a Gradient Index: MEMS Applications," *Structural Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, No. 6, pp. 439~478.

(4) Kim, N. K., Kim, D. W., Kim, H. G., Lowther, D. A. and Sykulski, J. K., 2010, "Robust Optimization Utilizing the Second-Order Sensitivity Information," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 46, No. 8, pp. 3117~3120.

(5) Ramakrishnan, B. and Rao, S. S., 1996, "A General Loss Function Based Optimization Procedure for Robust Design," *Engineering Optimization*, Vol. 25, pp. 255~276.

(6) Parkinson, D. B., 2000, "The Application of a Robust Design Method to Tolerancing," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, No. 2, pp. 97~102.

(7) Sundaresan, S., Ishii, K. and Houser, D. R., 1995, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Engineering Optimization*, Vol. 24, No. 2, pp. 101~117.

(8) Su, J. and Renaud, J. E., 1997, "Automatic Differentiation in Robust Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 6, pp. 1072~1079.

(9) Doltsinis, I. and Kang, Z., 2004, "Robust Design of Structures Using Optimization Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 23-26, pp. 2221~2237.

(10) Lee, K. H., Eom, I. S., Park, G. J. and Lee, W. I., 1996, "Robust Design for Unconstrained Optimization Problems Using the Taguchi Method," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 5, pp. 1059~1063.

(11) Chen, W., Wiecek, M. M. and Zhang, J., 1999, "Quality Utility-A Compromise Programming Approach to Robust Design," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 2, pp. 179~187.

(12) Jung, D. H. and Lee, B. C., 2002, "Development of a Simple and Efficient Method for Robust Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, No. 9, pp. 2201~2215.

(13) Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelemy, J. M. and Riley, K. M., 1982, "Sensitivity of Optimum Solutions of Problem Parameters," AIAA Journal, Vol. 20, No. 9, pp. 1291~1299.

(14) Lee, S. J., Jeong, S. B. and Park, G. J., 2013, "Investigation of the Robustness Index of the Objective Function in Robust Optimization," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 37, No. 5, pp. 589~599.

(15) Ben-Tal, A., Ghaoui, L. El. and Nemirovski, A., 2009, *Robust Optimization*, Princeton University Press, New Jersey.

(16) Beyer, H. G. and Sendhoff, B., 2007, "Robust Optimization – A Comprehensive Survey," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 33-34, pp. 3190~3218.

(17) Park, G. J., 2007, *Analytic Methods for Design Practice, Springer-Verlag*, New York, pp. 397~448.

(18) Lu, S. and Kim, H. M., 2010, "A Regularized Inexact Penalty Decomposition Algorithm for Multidisciplinary Design Optimization Problem with Complementarity Constraints," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 132, No. 4, pp. 041005 (12 pages), http://dx.doi.org/10.1115/1.4001206.