

공간 차원에 관한 시각적 패턴 연구

- 황금비, 피보나치 수열, 프랙털 이론을 중심으로 -

Study on Visual Patterns about Spatial Dimensions

- Centered on the Golden Ratio, Fibonacci Sequence, and Fractal Theory -

Author 김민석 Kim, Min-Suk / 정회원, 국민대학교 디자인대학원 실내설계전공 석사과정
김개천 Kim, Kai-Chun / 정회원, 국민대학교 조형대학 실내디자인학과 교수*

Abstract This study intended arousal of other viewpoints that deal with and understand spaces and shapes, by describing the concept of 'dimensions' into visual patterns. Above all, the core concept of spatial dimensions was defined as 'expandability'. Then, first, the 'golden ratio', 'Fibonacci sequence', and 'fractal theory' were defined as elements of each dimension by stage. Second, a 'unit cell' of one dimension as 'minimum unit particles' was set. Next, Fibonacci sequence was set as an extended concept into two dimensions. Expansion into three dimensions was applied to the concept of 'self-similarity repetition' of 'Fractal'. In 'fractal dimension', the concept of 'regularity of irregularity' was set as a core attribute. Plus, Platonic solids were applied as a background concept of the setting of the 'unit cell' from the viewpoint of 'minimum unit particles'. Third, while 'characteristic patterns' which are shown in the courses of 'expansion' of each dimension were embodied for the visual expression forms of dimensions, expansion forms of dimensions are based on the premise of volume, directional nature, and concept of axes. Expressed shapes of each dimension are shown into visually diverse patterns and unexpected formative aspects, along with the expression of relative blank spaces originated from dualism. On the basis of these results, the 'unit cell' that is set as a concept of theoretical factor can be defined as a minimum factor of a basic algorithm caused by other purpose. In here, by applying diverse pattern types, the fact that meaning spaces, shapes, and dimensions can be extracted was suggested.

Keywords 황금비, 플라톤 입체, 피보나치 수열, 프랙털
The Golden Ratio, Platonic Solid, Fibonacci Sequence, Fractal

1. 서론

1.1. 연구의 배경과 목적

'차원(次元)'은 공간과 형태가 이루어지는 기반(基盤)으로 감각 인지의 측면만으로 접근할 수 없는 영역이다.

그럼에도 공간과 형태는 차원의 개념으로 존재 방식이 성립되며 감각, 감성, 이성으로 인지하는 물질세계가 3차원만이 아니라는 것은 많은 현대의 이론에서 설명된다.

이러한 배경은 조형을 다룸에 있어서 단순히 감각 인지의 개념을 넘어 그 속성의 기반을 고찰하고 이해해야 할 필요성이 있음을 의미할 것이다.

공간과 형태의 시작이 차원이라는 배경을 두고 어떠한 원론적 시작점이 설정될 수 있는지에 대한 의문과 작위적 전개를 배제한 이론적 속성에 근거한 시각화된 조형의 결과는 어떠한 미적인 특성과 형식적인 패턴을 나타내는지 의문을 가져본다.

현대적 이론에 근거하여 다양한 차원이 존재한다는 것은 공간과 형태에 생명력과 창의력, 영감을 줄 수 있을 것이다.

본 연구는 '차원'의 개념을 시각적 패턴의 형식으로 단계별로 표현해봄으로써 그것이 조형을 다룸에 있어 어떠한 가능성과 의미를 주는지 살펴보고자 하며 공간과 형태를 이해하는 또 다른 관점의 전환과 환기(喚起)를 의도하였다.

* 교신저자(Corresponding Author); kck@kookmin.ac.kr

1.2. 연구 방법 및 범위

공간 차원의 핵심 개념을 ‘확장성(擴張性)’으로 정의하고 이를 시각적으로 표현해 보기 위해 세 가지 전제를 설정하였다.

첫째는 각 차원의 개념을 나타낼 요소, 둘째는 차원의 종류, 셋째는 시각적 표현의 형식이다.

첫째, 차원의 개념을 나타낼 요소 설정의 기준은 자연이 성장(生長)하는 특성적 패턴에 집중하였는데 ‘황금비’, ‘피보나치 수열’, ‘프랙털’은 자연의 성장 패턴의 속성을 정의하는 일관된 개념들로서 이 3가지 개념을 단계별 차원의 중심 개념으로 정의하였다.

둘째, 차원의 종류로 1, 2, 3, 프랙털 차원의 4개의 차원을 설정하였다.

‘황금비’의 속성을 적용, 그 잠재적 확장성과 비율, 수리, 기하학적 특성을 내포한 ‘최소단위입자’로서 1차원 ‘Unit Cell’을 설정하고, ‘피보나치 수열’이 자연의 많은 성장 패턴의 수열임에 기인하여 2차원에서의 확장 개념으로 설정, ‘프랙털’의 ‘자기 유사성 반복’의 개념에서 3차원을 정의하고 ‘불규칙성의 규칙성’을 ‘프랙털 차원’의 개념으로 공간과 형태의 다채로움과 변화적 속성으로 설정하였다. 부수적으로 플라톤 입체는 ‘최소단위입자’의 관점으로 차원의 최소단위설정의 배경적 개념에 적용하였다.

셋째, 차원의 시각적 표현 형식은 각 차원의 ‘확장’ 과정에서 나타나는 ‘특성적 패턴’을 구현해 본다. 차원의 확장은 체적, 방향성, 축의 개념으로 다양하게 확장된다.

2. 공간 차원의 시각적 표현 요소

2.1. 1차원 요소

(1) 황금비(The Golden Ratio)



<그림 1>
 황금 분할 - $AB : AC = AC : CB$
 황금비 - $AC : AB = 1 : 1.618$

황금비는 한 선분을 전체 직선과 긴 선분의 비가 긴 선분과 짧은 선분의 비와 같도록 나누는 것으로 정의되는 비율로서 점C는 AB를 황금 분할하고 AC와 BC는 황금비이다.¹⁾

중요한 것은 하나의 선분에서 두개의 비율이 하나의 점을 기준으로 동일한 비의 양으로 추출된다는 것인데 하나의 선분과 하나의 점에서 동일한 비율이 2개가 존재

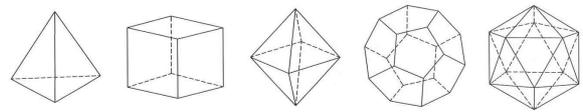
1) Kimberly Elam, Geometry of Design, 디자인 기하학, 김성학·방수원 공역, 초판, 비즈엔비즈, 2005, p.26

한다는 것은 점C가 임의의 의도적 설정이 아님을 의미하고 이 비율은 자연의 수많은 성장 패턴의 형식으로 존재한다는 배경을 기반으로 1차원의 최소단위입자인 Unit Cell의 ‘속성’으로 설정하였다.

(2) 플라톤 입체 - 1차원 최소 단위 설정의 배경

황금비는 플라톤 입체의 비율에도 나타나는데 정육면체와 정팔면체는 모서리수가 같고 면과 꼭짓점의 수는 서로 반대이며 정십이면체와 정이십면체에도 동일한 현상이 나타난다. 이러한 대칭성에서 기인한 유사성 때문에 이원적(二元的)사상 관계를 나타내는 특성을 보인다.²⁾

플라톤은 물질의 기본 4원소는 흙, 물, 공기, 불이라는 엠페도클레스의 개념과 데모크리토스의 원자론을 결합하여 4원소는 플라톤 입체로 표현된다고 주장하였다.

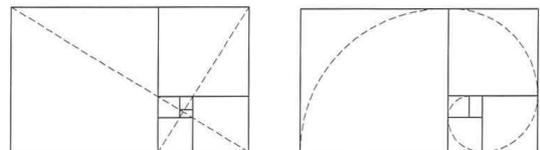


<그림 2> 플라톤 입체

정사면체는 불, 정육면체는 흙, 정팔면체는 공기, 정이십면체는 물, 정십이면체는 우주 전체에 대응시켰는데 이것은 물질세계의 존재 방식이 내재된 ‘최소단위입자’의 관점으로 정의한 것으로 각 입체는 대칭성의 기하학적 모듈(Module)을 나타낸다.³⁾

이러한 관점에 기인하여 플라톤 입체의 개념을 1차원 시각화의 최소단위입자인 Unit Cell의 배경적 개념으로 정의한다.

(3) 황금 직사각형의 속성 - 통약불가능성의 내재



<그림 3> 황금 직사각형과 황금 나선

황금 직사각형은 가로와 세로의 비가 1 : 1.618인 황금비를 이룬다. 황금비로 이루어진 이 황금 직사각형은 고유의 특성을 나타내는데 <그림 1>의 점C를 기준으로 정사각형을 잘라내면 다시 황금 직사각형이 나타나고 무한히 반복되어도 황금비의 비율을 유지하며 작아지는 특성을 가진다. 큰 것과 작은 것에 두 대각선을 그리고 무한히 반복시켜도 대각선의 교차점은 각 직사각형 개체에서 정확히 같은 좌표에서 만나는 특성이 있다.

2) Daud Sutton, Platonic and Archimedean Solids, 플라톤과 아르키메데스 입체, 김영태 역, 초판, 마루별, 서울, 2010, p.22

3) Dietrich Joachim Schulz, Das Problem der Materie in Platons Timaios, 플라톤의 물질 문제, 이경직 역, 수정판, 서광사, 서울, 2000, pp.48-52

또한 황금 직사각형의 무한 분할에서 나타나는 황금 나선(Golden Spiral)은 피보나치 수열의 패턴과 정확히 일치하는 방식으로 확장, 축소 될 수 있다.⁴⁾

이같은 특성은 '통약불가능성(通約不可能性)'의 개념, 즉 무한(the infinite)의 개념을 내포하는데 이것은 2차원, 3차원, 프랙털 차원으로 확장, 변화될 수 있는 속성을 내재함의 배경으로 정의하였다.

이러한 특성을 바탕으로 황금직사각형을 1차원 최소단위입자인 Unit Cell의 시각적 모듈로 설정한다.

2.2. 2차원 요소

(1) 피보나치 수열(Fibonacci Sequence) - 확장의 그리드

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55와 같이 피보나치 수열은 앞의 두 수의 합이 바로 뒤의 수가 되는 수의 배열로서 재귀(再歸)수열 즉 연속하는 항들끼리의 수학적 관계를 표현할 수 있는 수열이다.⁵⁾

이 수열은 점점 커질수록 황금비에 가까워지는 특성이 있는데 이 황금비의 속성을 내재한 피보나치 수열은 자연의 성장 패턴의 수열로서 많은 곳에서 그 특성이 나타난다.

이 특성을 기반으로 1차원 Unit Cell의 2차원 확장의 형식을 피보나치 수열로 적용하고 각 차원의 단계별 확장의 그리드의 개념으로 설정한다.

2.3. 3차원 요소

(1) 프랙털(Fractal) - 자기 유사성의 확장

프랙털은 모든 불규칙해 보이는 것들이 형태학상 특성이 있음을 인지, 자연의 형태들이 다양한 규모로 자기 안에 자기 형상이 반복되는 끝없는 연속성과 반복성을 보이는, 즉 '자기 유사성의 확장' 개념을 설명한다.

이 개념은 자연의 많은 순환 과정에 나타나는데 식물의 결정, 성장과 같이 자연에 존재하는 많은 프랙털의 주요 특징을 '가지가 뻗어나감'의 개념으로 설명할 수 있다.

빛과 바람, 물에 대한 자연의 자기 보존과 방어의 속성은 1/0.618로서 황금수의 감소율을 가지며⁶⁾ 이 역시 황금비와 피보나치 수열의 성장 패턴을 나타낸다. 이러한 특성과 더불어 감각으로 인지할 수 있는 3차원의 개념을 '자기유사성의 확장'으로 설정하였다.

2.4. 프랙털 차원의 요소

(1) 프랙털(Fractal) - 불규칙성의 규칙성

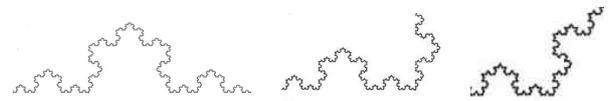
4) Kimberly Elam, op. cit., pp.26-27
 5) Herbert A. Hauptman, Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, Fibonacci Numbers, 피보나치 넘버스, 김준열 역, 초판, 늘봄, 서울, 2010, pp.25-27
 6) Livio, Mario, The Golden Ratio, 황금비율의 진실, 권민 역, 중판, 공존, 서울, 2011, p.323

해안선의 길이는 측량하는 자의 길이에 따라 달라진다. 자가 작아져도 여전히 하부 구조가 있으므로 프랙털은 크기를 표시하는 길이 개념을 다시 생각하여야 하는데 이것이 '프랙털 차원'으로 '주름'에 대한 척도 개념이다.⁷⁾

이러한 주름의 개념은 불규칙함속에서 규칙적인 패턴을 가지는데 스케일이 확장, 축소되어도 고유의 자기 유사성과 성장 패턴은 유지된다는 것을 나타낸다.

내려치는 번개는 프랙털 방정식으로 정의하면 1차원과 2차원의 중간에서 프랙털 차원이 설정 될 수 있는데 이것은 자기 유사성을 내포한 하나의 인자(因子)가 단순히 기하학적 속성과 차원에 머무르지 않고 다양한 차원으로 존재할 수 있음을 나타낸다.

이러한 속성을 바탕으로 '불규칙성의 규칙'의 개념은 3차원의 프랙털 차원으로의 확장 개념으로 설정한다.



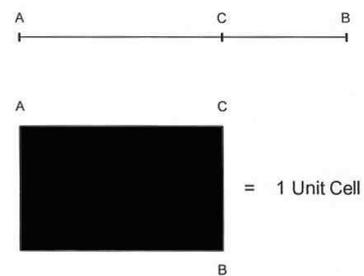
<그림 4> 프랙털의 하부 구조
 그림의 왼쪽 하부를 확대하여도
 동일한 패턴이 지속적으로 나타난다

3. 공간 차원의 단계별 시각화

3.1. 1차원 시각화

(1) Unit Cell

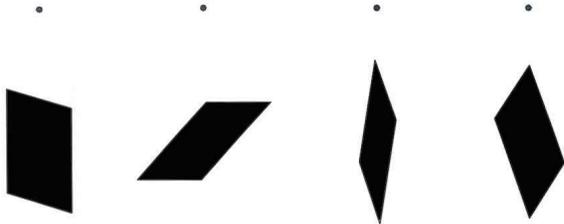
고유의 특성과 자기 유사성의 확장을 내재하며 그 이원적 비율 속성이 자연의 많은 성장의 패턴 속성임을 감안, Unit Cell을 1차원의 최소단위입자로 설정한다.



<그림 5> 1차원 Unit Cell
 1 : 1.618의 황금비 속성을 내재한다.

Unit Cell은 1차원 최소단위입자인 '점'의 개념이므로 2, 3차원의 속성이 없다. 즉 축(Axis)의 개념이 없으므로 설정하였는데 기하학적 측면이 아닌 내재된 속성의 관점으로 이해하였다. Unit Cell은 다음 차원으로 확장되고 분화되는 속성을 내재한다.

7) Ibid., pp.319-320



<그림 6> Unit Cell의 속성

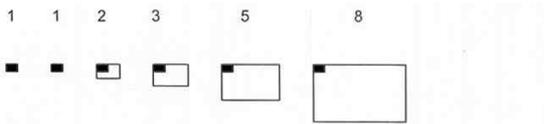
3.2. 2차원 시각화

(1) 피보나치 수열

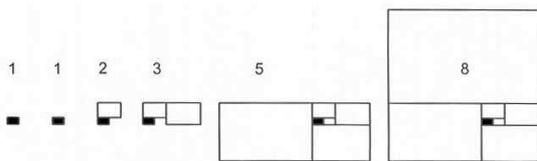
1차원 Unit Cell은 피보나치 수열에 기인한 자연 생장의 패턴과 작고 큰의 'Scale'의 개념을 내포하며 2차원으로 확장될 수 있다. 피보나치 수열의 각 수열은 단위별 그리드 패턴을 생성할 수 있는데 이 그리드 패턴은 무한히 확장, 축소될 수 있는 속성을 가진다.

(2) 2차원 확장의 형식

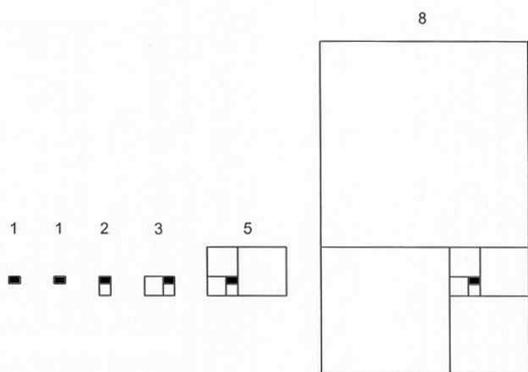
1차원 Unit Cell의 체적, 방향성, 축의 개념으로 확장될 수 있으며 각 개념의 조합으로 다양한 2차원 확장 패턴으로 전환될 수 있다.



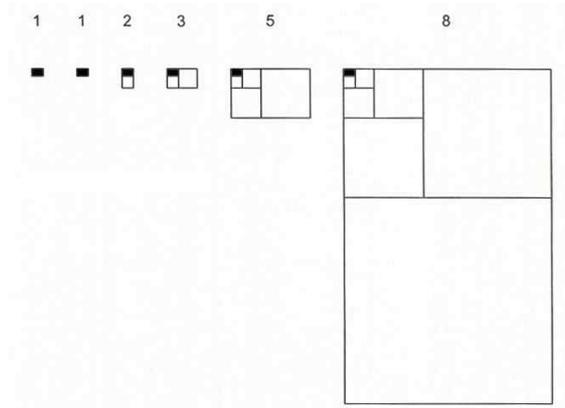
<그림 7> 체적의 확장 패턴



<그림 8> 체적과 방향성의 확장 패턴



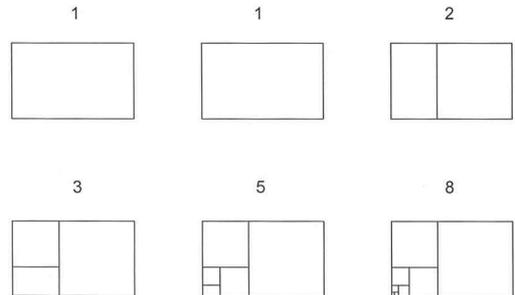
<그림 9> 방향성과 방사형 확장 패턴



<그림 10> 단일 방향성 확장 패턴

(3) 단위별 2차원 피보나치 그리드

피보나치 수열 패턴을 시각화해보면 'Scale'의 패턴으로 나타난다. 이 스케일의 개념을 바탕으로 피보나치 수열을 단위별 2차원 그리드로 생성할 수 있다.

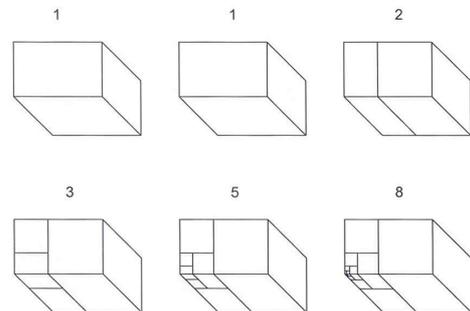


<그림 11> 6번째 피보나치 수열까지의 단일 방향성 확장 패턴의 그리드

3.3. 3차원 시각화

(1) 프랙털 - 자기 유사성의 확장

<그림 11>의 단일 방향성 2차원 그리드 패턴은 프랙털의 '자기유사성의 확장'의 개념을 바탕으로 3차원으로 확장될 수 있다.

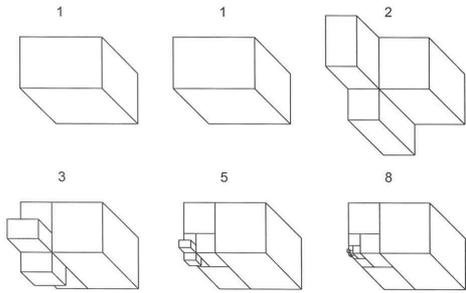


<그림 12> 자기 유사성에 기인한 3차원 확장

3.4. 프랙털 차원 시각화

(1) 프랙털 - 불규칙성의 규칙성

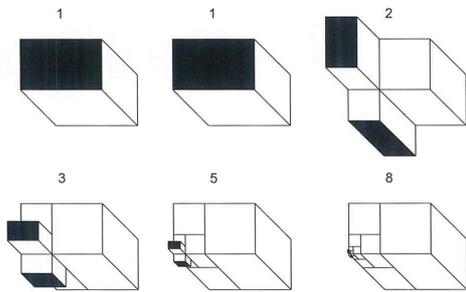
불규칙해 보이지만 고유의 자기 유사적 속성과 성장 패턴을 유지하며 프랙털 차원으로 확장될 수 있다.



<그림 13> 불규칙성의 규칙성에 기인한 프랙털 차원에서의 확장

(2) 프랙털 차원에서의 확장 형식 1

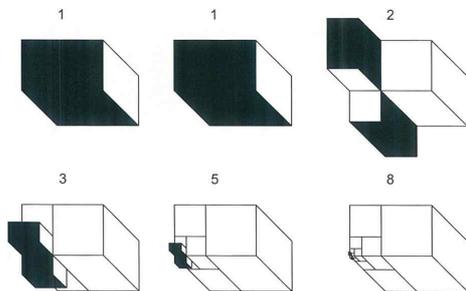
Unit Cell은 최소단위입자로서 원론적 인자(因子)의 개념으로 정의하였다. 불규칙성의 규칙성이라는 개념은 불규칙해 보이나 여전히 자기 유사성의 특성을 내재함을 바탕으로 규칙적인 성장 패턴을 유지한다는 개념으로 확장의 대상은 1 Unit Cell의 자기 분화적 확장이다. 1 Unit Cell은 불규칙하게 분화되어 보이지만 여전히 규칙적인 자기 유사성의 특성을 나타낸다.



<그림 14> 확장 대상으로서의 1 Unit Cell

(3) 프랙털 차원에서의 확장 형식 2

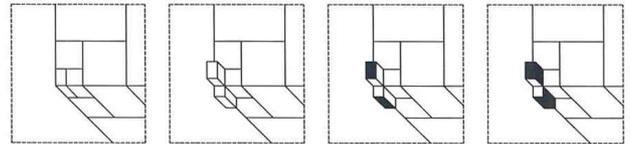
1 Unit Cell은 비율적 특성인 1 : 1.618의 비율에서 1의 레벨 확장을 통해 프랙털 확장을 정의한다. 즉 레벨 확장의 비율을 황금비로 설정한다.



<그림 15> 확장 형식 2
Unit Cell의 긴 선분은 1의 레벨로 확장된다.

(4) 확장 과정 정리

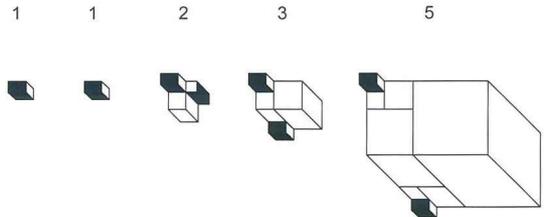
3차원에서 프랙털 차원에서의 확장은 다음과 같다.



<그림 16> 3차원에서 프랙털 차원에서의 확장 과정

(5) 프랙털 차원의 모듈(Module)

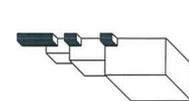
프랙털 차원은 피보나치 수열의 '스케일' 개념으로 단계별 모듈로 생성된다.



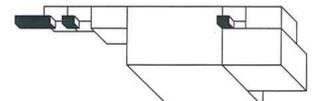
<그림 17> 5번째 피보나치 수열의 스케일이 적용된 프랙털 모듈

(6) 확장 형식에 기인한 프랙털 모듈의 패턴

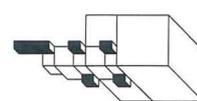
앞 장의 3.2.(2) 2차원 확장의 형식에서 5번째까지의 피보나치 수열을 적용하면 다음과 같은 프랙털 모듈이 생성된다.



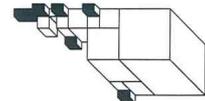
<그림 18>
체적적 확장 패턴



<그림 19>
체적과 방향성의 확장 패턴



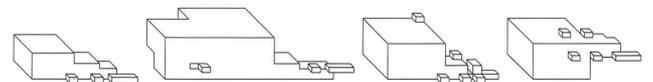
<그림 20>
방향성과 방사형 확장 패턴



<그림 21>
단일 방향성 확장 패턴

(7) 다른 시점에서 본 프랙털 모듈

생성된 프랙털 모듈은 다른 시점에서 보았을 때 다양한 형태의 패턴으로 나타난다.



<그림 22> 순수 프랙털 모듈

(8) 확장 형식에 따른 프랙털 모듈의 체적과 형태



<그림 23> 프랙털 모듈의 체적과 형태

동일한 피보나치 수열을 적용하여도 확장 형식이 다름에 따라 프랙털 모듈의 체적과 형태는 다르게 나타난다.

(9) 프랙털 결정(結晶, Crystals)의 패턴

1 Unit Cell은 결과적으로 프랙털 차원의 최소 '결정'이다. 그러나 동일한 피보나치 수열의 적용에도 확장 형식의 다름에 따라 Unit Cell의 거리 개념은 다른 패턴으로 나타난다.



<그림 24> 3.2.(2)의 확장 형식에 6번째 피보나치 수열이 적용된 프랙털 결정의 거리 개념

4. 적용 사례와 분석

(1) 2차원의 확장의 다양한 패턴

Unit Cell은 다양한 알고리즘의 형태로 각 차원에 적용될 수 있다. 예를 들어 3X3의 Unit Cell 그리드에 알고리즘(Algorithm)의 개념으로 설정한 특정 패턴을 '제공'의 개념으로 2차원 확장을 해보면 다음과 같은 다양한 패턴으로 나타난다.

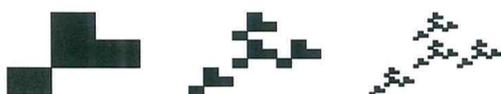
스케일이 확장되어도 고유의 자기 유사적 패턴은 유지하며 확장의 형식이 불규칙해 보이지만 Unit Cell의 규칙적 형식의 패턴으로 확장된다.



<그림 25> 확장 패턴 1
단순 체적의 제공일 경우 Unit Cell 고유의 형태만으로 나타난다.



<그림 26> 확장 패턴 2
2X2 그리드에서의 Unit Cell은 알고리즘 패턴이 단순할수록 확장되어도 그 단순함이 유지된다.



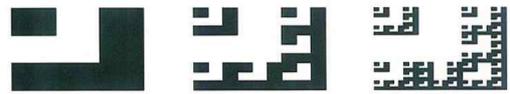
<그림 27> 확장 패턴 3
3X3 그리드에서의 Unit Cell의 확장 패턴



<그림 28> 확장 패턴 4
2개의 모듈과 모서리의 접합



<그림 29> 확장 패턴 5
2개의 분리된 모듈



<그림 30> 확장 패턴 6
2개의 분리된 모듈



<그림 31> 확장 패턴 7
3개의 분리된 모듈



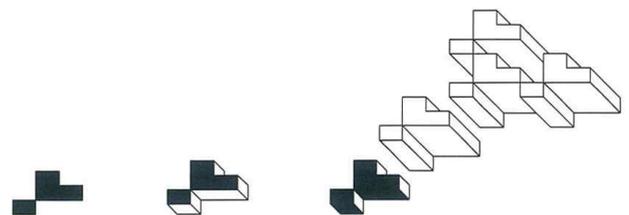
<그림 32> 확장 패턴 8
모서리가 접합된 2개의 모듈과 1개의 독립된 모듈



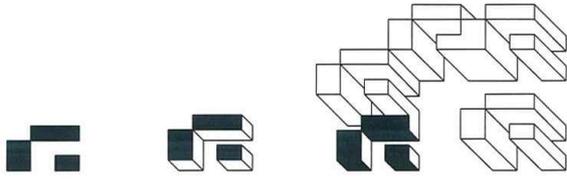
<그림 33> 확장 패턴 9
3개의 분리된 모듈

(2) 3차원 확장의 패턴

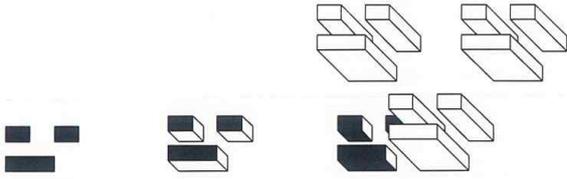
Unit Cell의 2차원 확장 형식이 제공의 알고리즘이라면 3차원 확장은 제공의 영역이 변경되는 지점에 기준하여 Unit Cell의 1의 레벨은 단계별로 커질 수 있다. 3차원 레벨의 확장 형식은 목적에 기인한 다양한 알고리즘으로 설정될 수 있다.



<그림 34> 확장 패턴 1
3X3의 2차원 패턴은 알고리즘이 변환되는 지점에서 레벨 확장된다.

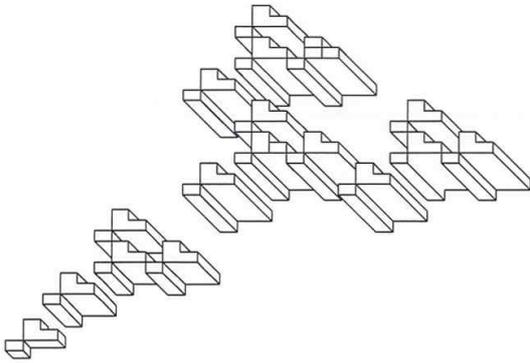


<그림 35> 확장 패턴 2

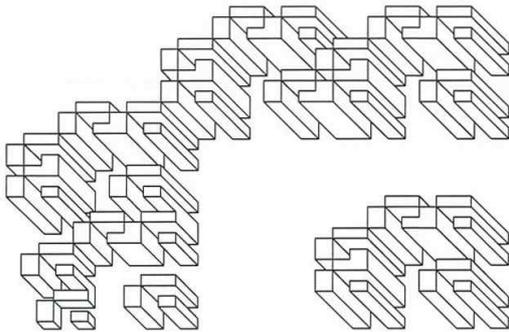


<그림 36> 확장 패턴 3

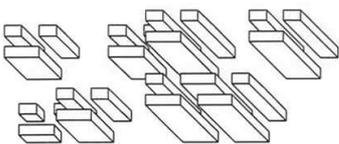
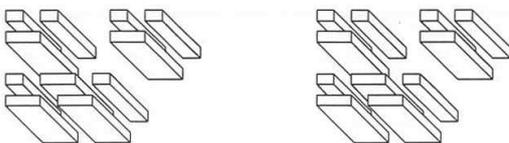
(3) 프랙털 차원의 패턴



<그림 37> <그림 34>의 확장 패턴



<그림 38> <그림 35>의 확장 패턴



<그림 39> <그림 36>의 확장 패턴

3단계 레벨이 적용된 확장 패턴에서는 그 스케일이 커짐에 따라 예상하지 못했던 조형적 패턴이 나타난다. 불규칙해보이지만 최초의 고유의 특성이 계속 유지됨과 동시에 형태와 배경의 이원적 관계에 의해 또 다른 차원의 여백이 생겨남을 알 수 있다.

5. 결론

황금비의 속성이 단순히 가로와 세로의 기하학적 미의 척도가 아니며 피보나치 수열은 단순히 수학적 패턴의 양식이 아닌 태어남과 성장이라는 자연의 생장 패턴의 수열이며, 프랙털은 우리를 둘러싸고 있는 사물(事物)이 기하학적 요소만이 아닌 다채로움과 신비로움, 아름다움의 속성임을 우리는 알고 있다.

분야의 다름에도 이러한 속성이 예술, 철학, 수학, 물리 등 각 분야에서 다양한 형식으로 증명되고 정의될 수 있음은 이원적 관점에서 보면 내재된 근본 속성은 원론적으로 동일하다.

원론적 인자(因子)의 개념으로 설정한 Unit Cell은 또 다른 목적에 기인하는 최소 단위 알고리즘으로, 다양한 패턴 형식의 적용은 전개 과정의 알고리즘으로 설정될 수 있다.

시각화된 각 차원의 형상은 이원성에 기인한 상대적 여백의 표출과 더불어 다양한 패턴과 예상하지 못했던 조형적 양상으로 나타난다.

설정된 알고리즘이 복잡해질수록 결과 예측에 대한 어려움이 많아지지만 자기 닮음과 불규칙적 규칙의 특성은 여전히 유지되며 ‘자기조직화(自己組織化)’되는 패턴을 나타낸다.

이러한 패턴은 결과적으로 ‘초기 조건의 민감성’이라는 회귀적(回歸的) 속성을 나타내는데 Unit Cell의 설정은 이러한 초기 조건의 개념으로 설명될 수 있다.

창의적 문제 해결의 과정은 알고리즘의 형식만으로 이루어질 수 없는 영역이다.

그러나 공간과 형태의 원론적 시작점이 설정될 수 있는지에 대한 의문은 ‘초기 조건의 민감성’의 개념과 목적과 결과에 기인하는 다채로운 알고리즘의 적용을 통해 문제 해결에 대한 ‘형식(形式)의 개념’으로 설정될 수 있으며, 설정된 개념을 통한 단계별 시각화 과정에서 나타나는 공간과 형태의 고유한 미적, 감성적, 기능적 특성들은 다양한 조형적 가능성이 있음을 제시하고자 하였다.

본 연구는 공간 차원의 시각적 패턴 연구를 통한 형식의 개념에 대한 하나의 시도로서 공간과 형태에 대한 또 다른 관점의 전환과 환기에 그 의미를 두었다.

참고문헌

1. 안대영, 프랙탈과 카오스, 초판, 교우사, 서울, 2013
2. Elam, Kimberly, Geometry of Design, 디자인 기하학, 김성학·방수원 공역, 초판, 비즈앤비즈, 서울, 2005
3. Hauptman, Herbert A., Posamentier, Alfred S., Lehmann, Ingmar, Fibonacci Numbers, 피보나치 넘버스, 김준열 역, 초판, 늘봄, 서울, 2010
4. Hilbert, David, Cohn-Vossen, Stefan, Anschauliche Geometrie 기하학과 상상력, 정경훈 역, 초판, 살림출판사, 파주, 2012
5. Livio, Mario, The Golden Ratio, 황금비율의 진실, 권민 역, 초판, 공존, 서울, 2011
6. Schulz, Dietrich Joachim, Das Problem der Materie in Platons Timaios, 플라톤의 물질 문제, 이경직 역, 수정판, 서광사, 서울, 2000
7. Sutton, Daud, Platonic and Archimedean Solids, 플라톤과 아르키메데스 입체, 김영태 역, 초판, 시스템아, 서울, 2010
8. 강은영, 현대 공간디자인의 비물질화 연구동향에 관한 분석 : 한국실내디자인학회논문집 분석을 중심으로, 국민대 석사논문, 2007
9. 강중오, Le Corbusier 작품 입면의 비례에 대한 연구, 건국대 석사논문, 1995
10. 김은희, 황금비의 분석을 통한 양재동 화훼 박물관 계획안, 경기대 석사논문, 2005
11. 오경자, Aperiodic tiling의 구성에 관한 연구, 전남대 석사논문, 2010
12. 최희정, 밈(Meme)현상으로 고찰한 20세기 이후의 평면성 표현 연구 : 피보나치 수열의 그래픽 표현을 중심으로, 이화여대 박사논문, 2012
13. 한상진, 기하학적 형상을 통한 상징적 표현에 관한 연구, 홍익대 석사논문, 2003

[논문접수 : 2013. 12. 31]

[1차 심사 : 2014. 01. 21]

[2차 심사 : 2014. 01. 31]

[게재확정 : 2014. 02. 12]