대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 1, 19 ~ 37. Mar 2014

# 확률변수 개념에 대한 예비교사의 이해

최 지 선* · 윤 용 식** · 황 혜 정***

현대사회는 대량 정보들을 수집하고 활용하는 정보화 사회로 현대인들에게 통계적 소양이 요구된다. 이에 따라 학교수학에서 통계적 소양의 중요성이 점차 강조되고 있으며, 현직교사나 예비교사들에 대한 통계적 소양 능력의 함양 및 지도 능력 향상이 요구되고 있다. 한편 확률변수는 통계 학습에서 가장 기초적인 개념으로 통계량을 다룰 때에 확률변수를 정의하는 과정으로부터 시작된다. 이에 본 연구에서는 고등학교 통계 영역의 기본 개념인 확률변수 개념에 대한 예비교사들의 이해 정도를 탐색해 보고자 하였다. 이를 위하여 우선적으로, 본 연구의 핵심 내용인 확률변수 개념의 이해도를 보다 정확하게 파악하기 위하여 학문적 측면에서의 정의, 상황에서 드러나는 확률변수의 의미, 그리고 현행(2007 개정) 고등학교 교과서에서의 정의 측면으로 구분하여 재탐색, 정리하고자 하였다. 이를 기반으로, 예비교사 대상의 확률변수 개념의 이해 정도를 조사하기 위한 설문 문항을 마련하였으며, 이를 통해 예비교사들의 확률변수에 대한 이해 정도를 조사하여 분석하였다. 이를 토대로 확률변수 개념 및 전반적인 통계 개념에 대한 교수-학습에 대한 시사점을 제시하고자 하였다.

## Ⅰ. 서 론

현대사회는 대량 정보들을 수집하고 활용하는 정보화 사회로 현대인들에게 통계적 소양이 요구되고 있다. 이에 따라 학교수학에서 통계적 소양의 중요성이 점차 강조되고 있으며, 현직교사나 예비교사들에 대한 통계적 소양 능력의 함양 및 지도 능력의 향상 내지 개선이 요구되고 있다. 특히, 여러 가지 현상을 통계 분석하기 위하여 수량화하는 확률변수는 Mumford(2000)의 주장처럼 통계 분석의 바탕을 이루는 기본 개념으로 통계 영역을 이해하는데 핵심적인 역할을 하는 개념이라 할 수 있다. 즉, 통계 학습에서 가장 기초적인 개념으로 통계량을 다룰 때 확률변수를 정의하는 과정으로부터 시작된다고 하겠다. 확률변수는 여러 가지 현상에 대한 자료들을 수로 표현하고 조작하는 활동을 주로 다루는 통계분석에 있어서 기본 개념으로, 기댓값, 분산, 분포, 상관계수 등은 모두 확률변수를 이용하여 정의된다.

확률변수 개념을 이해하기 위해서는 필요한 확률적 특성을 가진 사건의 결과를 모두 포함하는 표본공간 구성하기, 파악하고자 하는 특성을 드러낼 수 있는 확률변수 정하기, 표본공간의 한 개의 원소에 해당하는 확률 구하기 등을 파악해야 할 것이다. 확률변수의 각 값에 해당하는 확률을 구하는 문제를 해결하기 위해서는 확률변수의 각 값이 나타내는 근원사건을 찾고, 근원사건들 각각에 대한 확률을 구하는 방식으로 문제

* 한국교육과정평가원, jschoi@kice.re.kr
** 제주대학교, yunys@jejunu.ac.kr
*** 조선대학교, sh0502@chosun.ac.kr, 교신저자

를 해결하는 것이 온당할 것이다. 그런데, 이때 확률변수의 정의를 의식하지 않아도 문제가 해결될 수 있으므로, 확률변수의 각 값에 해당하는 확률을 구하는 이해의 과정과 확률변수의 정의를 이해하는 과정은 일치하지 않을 수 있다. Vinner(1992, 2007)의 용어를 빌려 표현하자면[1], 학생들의 확률변수에 대한 개념정의와 개념이미지가 완전히 분리될 가능성이 있다. 실제 확률변수 정의에 대한 선행 연구들은 많은 학생들이 정확한 정의를 알지 못하고 있음을 밝히고 있다. 송성수(2010)는 고등학교 학생들을 대상으로 '확률변수'의 정의를 써 보도록 하였는데 26.5%(114명 중 27명)의 학생만이 확률변수 정의를 적을 수 있었고 일부 학생들은 '경우의 수'나 '확률'과 혼동하는 경우가 있다고 하였다. 조민정(2011)은 학생들에게 '확률변수'의 정의를 묻는 서술형 질문을 제시한 결과, 대부분의 학생들(104명 중 62명, 70.6%)이 모른다고 답하거나 무응답이었으며, 정답을 말한 학생은 소수(104명 중 16명, 15.4%)이었다고 하였다. 또, 일부 학생들은 '어떤 시행에서 나올 수 있는 모든 경우의 집합'과 같이 경우의 수로 답하였고(18명), '확률적으로 변하는 수' 혹은 '확률로 나타낸 것'과 같은 확률의 의미로 답하였다(19명). 이들 연구 결과, 학생들이 확률변수의 정의를 변수나 함수가 아닌 경우의 수나 확률로 잘못 이해하고 있음을 알 수 있다.

통계 교육의 기초 개념이자 핵심 개념인 확률변수 개념을 학생들에게 잘 가르치지 위해서는 교사가 확률변수 개념을 올바르게 이해하고 활용할 수 있어야 할 것이다. 수학 수업의 본질은 수학 교사가 가지고 있는 교과 내용 지식과 이를 전달하기 위한 내용 교수 지식이 잘 어우러져 이를 통한 의미 있는 수학 내용의 전달이라 할 수 있다(최승현, 2007). 그러므로 현직교사나 예비교사는 통계적 소양 능력의 일부로 확률개념에 대한 올바른 이해와 이의 중요성을 인식해야 할 것이다. 이에 본 연구는 예비교사들을 대상으로 확률변수 개념에 관한 이해 정도를 살펴보고자 한다. 이를 위하여 우선적으로, 본 연구의 핵심 내용인 확률변수 개념의 이해도를 보다 정확하게 조사하기 위하여 학문적 측면에서의 정의, 상황에서 드러나는 확률변수의 의미, 그리고 현행(2007 개정) 고등학교 교과서에서의 정의 측면으로 구분하여 재탐색, 정리하고자 하였다. 이를 기반으로, 예비교사 대상의 확률변수 개념의 이해도를 조사하기 위한 설문 문항을 마련하였으며, 이를 통해 예비교사들의 확률변수에 대한 이해 정도를 조사하여 분석하였다. 궁극적으로, 확률변수 개념 및 전반적인 통계 개념에 대한 교수-학습에 대한 시사점을 제시하고자 하였다.

## Ⅱ. 확률변수 개념 분석

### 1. 확률변수의 학문적 정의

확률변수의 정의는 관점에 따라서 수학 교재마다 다르게 기술된다. 예를 들어, Tebbs(2007)는 확률변수의 정의를 수학적 정의와 행동적 정의(working definition)로 구분하여 제시하였다. 수학적 정의는 '확률변수 Y는 정의역이 표본공간 S이고 공역이 실수인 함수이다'와 같이 함수로 정의되었고, 행동적 정의는 '확률변수는 관측되는 값이 우연에 의해 결정되는 변수이다'와 같이 변수로 정의되었다. 대학 수준의 수학 교재들

1) 개념이미지는 개념과 관련된 모든 속성과 심상들로 이루어진 인지 구조를 말한다. 의식적으로나 무의식적으로 개념에 대해 개인이 가지는 모든 관념들의 집합으로, 마음속에 연상되는 비언어적 실체이다. 그러므로 각자의 경험으로 이루어진 경험에 따라 형성되는 개념이미지는 개인마다 다르게 나타날 수 있다. 이에 반해 개념정의는 수학적 개념의 형식적 정의를 뜻함(류희찬 역 외, 2007).

에서 제시된 확률변수의 정의를 분류해 보면 변수로서의 정의, 실함수로서의 정의, 측정 가능한 함수로서의 정의 등으로 분류할 수 있다.

첫째, 실험의 결과를 강조하는 관점에서 확률변수를 변수로 정의할 수 있다. 일반적으로 통계학 교재에서 이 정의가 제시된다고 하겠다. 홍봉영, 정요섭(2000)에 따르면, 확률변수는 '어떤 실험에서 일정한 확률을 가지고 일어나는 사건에 수치를 부여하는 것'을 의미한다. 이훈영(2006)은 '표본공간상에 나타나는 모든 표본점들에 수치를 부여하는 일종의 규칙(변수)'로 정의하였다. 김재광 외(2009)는 '확률실험의 결과 또는 결과물에 대한 숫자적 표현'이라고 정의하였다. 예일대학(1997)의 통계학과 강의록에 따르면, '일반적으로 X로 표현되는 확률변수는 나타날 수 있는 가능한 값들이 랜덤 현상이 수치로 표현되는 변수이다'라고 정의되었다. McClave, Sincich(2006)은 '확률변수는 실험의 우연 결과와 관련된 수치값을 나타내는 변수이다. 이때, 각 표본점은 오직 한 개의 수치값을 갖는다'로 정의하였다. 이와 같이 변수로 확률변수를 정의하면 어떤 실험에서 확률적으로 일어나는 사건의 값을 여러 가지 수치로 표현하도록 하는 측면을 강조할 수 있다. 한편 이 정의에서 사건의 값을 어떻게 수치를 가지도록 할 것인가에 대한 설명은 드러나지 않는다. 어떤 사건에 수치를 대응시키는 것은 수학적으로 함수이고, 이것은 두 번째 정의 유형에서 설명된다.

둘째, 표본공간 S에서 실수로 가는 함수 즉, 실함수로서 확률변수를 정의할 수 있다. 일반적으로 확률론 교재에서 이러한 정의가 제시되었다. 고왕경(2006)은 '실험에 따른 표본점에 잘 정의된 체계의 실변수를 대응시킨 집합의 함수를 확률변수'로 정의하고 '대응된 실변수는 확률변수의 값'으로 정의하였다. 프린스턴대학(2002)의 통계학과 강의록에서는 '표본공간 위의 확률변수는 각각의 샘플 점(즉, 실험 결과)를 실수로 보내는 함수이다'로 정의하였다. 여인권, 송문섭, 허문열(2009)는 확률변수를 '표본공간 $\Omega$의 각 원소 $w \in \Omega$에 대해 실수값 $X(w)=x$를 대응시키는 함수 $X(\cdot)$을 확률변수라고 한다. 즉, 표본공간에서 정의된 실수함수를 확률변수라고 한다'로 정의하였다. 실함수로 확률변수를 정의하면 사거의 값을 수치로 바꾸는 방법을 설명할 수는 있지만, 엄밀한 의미에서의 수학적 정의로는 부족한 부분이 있다. 이런 이유로 여인권, 송문섭, 허문열(2009)는 엄밀한 의미에서 확률변수의 정의를 각주로 별도로 제시하였다. 엄밀한 의미에서의 확률변수는 측정 가능한 함수로서의 정의로 여기에서는 세 번째 유형의 정의이다.

셋째, 측정 가능한 함수(measurable function)로서 공리적으로 확률변수를 정의할 수 있다. 확률변수가 측정 가능한 함수의 특수한 경우로 인식된 것은 확률변수가 실제적으로 사용된 한참 후의 일이었다. 1933년에 Kolmogorov에 의해서 측도론(measure-theory)을 바탕으로 확률론의 기초가 형식화되었고 여기에서 확률변수는 확률 공간에서의 측정 가능한 함수일 뿐이었다(Hazewinkel, 2001). 측정 가능한 함수로 정의되기 위해서는 우선 표본공간을 집합으로 정의하여야 한다. 즉, 주어진 집합의 집합족 위에서의 σ-집합체와 가측공간을 먼저 정의해야 한다. 그리고 확률의 연속성을 보장하기 위해서 확률을 다음과 같이 정의한다(윤용식, 2005).

$(\Omega, \mathcal{J})$를 가측공간이라고 하자. $\mathcal{J}$상에서 정의된 함수 $P$가 다음의 조건

(P.1) 임의의 $E \in \mathcal{J}$에 대하여 $0 \le P(E) \le 1$

(P.2) $P(\Omega)=1$

(P.3) (가산가법성) $E_k \in \mathcal{J}, E_k \cap E_l = \phi (k \neq l)$,

($k, l$은 자연수)이면 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k)$

를 만족할 때, $P$를 $(\Omega, \mathcal{J})$ 상의 **확률**(probability)이라 하고, $(\Omega, \mathcal{J}, P)$를 **확률공간**(probability space)

이라 한다.

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$ 이라 하고, $\mathbb{R}^{\#}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 라 할 때, 확률변수를 다음과 같이 정의하게 된다(윤용식, 2005).

> $(\Omega,\mathcal{F},P)$를 확률공간이라 하자.
> 함수 $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\#}$ 가 임의의 $\alpha\in\mathbb{R}$ 에 대하여
> $$\omega\in\Omega|\ \mathrm{X}(\omega)>\alpha\in\mathcal{F}$$
> 를 만족할 때, $X$를 **확률변수**(random variable) 또는 $\mathcal{F}$**-가측함수**(measurable function)라고 한다. 특히, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 인 경우, $X$를 **실 확률변수**(real random variable)라고 한다.

측정 가능한 함수로서의 정의에서 파악할 수 있는 확률변수의 성질은 첫째, 확률변수의 각 값에 해당하는 확률을 구했을 때의 확률이 Kolmogorov의 공리적 확률을 만족해야 한다는 점이다. 둘째, 확률변수의 각 값에 해당하는 확률들의 누적분포가 단순증가함수이어야 한다는 점이다. 하지만 측정 가능한 함수로서의 확률변수에서는 왜 확률변수가 사용되는지 어떠한 상황에서 확률변수가 사용되는지에 대한 의미가 드러나지 않고, 측정 가능한 함수일 뿐이다.

위의 세 가지 유형의 정의는 확률변수의 특정 측면을 강조한다. 변수로서의 확률변수는 확률변수의 각 값이 가지는 값에 초점을 두고 있으며, 실함수로서의 확률변수는 표본공간의 사건의 결과를 실수와 대응시키는 과정에 초점을 두고 있다. 반면, 측정 가능한 함수로서의 확률변수는 수학적 엄밀성을 강조하고 있는데, 학교수학에서는 엄밀한 의미의 수학적 정의를 사용하기 어렵기 때문에 전자인 변수로서의 확률변수와 실함수로서의 확률변수 개념을 다루는 것으로 판단된다.

## 2. 상황에 따른 확률변수

수학적 개념을 구성하는 다양한 측면은 각자 다른 상황에서 발현되기 때문에, 한 가지 상황만을 고려하여 그 개념의 본질을 파악하기 어렵다(Vergnaud, 1988). 따라서 몇 가지 상황을 비교함으로써 확률변수 개념을 분석하고자 한다.

우선, 확률변수는 확률이 결정될 수 있는 시행 결과인 모임인 표본공간에서 정의되므로, 시행이 달라지면 표본공간과 확률변수는 같더라도 확률변수의 각 값에 해당하는 확률이 다르게 나타난다. 다음 [상황1]과 [상황2]의 경우, 시행의 결과에 해당하는 근원사건이 다르기 때문에 표본공간과 확률변수는 같지만 확률변수의 각 값에 해당하는 확률이 다르게 나타난다.

> [상황1]
> 표본공간 $S$를 $a, b, c, d$가 적혀있는 정사면체를 던져서 나온 눈이라 하자.
> $S$에 대하여 확률변수를 다음과 같이 정의한다.
> $X:S\to\mathbb{R},\ X(a)=1,\ X(b)=2,\ X(c)=3,\ X(d)=4$

> [상황2]
> 표본공간 $S$를 $a, a, a, b, c, d$가 적혀있는 정육면체를 던져서 나온 눈이라 하자.
> $S$에 대하여 확률변수를 다음과 같이 정의한다.
> $X:S\to\mathbb{R},\ X(a)=1,\ X(b)=2,\ X(c)=3,\ X(d)=4$

[상황1]에서 표본공간 $S$는 $S=\{a, b, c, d\}$이고, $P(X=n)=\dfrac{1}{4}\ (n=1, 2, 3, 4)$으로 같다. 하지만 [상황2]에서는 정육면체에서 나올 수 있는 눈의 확률이 다르기 때문에 표본공간 $S$는 $S=\{a, b, c, d\}$이지만, 확률변수 $X$의 각 원소에 해당하는 확률의 값이 다르게 나타난다. 즉, $P(a)=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $P(X=1)=P(\{s\in S: X(s)=1\})$ $=P(\{a\})=\dfrac{1}{2}$ 이고, $P(b)=P(c)=P(d)=\dfrac{1}{6}$ 이므로, $n$ 이 $2, 3, 4$ 인 경우에 $P(X=n)=\dfrac{1}{6}$ 이다. [상황1]은 오해를 불러오지는 않지만 [상황2]는 표본공간을 $a, a, a, b, c, d$가 적혀있는 정육면체를 던져

서 나온 눈으로 하고, 표본공간은 집합이므로 $S=\{a,\ a,\ a,\ b,\ c,\ d\}=\{a,\ b,\ c,\ d\}$와 같이 나타난다. 이 경우에 표본공간의 각 사건에 대한 확률이 다르다. 즉, $S=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $P(a)=\frac{1}{2}$이고 $P(b)=P(c)=P(d)=\frac{1}{6}$이다. 그러므로 확률변수 $X: S\to\mathbb{R}$를 $X(a)=1,\ X(b)=2,\ X(c)=3,\ X(d)=4$로 정의하면, $P(X=1)=\frac{1}{4}$이 아니라 $P(X=1)=\frac{1}{2}$가 된다. 표본공간과 확률변수가 같더라도 확률변수의 각 값에 해당하는 확률은 다를 수 있다. 확률변수는 표본공간에 나타나는 시행의 결과에 대한 확률을 수량화하기 때문이다.

또한, 위의 상황은 연속확률변수인 경우에도 동일하게 나타난다. 다음 [상황3]과 [상황4]는 시행의 결과에 해당하는 근원사건이 다르기 때문에 표본공간과 확률변수는 같지만 확률변수의 각 값에 해당하는 확률이 다르게 나타난다.

> [상황3]
> 원형 시계에서 임의의 시간에 분침이 나타내는 수를 표본공간 $S$라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.
> $$X: S\to[0,\ 3],\quad X(t)=\frac{t}{4}$$

> [상황4]
> 원형 시계에서 1시에서 2시 30분 사이에 분침이 나타내는 수를 표본공간 $S$라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.
> $$X: S\to[0,\ 3],\quad X(t)=\frac{t}{4}$$

[상황3]에서 표본공간 $S$는 $S=[0,\ 12]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 12\}$이고 확률변수 $X$에 대해서 확률은 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}P(X\in[a,\ b])&=P(\{s\in S: a\le X(s)\le b\})=P([4a,\ 4b])\\&=P([4a,\ 4b])=\frac{4b-4a}{12}=\frac{b-a}{3}\end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned}P_X([0,\ 1])&=P(X\in[0,\ 1])=P(\{s\in S: 0\le X(s)\le 1\})\\&=P([0,\ 4])=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이다. 마찬가지로 $P_X([1,2])=P_X([2,3])=\frac{1}{3}$이다. 하지만 [상황4]에서 표본공간은 동일하게 $S=[0,\ 12]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 12\}$이지만 표본공간의 각 사건에 대한 확률이 다르다. $P([0,\ 6])=\frac{2}{3}$, $P([6,\ 12])=\frac{1}{3}$이므로 $0\le a\le b\le 3$을 만족하는 $a,\ b$에 대하여 $4b\le 6$이면

$$\begin{aligned}P_X([a,\ b])&=P(X\in[a,\ b])=P(\{s\in S: a\le X(s)\le b\}\\&=P([4a,\ 4b])=\frac{2(4b-4a)}{3\cdot 6}=\frac{4(b-a)}{9}\end{aligned}$$

이다. 이 식을 (1)이라고 하자. $6\le 4a$이면

$$\begin{aligned}P_X([a,\ b])&=P(X\in[a,\ b])=P(\{s\in S: a\le X(s)\le b\}\\&=P([4a,\ 4b])=\frac{4b-4a}{3\cdot 6}=\frac{2(b-a)}{9}\end{aligned}$$

이다. 이 식을 (2)라고 하자.

$0\le 4a\le 6\le 4b\le 12$인 경우는 $[4a,\ 6]$은 (1)번식으로, $[6,\ 4b]$는 (2)번식으로 확률을 구할 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}P_X([0,\ 1])&=P(X\in[0,\ 1])=P(\{s\in S: 0\le X(s)\le 1\})\\&=P([0,\ 4])=\frac{2(4-0)}{3\cdot 6}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_X([2,\ 3])&=P(X\in[2,\ 3])=P(\{s\in S: 2\le X(s)\le 3\})\\&=P([8,\ 12])=\frac{12-8}{3\cdot 6}=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

이다. 즉, 표본공간과 확률변수가 같더라도 확률변수의 각 값에 해당하는 확률은 다를 수 있다.

한편, 표본공간과 표본공간의 각 원소에 해당하는 확률이 동일한 경우에, 확률변수를 다양하게 정할 수 있다. 확률변수가 달라지면 확률변수의 각 값에 해당하는 확률은 다르게 정해진다. 확률변수는 시행의 결과가 어떻게 값을 갖게 되는지를 정해주는 방법이다.

[상황5]
표본공간 $S$를 $a, b, c, d, e, f$가 적혀있는 정육면체를 던져서 나온 눈이라 하자.
$S$에 대하여 확률변수를 다음과 같이 정의한다.
$X: S \to \mathbb{R}$,
$X(a)=1,\ X(b)=2,\ X(c)=3,\ X(d)=4,\ X(e)=5,\ X(f)=6$

[상황6]
표본공간 $S$를 $a, b, c, d, e, f$가 적혀있는 정육면체를 던져서 나온 눈이라 하자.
$S$에 대하여 확률변수를 다음과 같이 정의한다.
$X: S \to \mathbb{R}$,
$X(a)=1,\ X(b)=1,\ X(c)=1,\ X(d)=4,\ X(e)=5,\ X(f)=6$

[상황5]과 [상황6]를 비교하면, 확률변수의 각 값에 해당하는 확률 값이 변화됨을 알 수 있다. 두 상황에서 표본공간 $S$와 각 원소에 해당하는 확률은 $P(a)= \cdots =P(e)=\dfrac{1}{6}$, $P(\{a\})=P(a)$으로 두 상황에서 동일하다. 하지만 확률변수가 달라지면 확률변수의 각 값에 해당하는 확률의 값이 달라진다. [상황5]에서 $S=\{a, b, c, d, e, f\}$이고, 각 원소에 해당하는 확률은 $P(a)= \cdots =P(e)=\dfrac{1}{6}$, (단, $P(\{a\})=P(a)$)이다. 확률변수 $X$의 각 원소에 해당하는 확률은

$P(X=1)=P(\{s \in S : X(s)=1\})=P(\{a\})=\dfrac{1}{6}$,

$P(X=n)=\dfrac{1}{6}$ $(n=2, 3, 4, 5, 6)$이다. [상황6]에서 $S=\{a, b, c, d, e, f\}$이고, 각 원소에 해당하는 확률은 $P(a)= \cdots =P(e)=\dfrac{1}{6}$, (단, $P(\{a\})=P(a)$)이다. 확률변수 $X$의 각 원소에 해당하는 확률의 값은 $P(X=1)=P(\{s \in S : X(s)=1\})=P(\{a, b, c\})=\dfrac{1}{2}$이고 $P(X=n)=\dfrac{1}{6}$ $(n=4, 5, 6)$이다. 동일한 표본공간과 동일한 표본공간의 각 원소에 해당하는 확률이 주어진 경우에, 여러 가지 방식으로 확률변수를 정할 수 있다.

## 3. 교과서의 확률변수 정의

고등학교 교과서에 '확률변수'는 '미적분과 통계 기본' 또는 '적분과 통계'에 소개되어 있다. 확률변수는 통계 영역의 다른 개념들과 밀접하게 연결되어 있는 핵심 개념으로(최경호, 2008), 다른 개념과의 연결 관계도 고려해야 하지만 여기에서는 확률변수의 명시적인 정의만을 조사하였다. 2007 개정에 따른 '적분과 통계' 교과서 10종에 나타난 확률변수는 정의는 <표 Ⅱ-1>과 같이 그 유형을 변수와 함수로 분류할 수 있었다.[2)]

첫 번째 유형은 확률변수를 변수로 정의하는 것으로, 최용준 외(2010)와 우정호 외(2010)가 여기에 속한다고 볼 수 있다. 즉, 변수로서의 확률변수는 사건의 결과를 나타내는 값이 변화된다는 측면을 강조한다고 하겠다. 최용준 외(2010)를 살펴보면, 확률변수를 '앞의 변수 $X$와 같이 어떤 시행의 결과에 따라 값이 정해지고, 그 값에 대응하는 확률이 정해지는 변수를 확률변수라고 한다'와 같이 정의하였다. 표본공간의 각 원소가 가지는 값의 변화를 강조한다.

두 번째 유형은 확률변수를 함수로 정의하는 것인데, 이강섭 외(2010)를 살펴보면, 확률변수를 '어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 확률변수라고 한다'와 같이 정의하고 있다. 그리고 '확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이다. 그러나 변수의 역할을 하므로 확률변수라고 부른다.'와 같이 확률변수의 특성을 기술하고 있

2) 참고로, 7차 교육과정에 따른 교과서 분석에서도 확률변수는 변수와 함수로 분류할 수 있다(이상복, 손중권, 정성석, 2005).

<표 Ⅱ-1> 2007개정 교육과정 '적분과 통계' 교과서의 확률변수 정의와 유형 분류

| 교과서 구분 | 확률변수 정의 | 정의 유형 |
|---|---|---|
| 우정호 외(2010) | 어떤 시행의 결과에 따라서 변수 $X$가 취하는 값과 그 값을 취할 확률이 정해질 때, 이 변수 $X$를 **확률변수**라고 한다. | 변수 |
| 최용준 외(2010) | 어떤 시행의 결과에 따라 값이 정해지고, 그 값에 대응하는 확률이 정해지는 변수를 **확률변수**라고 한다. | |
| 유희찬 외(2010) | 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 수를 대응시킬 때, 이를 **확률변수**라고 한다. | 함수 |
| 이강섭 외(2010) | 어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 **확률변수**라고 한다. | |
| 황선욱 외(2010) | 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 것을 **확률변수**라고 한다. | |
| 윤재한 외(2010) | 어떤 시행의 표본공간 $S$에서 실수 전체집합 $R$로의 함수 $X:S\to R$를 **확률변수**라고 한다. | |
| 김수한 외(2010) | 어떤 시행의 표본공간 $S$의 각 원소를 실수의 집합 $R$의 한 원소에 대응시키는 함수 $X:S\to R$를 **확률변수**라고 한다. | |
| 이준열 외(2010) | 어떤 시행의 표본공간 $S$에서 실수 전체의 집합 $R$로의 함수 $X:S\to R$를 **확률변수**라고 한다. | |
| 최봉대 외(2010) | 어떤 시행의 표본공간 $S$에서 실수 전체의 집합 $R$로의 함수 $X:S\to R$을 **확률변수**라고 한다. | |
| 계승혁 외(2010) | 어떤 시행의 표본공간 $S$에서 실수 전체의 집합 $R$로 가는 함수 $X:S\to R$가 주어지면 함수 $X$에 대하여 동일한 함숫값 $x$를 가지는 표본공간의 원소들로 이루어진 사건 $A$가 결정되고, 이 사건의 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 계산할 수 있다. 이와 같이 확률이 정해지는 값을 취할 수 있다는 의미로 표본공간에서 정의된 함수 $X$를 **확률변수**라 하고, $X$의 함숫값 $x$가 되는 사건 $A$에 대한 확률 $\mathrm{P}(A)$를$\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다. | |

다. 대응으로서의 확률변수 정의는 각 사건의 결과를 하나의 실수에 대응시키는 과정을 강조하는 것으로 1절의 분류에 따르면 함수적 측면을 강조하는 것이다.

한편, 수학적 기호의 엄밀함의 수준은 차이가 있지만, 엄밀하게 실함수임을 강조하기도 한다. 최봉대 외(2010)는 가장 정확한 대수식을 이용하여 확률변수를 정의하였다. 확률변수가 함수임을 확인하는 활동이다. 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 시행 결과를 나타내는 집합인 표본공간 $S$의 각 원소에 동전의 앞면이 나온 개수를 대응시킬 때, 이러한 대응이 함수가 되는가를 확인하도록 하는 탐구활동을 도입하였다. 그리고 확률변수가 함수의 일반적인 특징을 가지고 있으므로 일종의 함수임을 정확한 수학적 기호를 사용하여 기술하였다. 또한, 이준열 외(2010)는 확률변수를 '어떤 시행의 표본공간 $S$에서 실수 전체의 집합 $R$로의 함수 $X:S\to R$를 확률변수라고 한다'와 같이 실함수로 정의하였지만, 대수식이 아니라 벤다이어그램을 이용하여 확률변수, 근원사건이 일어날 확률, 확률변수의 각 값에 근원사건의 확률을 대응시키는 함수의 특징을 탐구활동으로 제시하고 있다. 고등학교에서 확률변수를 실함수로 정의하기 위해서는 학생들이 이해해야 할 요소들이나 표현 방법이 많음을 알 수 있다.

이상을 정리하면, 교과서 확률변수의 정의는 표면적으로 변수 또는 함수로 구분되지만 공통점이 많은 것으로 판단된다. 첫째, 동전을 던지는 시행(한 개의 동전을 두 번 던지는 시행, 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행, 한 개의 동전을 던지는 시행)만을 사용하였다. 이것은 확률

변수라는 개념을 도입하기 위하여 간단하면서 확률변수의 특징을 드러낼 수 있는 상황을 도입하려는 교수학적 의도 때문인 것으로 판단된다. 확률변수를 처음 도입하는 과정에서 개념을 쉽게 설명하기 위해서 이와 같은 단순한 상황을 활용하는 것이 바람직하다. 하지만 시행의 결과를 '경우의 수' 개념으로 간단하게 나열할 수 있어, 동전의 앞면이 나오는 횟수를 표현하는 것이 용이하여 표본공간을 수량화할 필요성을 이해하기가 어려울 가능성이 있다. 둘째, 확률변수 $X$에 대한 전형적인 예는 동전의 앞면이 나오는 횟수이다. 확률변수 $X$는 일종의 함수로서 여러 가지 방식으로도 규칙을 줄 수 있으나 전형적으로 동전의 앞면이 나오는 횟수만을 규칙으로 삼았다. 이 경우에 확률변수에 대한 고정된 관념을 줄 수 있으며, 학생들이 함수의 임의성을 파악하지 못할 수도 있다.

지금까지 살펴본 확률변수의 학문적 정의, 상황, 교과서의 정의 등을 살펴본 결과, 학문적 지식으로서의 확률변수 개념이 가르칠 지식으로서의 확률변수로 변환되는 과정에서 보존되어야 할 하위 요소를 다음과 같이 확인할 수 있다. 첫째, 확률변수는 실험 결과의 값을 수치로 바꾸는 방법이다. 즉, 실함수이다. 이때 한 개의 실험 결과를 수치로 바꾸는 즉 함수를 정의하는 방법은 무수히 많다. 예를 들어, 두 개의 동전을 던지를 실험의 결과를 값으로 바꾸기 위해서는 동전의 앞면의 개수를 확률변수로 정할 수도 있고, 동전의 앞면을 1, 뒷면을 -1이라 하고 던져진 두 동전이 나타내는 값의 합을 확률변수로 정할 수도 있다. 둘째, 확률변수는 표본공간의 특성을 파악하기 위하여 이루어지는 것이다. 확률이 실험 결과로 특정한 사건이 일어날 수 있는 가능성을 말하는 것처럼 확률변수는 시행의 결과들을 수치화함으로써 시행의 결과들이 일어날 수 있는 가능성을 구하고자 하는 것이다. 두 개의 동전을 던지는 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라고 설정한다면, 두 개의 동전을 던지는 시행의 결과의 특징을 파악하기 위한 것이다. 어떤 상점을 방문한 고객의 성별의 특징을 파악하고자 한다면, 여성인 경우에 1, 남성인 경우에 0을 확률변수로 정할 수 있다.

## Ⅲ. 연구 내용 및 방법

### 1. 설문 조사 내용

본 연구의 목적은 예비교사들의 확률변수 개

<표 Ⅲ-1> 확률변수의 이해 정도 파악을 위한 설문 구성

| 주제 | 설문 내용 요소 | 비고 (설문지 문항 번호) |
|---|---|---|
| 확률변수의 개념정의와 개념이미지는 다른가? | 확률변수 정의하기 | 1번과 2, 3, 4, 5, 6, 7번 비교 |
| | 특정 상황에서 확률변수에 관한 문제 해결하기 | |
| 특정 상황에서 확률변수를 이해하는 정도가 차이가 있는가? | 이산/연속 확률변수를 사용하는 문제 해결하기 | 2, 3, 4번과 5, 6, 7번 비교 |
| | 확률분포가 균일한 경우에 균일하지 않은 경우에 확률변수를 사용하는 문제 해결하기 | 하위문항 (1)번과 (2)번 비교 |
| 확률변수를 함수로 파악하는데 가지고 있는 어려움은 무엇인가? | 주어진 상황에서 표본공간 찾기 | 하위문항 (1) |
| | 주어진 상황에서 확률변수의 각 값에 해당하는 근원사건 구하기 | 하위문항 (2) |
| | 주어진 상황에서 확률변수의 각 값에 해당하는 확률 구하기 | 하위문항 (3) |

념에 대한 이해 정도를 조사하는 것이다. 확률변수 개념에 대한 이론적 탐색 결과를 바탕으로 본 연구에서는 확률변수 개념과 관련하여 세 가지 주제를 선정하였으며, 이는 확률변수 정의를 이해하고 있는지, 확률변수의 개념정의와 개념이미지는 다른지, 특정 상황에서 확률변수를 이해하는 정도가 차이가 있는지, 확률변수를 함수로 파악하는데 가지고 있는 어려움은 무엇인지에 관한 것이다. 이 주제에 따른 구체적인 설문 내용 요소를 <표 Ⅲ-1>과 같이 선정하고 각각에 해당되는 설문 문항을 작성하였다. <부록 참조> 이때, 문항(초안)은 일차적으로 본 연구에 참여한 한 연구자에 의해 개발되었으며, 이후 연구자들의 상호 검토 및 수정 보완에 의해 완성된 것이다.

## 2. 설문 조사 대상 및 방법

조사 대상은 시・도 구역의 A도, B도, C도에 위치한 3개 대학교를 임의로 선정하여 해당 대학교의 사범대학 수학교육과에 재학 중인 3학년 학생 70명(각각 19명, 25명, 26명)이다. 조사 대상들은 기본적으로 장차 수학교사가 되고자 하는 예비교사들이며, 또한 3학년을 대상으로 한 것은 3학년 학생들의 경우에 교직이수과정에서 확률과 통계와 관련된 교과목을 학습하였기 때문이다. 단, 본 연구의 설문에 참여한 세 대학의 경우, 대학별 비교를 원치 않았기 때문에 이를 배제하였다.

이러한 설문 문항 개발과 대상자 선정에 이어, 설문 조사는 다음과 같은 순서로 진행되었다. 우선, 위에서 언급된 3개 사범대학 수학교육과에 설문 조사지를 송부하였는데, 설문 조사를 실시하기 전에 학생들에게 사전에 고등학교 교과서나 대학 교재를 통해 '확률변수'와 관련된 부분을 학습할 것을 권고하였다. 이는 확률과 통계 관련이 교과목을 이미 수강하였지만, 평상시에 확률변수 등에 대한 내용을 깊이 있게 고민하거나 복습하지 않은 경우, 또는 설문 문항 내용을 미처 예상하지 못하고 당황하여 무의미하게 설문조사에 응하게 되는 것을 막기 위함이다. 하지만, 이와 같은 권고 내지 조치는 예비교사들이 평소 가지고 있던 본인의 확률변수 관련의 선행지식 정도를 정확히 가늠하는 데에 영향을 미칠

<표 Ⅳ-1> '확률변수'에 대한 정확한 정의 구분 및 답변 사례

| 구분 | 답변 사례 | 비율 (총 14건) |
|---|---|---|
| 변수 | ● (S20) 일정한 확률을 가지고 발생하는 사상에 수치가 부여되는 변수 | 1/14 |
| 함수 | ● (S4) 표본공간의 각 원소를 실수값으로 대응시키는 함수<br>● (S7) 확률변수란 어떤 표본공간이 주어지면 그 원소에 대응되는 함수이다.<br>● (S13) 표본공간 $S$에 대하여 $S$를 정의역으로 숫자를 매긴 함수<br>● (S15) 표본공간의 사건에 표본점을 실수값에 대응시키는 함수<br>● (S16) 표본공간의 사건에 표본점을 실수값에 대응시키는 함수<br>● (S24) 표본공간의 각 원소에 하나의 실수값을 대응시키고 그 값을 가질 확률이 정해질 때 이 변수를 확률변수라 한다.<br>● (S30) 표본공간 $S$에서 정의되고, 실수값으로 보내는 함수<br>● (S31) 표본공간에서 정의된 실수값을 가지는 함수<br>● (S37) 모집단 $S$에 대해서 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의 한다.<br>$X: S \to R$, $i \mapsto X(i)$ , $X(i): i$가 일어날 사건<br>● (S38) 표본공간에서 정의되고, 실수값을 가지는 함수<br>● (S61) 표본공간에서 실수값으로 보내는 함수<br>● (S62) 표본공간에서 실수값으로 보내는 함수이다.<br>● (S63) 표본공간 위에서 정의된 실수값 함수 | 13/14 |

것으로 판단되므로, 이는 본 연구를 수행하는데 있어서 하나의 제한점이라 하겠다. 한편, 설문 조사는 40분간 진행되었는데, 대부분의 학생들은 이 시간 내에 주어진 문항들을 충분히 해결할 수 있을 것으로 연구자들은 합의하였다.

설문 조사 결과는 문항별 정답률을 파악하기 위한 기술 통계와 <표 Ⅲ-1>에서 제시된 주제에 따른 결과를 도출하기 위하여 추론 통계를 활용하여 분석하였다.

## Ⅳ. 연구 결과

예비 수학 교사들의 확률변수에 관한 이해 정도를 파악하기 위한 설문 조사 결과를 확률변수의 개념정의와 개념이미지는 다른지, 특정 상황에서 확률변수 개념 이해의 차이가 있는지 (이산량과 연속량, 확률분포가 균일한 경우와 균일하지 않은 경우), 확률변수 문제해결 과정에서 어려운 부분은 어디인지에 초점을 두어

<표 Ⅳ-2> 확률변수에 대한 부정확한 정의 구분 및 답변 사례

| 구분 | 답변 사례 | 비율(총 37건) |
|---|---|---|
| 잘 정의되지 않은 함수 | ● (S66) 집단에서 표본들과 확률이 대응되는 관계<br>● (S54) 사건에 대해 확률을 가진 사상을 수치로 나타낼 수 있는 변수<br>● (S26) 실수값을 함수값으로 가지며 이에 대한 확률이 잘 정의되어 있는 변수<br>● (S70) 표본공간 $S$에서 어떤 사건이 일어났을 때, 그 사건을 실수에 대응시키는 함수<br>● (S8) 표본공간에 있는 원소가 가지는 확률들이 있는데 이때 특정한 확률을 가지는 표본공간의 원소를 확률변수라 한다. | 5/37 |
| 잘 정의되지 않은 확률과 변수의 조합 | ● (S22) 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수<br>● (S23) 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수<br>● (S21) 상황에 따라 변하는 확률값을 갖는 수<br>● (S56) 확률을 결정하는 변수<br>● (S2) 어떠한 사건에 확률이 부여되는 변수<br>● (S5) 확률을 변화시킬 수 있는 요인<br>● (S58) 표본공간에서 나올 수 있는 확률<br>● (S69) 표본공간에 있어 어느 특정한 경우의 수가 나올 확률<br>● (S45) 어떤 사건의 시행의 결과를 각각의 경우에서 그 사건이 일어날 확률을 모아둔 것<br>● (S51) 확률(함수값)을 결정해주는 변수(정의역)<br>● (S44) 사건으로 확률이 나타나는 구체적인 변수를 대입하여 확률을 구하는 함수<br>● (S64) 여러 가지 값을 갖는 것으로, 각 값은 각각의 확률이 정의되어 있다.<br>● (S28) 여러 값을 가질 수 있고, 그 값을 가질 수 있는 확률이 정의되어 있는 변수<br>● (S36) 여러 값을 가질 수 있으며, 각 실수값을 가질 확률이 정의되어있는 변수, 즉 표본공간에서 추출할 수 있는 변수<br>● (S39) 확률이 결정되는 상황에서 어떤 변수의 값이 확률이 되어지는 변수<br>● (S40) 여러 값을 가질 수 있으며, 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수이다.<br>● (S25) 여러 가지 값을 가질 수 있으며 값에 따라 확률이 정의되는 변수<br>● (S27) 어떤 값 $X$에 대해서 그 값이 확률을 가질 때 $X$를 확률변수라 한다.<br>● (S68) 변수 $X$에 대해 확률을 갖는 변수<br>● (S29) 각 값에 따른 확률이 정의되는 변수를 확률변수라 한다.<br>● (S32) 여러 가지 값을 가질 수 있고 각 값에 따라 확률이 정해지는 변수<br>● (S33) 여러 가지 값을 가질 수 있으며 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수<br>● (S34) 여러 가지 값을 가질 수 있으며, 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수 | 23/37 |
| 경우의 수 | ● (S62) 어떤 경우가 나올 수 있는 경우의 수/전체 경우의 수<br>● (S43) 발생할 수 있는 경우의 수<br>● (S59) 어떤 시행을 하는데에 있어서 나올 수 있는 모든 경우<br>● (S57) 어떤 상황의 결과를 예측하기 위해 일어날 수 있는 경우를 수로 표현한 것 | 4/37 |
| 기타 | ● (S6) 확률을 좌표계 그래프 위에 나타내기 위한 매개<br>● (S19) 표본공간에서 그에 맞는 표본점을 찾을 때 나타나는 변수<br>● (S35) 어떤 사건이 발생함에 따라 값이 정하는 것으로 이것을 통해 확률을 쉽게 계산할 수 있다.<br>● (S48) 어떤 사건의 시행의 결과를 나타내는 데이터를 $X$변수와 그에 따른 값으로 나타낸 것<br>● (S55) 일정한 변수를 가지고 있는 함수에 변수가 되는 것 | 5/37 |

분석하고자 하였다.

## 1. 확률변수의 개념정의와 개념이미지

70명의 학생 중에서 확률변수의 정의를 정확하게 알고 있는 학생은 14명(20.0%)이었고, 아무 내용도 답하지 않은 학생은 19명(27.1%)이었다. 또, 37명(52.9%)의 학생들은 확률변수의 정의를 정확히 이해하지 못하고 있는 것으로 미루어 짐작할 수 있다.

한편, 확률변수의 정의를 알고 있는 14명의 학생 중 13명의 학생이 확률변수를 '함수'로 파악하고 있었다. 즉 올바른 정의를 제시한 대부분의 학생들이 <표 Ⅳ-1>와 같이 표본공간의 각 사건에 대해서 실수값을 대응시키는 실함수로서 확률변수를 정의하였다.

또, 잘못된 확률변수의 정의를 알고 있는 학생들의 답변을 <표 Ⅳ-2>과 같이 3가지 유형으로 살펴볼 수 있었다. 첫째는 확률변수를 함수로 잘 정의하지 못한 경우이다. 이 학생들은 두 집합 사이의 일종의 관계가 있음을 파악하고 있지만, 표본공간, 사건, 확률, 변수 등의 논리적 관계를 잘 조합하지 못하였다. 둘째는 확률변수를 확률과 변수와 관련되는 것으로 파악하고는 있지만 잘 정의하지 못하는 경우이다. 37건의 부정확한 정의 중에서 23건에 해당하는 경우로, 한 가지 사건에 대해서 한 가지 확률값을 갖는 것이 아니라 여러 가지 사건에 대하여 각각의 확률값을 주는 방법에 초점을 두어 확률변수를 정의하였다. 셋째는 확률변수를 경우의 수로 파악하는 경우로, 소수의 학생들이 이러한 반응을 나타냈다. 그 밖에도 변수의 측면에 초점을 맞추지만 정의하지 못하는 경우, 함수와 변수를 구별하지 못하는 경우 등의 소수의 답변이 나타났다. 결과적으로 일부 예비교사들은 확률변수의 정의에 대하여 실함수의 이미지를 가지고 있었으나, 대부분의 예비교사들은 확률이나 변수, 그리고 경우의 수 등과 같은 관련 개념에 대한 이미지를 가지고 있었다.

또한 예비교사들이 가지고 있는 개념정의와 개념이미지의 관계를 분석하였다. 개념정의는 1번의 정답 유무에 따라 학생들을 분류하고 개념이미지는 2-7번의 정답 유무에 따라서 학생들을 분류하여 살펴보았다. 즉, 올바른 개념정의를 가지고 있다고 판단되는 학생들을 1번에서 정답을 기술한 학생들(14명)로 간주하였다. 전제 학생을 1번이 정답인 학생과 1번이 오답인 학생으로 구분한 후에, 2-7번의 정답률을 조사하였더니 <표 Ⅳ-3>과 같은 결과가 나타났다. 이산 확률변수 문항(2, 3, 4번)이 모두 정답인 학생은 8명으로 57.1%이었고, 연속 확률변수 문항(5, 6, 7번)이 모두 정답인 학생은 이산 연속 확률변수도 모두 정답이었고 2명(28.6%)이었다.

<표 Ⅳ-3> 1번 정답 유무에 따른 2-7번 정답인 학생 비율

| 구분 \ 번호 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1번 정답 (14명) | 학생 수 (명) | 14 | 13 | 9 | 11 | 2 | 2 | 2 |
| 1번 오답 (56명) | 학생 수 (명) | 0 | 36 | 33 | 21 | 11 | 7 | 8 |
| $t$ | | - | 2.09 | 0.37 | 1.13 | -0.46 | 0.18 | 0 |

올바른 개념정의를 가지고 있는 학생들이 올바른 개념이미지를 가지고 있다고 말할 수 있는지를 살펴보면 다음과 같다. 즉, 1번이 정답이 학생과 1번이 오답인 예비교사의 각 문항(2-7번)에 대한 정답률이 유의미한 차이가 있는지를 검정하기 위하여 유의수준 5% 수준에서 $t$ 검정을 하였다. 가설 검정 결과, 2번을 제외하고 유의미한 정답률의 차이가 나타나지 않았다. 즉, 이산 확률변수이고 분포가 정규분포를 이루

는 상황에서 사용된 확률변수의 경우에만 올바른 개념정의를 가지고 있는 학생들의 정답률과 그렇지 않은 학생들의 정답률은 유의미하게 차이가 났다. 분포가 정규 분포가 아닌 상황이나 연속량인 경우에는 확률변수를 올바르게 적용하는 능력과 올바른 개념정의를 가지고 있느냐는 관련이 없다고 할 수 있다.

반대로 개념을 잘 활용하는 학생의 개념정의는 올바른지를 분석하였다. 2번부터 7번까지의 문항에서 모두 정답인 학생들의 개념정의를 분석하였다. 2번부터 7번까지의 문항에서 모두 정답인 학생이 8명이었고, 그 중에서 1번에서 올바른 개념정의를 기술한 학생은 2명이었고 나머지 6명은 올바르지 않은 개념정의를 다음과 같이 제시하였다.

(S26) 실수값을 함수값으로 가지며 이에 대한 확률이 잘 정의되어 있는 변수
(S28) 여러 값을 가질 수 있고, 그 값을 가질 수 있는 확률이 정의되어 있는 변수
(S29) 각 값에 따른 확률이 정의되는 변수
(S33) 여러 가지 값을 가질 수 있으며 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수
(S34) 여러 가지 값을 가질 수 있으며, 각 값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수
(S36) 여러 값을 가질 수 있으며, 각 실수값을 가질 확률이 정의되어 있는 변수, 즉 표본공간에서 추출할 수 있는 변수

이 정의들은 대부분 변수와 실함수의 의미를 포함하도록 하고 있다. 특히 '확률이 정의된다'는 것과 '변수'를 연결하고자 하여, 확률변수의 개념에 확률이 정의되는 것이 붙박혀 있음을 알 수 있다.

## 2. 특정 상황에서의 확률변수

### 가. 이산량과 연속량

이산량의 경우와 연속량의 경우에 확률변수 문항에 대한 정답률은 <표 Ⅳ-4>과 같이 눈에 띄게 차이가 났으며, 하위 문항별로 비교한 결과에서도 뚜렷한 차이가 나타났다. 정답률의 차이가 적게는 40.0%p 많게는 64.3%p이었다.

<표 Ⅳ-4> 연속량과 이산량에 대한 문항 정답률 차이
(이산량 문항 정답률-연속량 문항 정답률)

| 번호 | 2 | | | 3 | | | 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 학생수(명) | 56 | 60 | 63 | 52 | 55 | 56 | 59 | 59 | 53 |
| 정답률(%) | 80.0 | 85.7 | 90.0 | 74.3 | 78.6 | 80.0 | 84.3 | 84.3 | 75.7 |
| 번호 | 5 | | | 6 | | | 7 | | |
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 학생수(명) | 16 | 22 | 33 | 13 | 20 | 19 | 18 | 14 | 25 |
| 정답률(%) | 22.9 | 31.4 | 47.1 | 18.6 | 28.6 | 27.1 | 25.7 | 20.0 | 35.7 |
| 정답률 차이(%p) | 57.1 | 54.3 | 42.9 | 55.7 | 50.0 | 52.9 | 58.7 | 64.3 | 40.0 |

이러한 결과는 예비교사들이 이산 확률변수인 경우를 연속 확률변수보다 더 잘 활용하고 있음을 보여준다.

설문 1번 문항을 통해 확률변수의 정의를 올바르게 기술한 학생 14명만을 대상으로 하여 정답률을 살펴보아도 유사한 결과가 나타난다. <표 Ⅳ-3>과 같이 연속량에 관한 2, 3, 4번 문항에 대한 정답률과 이산량에 대한 5, 6, 7번 문항의 정답률에서 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 특히, 올바른 확률변수의 정의를 알고 있는 학생들의 경우 이산량에 대한 문항을 대부분을 올바르게 해결하였음에도 불구하고, 연속량에 대한 문항에서는 대부분 올바르게 해결하지 못하였음을 알 수 있다. 반대로 연속량에 대한 문항을 모두 해결한 학생은 2명이었고, 이들은 이산량에 관한 문항을 모두 잘 해결하였다.

### 나. 확률분포가 균일한 경우와 균일하지 않은 경우

확률변수의 분포가 균일분포인 경우, 균일분

포가 아닌 경우, 함수의 임의성의 강조된 경우의 정답률에서 약간의 차이가 있었다. 이산량의 경우에는 정답률이 각각 70.0%, 64.3% 60.0%이었고, 연속량의 경우에는 정답률이 각각 18.6%, 12.9%, 14.3%이었다. 이산량인 경우와 연속량인 경우에 모두 확률변수의 분포가 균일분포인 경우에 가장 높은 정답률을 보였고, 그 다음으로는 함수의 임의성이 강조된 확률변수 문항에서 높은 정답률이 나타났다. 그리고 확률변수의 분포가 균일분포가 아닌 경우에 정답률이 가장 낮게 나타났다.

확률변수의 분포가 균일하지 않은 경우와 확률변수의 임의성이 강조된 경우의 정답률 차이는 크지 않았다. <표 Ⅳ-5>와 같이 이산 확률변수의 분포가 균일한 경우에 정답을 제시한 학생들 중에서, 확률변수의 분포가 균일하지 않은 문항은 정답이고 확률변수의 임의성이 강조된 문항은 오답인 학생은 5명이었고, 그 반대인 경우인 확률변수의 분포가 균일하지 않은 문항은 오답이고 확률변수의 임의성이 강조된 문항은 정답인 학생은 8명이었다. 연속 확률변수의 경우에도 <표 Ⅳ-6>과 같이 유사한 결과가 나타났다. 이처럼, 확률분포가 균일분포인 경우에 비해, 확률분포가 균일하지 않거나 임의성이 강조된 경우, 정답률이 다소 저조한 것으로 나타났다.

<표 Ⅳ-5> 이산 확률변수의 분포 관련 학생 수(명)

| 구분 | 3번 정답 | | 3번 오답 | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4번 정답 | 4번 오답 | 4번 정답 | 4번 오답 | |
| 2번 정답 | 41 | | 8 | | 49 |
| | 36 | 5 | 5 | 3 | |
| 2번 오답 | 1 | | 20 | | 21 |
| | 1 | 0 | 3 | 17 | |
| 계 | 42 | | 28 | | 70 |

<표 Ⅳ-6> 연속 확률변수의 분포 관련 학생 수(명)

| 구분 | 6번 정답 | | 6번 오답 | | 계 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 7번 정답 | 7번 오답 | 7번 정답 | 7번 오답 | |
| 5번 정답 | 9 | | 4 | | 13 |
| | 8 | 1 | 1 | 3 | |
| 5번 오답 | 0 | | 57 | | 57 |
| | 0 | 0 | 1 | 56 | |
| 계 | 9 | | 61 | | 70 |

## 3. 확률변수 관련 문제에서 어려운 내용

확률변수의 분포가 균일분포인 경우에는 이산 확률변수이든 연속 확률변수이든 확률값을 구하기보다 확률의 표본공간 찾기 또는 확률변수의 각 값에 해당하는 근원사건 찾기가 약간 어려운 것으로 볼 수 있다. <표 Ⅳ-7>과 같이, 확률 구하기의 정답률이 표본공간이나 근원사건 구하기의 정답률보다 높았다. 이산 확률변수의 경우에 정답률의 차이가 두드러지게 나타나지 않지만, 연속 확률변수의 경우에는 정답률의 차이가 두드러지게 나타났다. 또한, 확률변수의 분포가 균일분포가 아닌 경우에는 표본공간 찾기를 가장 어려워하는 것으로 볼 수 있으며, 이산량인 경우나 연속량인 경우에 모두 표본공간 찾는 문항의 정답률이 가장 낮았다.

<표 Ⅳ-7> 하위 문항별 정답인 학생 수와 정답률

| 문항번호 / 하위번호 | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 학생수 (명) | 정답률 (%) | 학생수 (명) | 정답률 (%) | 학생수 (명) | 정답률 (%) |
| (1)번 | 56 | 80.0 | 52 | 74.3 | 59 | 84.3 |
| (2)번 | 60 | 85.7 | 55 | 78.6 | 59 | 84.3 |
| (3)번 | 63 | 90.0 | 56 | 80.0 | 53 | 75.7 |

| 문항번호 / 하위번호 | 5 | | 6 | | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 학생수 (명) | 정답률 (%) | 학생수 (명) | 정답률 (%) | 학생수 (명) | 정답률 (%) |
| (1)번 | 16 | 22.9 | 13 | 18.6 | 18 | 25.7 |
| (2)번 | 22 | 31.4 | 20 | 28.6 | 14 | 20.0 |
| (3)번 | 33 | 47.1 | 19 | 27.1 | 25 | 35.7 |

한편, 함수(확률변수)의 임의성의 강조된 경우에는 이산인 경우와 연속인 경우에서 일관된 패턴을 찾을 수 없었다. 특히 이산 확률변수의 임의성이 강조된 4번 문항에서 확률값을 찾은 비율은 다른 이산 확률변수 문항과 비교해서 낮은 편이었고, 연속 확률변수의 임의성이 강조된 7번 문항에서 확률값을 올바르게 찾은 학생들의 비율은 다른 연속 확률변수 문항과 비교해서 높게 나타났다. 구체적으로 학생들의 반응을 3개의 하위문항 기준으로 정리한 <표 Ⅳ-8>와 같이, 4번 문항에서 (OOX)[3]에 해당하는 학생 수가 높음을 알 수 있다. 즉, 이산 확률변수의 임의성이 강조된 경우에 표본공간이나 근원사건을 찾는 것보다 확률값을 계산하는 것을 어려워하는 학생들이 상당 수 존재함을 알 수 있다. 이에 반해, 연속 확률변수의 경우에는 (XXO)에 해당하는 학생, 즉 표본공간이나 근원사건을 찾는 것보다 확률값을 계산하는 것을 상대적으로 쉬워하는 학생이 많음을 알 수 있었다. 여기에 해당하는 학생 수는 5, 6, 7번 문항 각각 18명, 10명, 15명이었다.

<표 Ⅳ-8> 하위 문항 정답별 학생 수(명)

| ((1),(2),(3)) 정답유무 | 2번 | 3번 | 4번 | 5번 | 6번 | 7번 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (OOO) | 49 | 42 | 46 | 13 | 9 | 10 |
| (OOX) | 3 | 4 | 9 | 0 | 2 | 0 |
| (OXO) | 4 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| (OXX) | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 8 |
| (XOO) | 8 | 6 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| (XOX) | 0 | 3 | 1 | 7 | 9 | 4 |
| (XXO) | 2 | 4 | 2 | 18 | 10 | 15 |
| (XXX) | 4 | 5 | 5 | 27 | 38 | 33 |
| 합 | 70 | 70 | 70 | 70 | 70 | 70 |

# Ⅴ. 요약 및 시사

본 연구는 고등학교 통계 영역의 기본 개념인 확률변수에 대한 예비교사들의 이해 정도를 탐색하는 것이 목적이다. 이를 위하여 우선 확률변수 개념의 이해도를 보다 정확하게 파악하기 위하여 학문적 측면에서의 정의, 상황에서 드러나는 확률변수의 의미, 그리고 현행(2007 개정) 고등학교 교과서에서의 정의 측면으로 구분하여 재탐색하였다. 이를 기반으로, 예비교사 대상의 확률변수 개념의 이해 정도를 조사하기 위한 설문 문항을 마련하였으며, 이를 통해 예비교사들의 확률변수에 대한 이해 정도를 조사하여 분석하였다.

예비교사들을 대상으로 한 설문 조사 결과를 세 가지 주제로 나누어 정리하면 다음과 같다. 첫째, 20%의 예비교사들이 확률변수의 정의를 정확하게 이해하고 있었으나, 대부분의 예비교사들이 정의를 올바르게 이해하지 못하고 있었다. 이들 중 일부는 실함수에 대한 이미지를 가지고 있었으나 대부분은 확률이나 변수 개념과 관련된 이미지를 가지고 있었다. 또한 올바른 개념정의를 가지고 있는 것이 올바른 개념이미지를 활용하는데 주는 영향을 제한적이었다. 균일분포를 이루는 이산 확률변수인 경우에만 정확한 개념정의에 따른 확률변수 관련 문항의 정답률에 영향을 끼쳤다. 그 외의 경우에는 정확한 개념정의의 유무가 정답률과 관련이 없었다. 둘째, 특정 상황에서 확률변수에 이해 정도의 차이가 있었다. 연속량보다는 이산량의 이해 정도가 우수하였고, 확률분포가 균일하지 않은 경우보다는 균일한 경우에 이해 정도가 우수하였다. 이것은 예비교사들이 확률변수를 유의미하게 활용하지 못할 가능성이 있음을 말해준다.

3) 본문의 <표 Ⅳ-8>에서 세 개의 연속된 O표 또는 X표 중, O표는 각각의 하위 문항에 대한 정답을 나타낸 것이고, X표는 오답을 나타낸 것임.

셋째, 확률변수 관련 문제해결 과정을 표본공간 찾기, 근원사건 찾기, 확률값 구하기로 나누어 살펴본 결과, 확률값 구하기를 가장 잘 이해하고, 표본공간 구하기를 가장 이해하지 못한 것으로 나타났다. 이는 예비교사들이 표본공간이나 근원사건을 수량화하과정과는 별도로 특정 사건에 대한 확률값을 구한다고 볼 수 있다.

이와 같은 연구 결과를 바탕으로 확률변수 개념 및 전반적인 통계 개념에 대한 교수-학습에 대한 시사점을 제시하고자 한다.

첫째, 학습자에게 확률변수가 대수 영역에서의 '변수'와 같지 않음을 주지시킬 필요가 있다. 학생들에게 변수는 무정의 용어처럼 제시되어 사용되는 용어로, 학생들은 변수를 '변할 수 있는 수'라고 생각하는 경향이 있다. 확률변수는 변할 수 있는 수가 될 수도 있지만, 임의로 일어나는 확률적인 상황을 수량화하기 위한 수단으로 도입되는 함수의 성질을 가지고 있다. 따라서 학생들과 예비교사들은 대수 영역의 변수와 통계 영역에서의 확률변수를 구분할 수 있어야 한다. 즉, 확률변수가 가지고 있는 함수의 임의성을 학생들이 인식할 수 있어야 한다.

둘째, 학습과정에서 학습자가 표본공간에 대해서 사고할 수 있는 학습 활동이 이루어져야 한다. 우리나라 학생들의 표본공간에 대한 개념 이해는 낮은 편으로 알려져 있다(이경화, 지은정, 2005; 고은성, 이경화, 2011). 그러한 원인 중의 하나는 우연적 상황을 필연적 상황과 구분하기 위한 설명이 있는 교과서가 설명이 미비하고, 통계량의 우연변이성에 대한 이해를 추구하는 교과서의 설명이 미비하기 때문이다(이영하, 신수영, 2011). 표본공간이 우연적 상황에 의해서 나타나며 변이성을 나타내기 위하여 확률변수를 다룰 수 있는 학습 활동이 교수·학습 과정에서 이루어져야 한다.

셋째, 어떤 우연 상황을 수량화한 모델임을 이해할 수 있는 상황을 통해서 확률변수를 도입할 필요가 있다. 현재 두 개의 동전을 던져서 나오는 동전의 앞면의 개수에 대한 전형적인 상황과 이어지는 균등 분포인 상황만으로 학습하는 경우에, 통계를 학습하는 학생들은 표본공간을 수량화해야 할 필요성을 느끼기 어렵다. 또한 고등수학으로의 전이 과정에서 어려움을 느낄 수도 있다(Dinges, 2005). 확률변수를 도입하기 위한 단순한 상황으로 각 사건의 결과를 확률로 표현할 때의 확률분포가 균일분포인 경우를 다루는 것이 바람직하지만, 확률변수를 이용하여 통계적 사고가 가능하도록 하기 위해서는 실제적인 상항을 다룰 필요가 있다. 실제적인 상황에서는 균등분포가 아닐 가능성이 많다.

넷째, 추측통계를 실제적으로 활용할 수 있는 예비교사의 전문성을 향상시켜야 한다. 본 연구의 결과는 예비교사들의 확률변수에 대한 개념 정의와 개념이미지가 제한적인 상황에만 적용될 수 있는 상태임을 보여준다. 예비교사들은 실제적으로 통계를 활용하는 경험을 통해서 확률변수와 같은 기본개념의 중요성과 역할을 이해해야 한다. 통계 교육의 목적이 자료에 대한 비판적인 추론 능력의 향상이라면, 학생들은 실제적인 통계 자료를 처리하는 과정에서 기본 개념과 원리를 터득해야 하며, 이전에 예비교사들이 그러한 경험을 가져야 할 것이다.

다만, 본 연구는 예비교사들을 대상으로 확률변수에 대한 이해 정도를 수학적인 측면에서 조사한 것으로, 몇 가지 측면에서 제한점을 갖는다. 첫째, 본 연구는 통계 교육과 관련된 기본 개념 중에서 확률변수 개념에만 초점을 두었다. 따라서 확률변수 개념에 대한 이해가 통계적 사고 능력의 정도와 연결시키기에 한계가 있다. 둘째, 설문 문항이 인위적으로 구성되었다. 이것은 확률변수 개념을 수학적으로 분석하여 이해도를 조사하기 위한 조치이었다. 따라서

본 연구의 결과를 실제 통계적인 상황에서 확률변수를 활용하는데 나타나는 교사들의 이해 정도로 일반화하는데 한계가 있을 것이다. 셋째, 설문 조사 대상이 3개 시도에 국한되어있으므로 일반화하는데 한계가 있고, 3개 시도의 예비교사들 사이의 차이를 고려하지 않았다. 각 대학교 별로 특정 차이가 존재함에도 불구하고 이를 고려하지 않은 것은 이 연구의 제한점이다. 이와 같은 제한점에도 불구하고, 확률변수 개념에 대한 예비교사들의 이해 정도를 심도 있게 조사했다는 측면에서 확률변수 개념에 대한 교수·학습과 향후 관련된 후속 연구에 의미 있는 시사점을 제공할 것으로 기대하는 바이다.

## 참고문헌


계승혁 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 성지출판.

고왕경(2006). **문제중심의 확률론의 이해**. 서울: 경문사.

고은성, 이경화(2011). 일반학급 학생들과의 비교를 통한 수학영재학급 학생들의 표본 개념 이해 수준 연구. **영재교육연구, 21**(2), pp.287-307.

김수한 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 교학사.

김재광, 김철응, 김현중, 박상언, 윤상운(2009). **통계학 입문**. 서울: 자유아카데미.

송성수(2010). **통계적 개념에 대한 학생들의 오류 유형 및 교과서 분석 : 수학 I 의 통계적 추론을 중심으로**. 고려대학교 대학원 석사학위논문.

여인권, 송문섭, 허문열(2009). **이론통계**. 서울: 박영사.

오광식(2011). 초·중등학교의 확률과 통계 교육과정. **한국데이터정보과학회지, 22**(6), 1097 - 1103.

우정호 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 두산동아.

유희찬 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 미래엔 컬처그룹.

윤재한 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 더텍스트.

이강섭 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. ㈜지학사.

이경화, 지은정(2005). 표본 개념의 교육적 의의와 인식 특성 연구. **수학교육학연구, 15**(2), 177-196.

이상복, 손중권, 정성석(2005). 수학 I 검정교과서 확률통계 영역에 대한 연구. **응용통계연구, 18**(1), 197-210.

이영하, 신수영(2011). 초.중.고등학교 확률과 통계 단원에 나타난 표본개념에 대한 분석. **수학교육학연구, 21**(4), 327-344.

이영하, 허지영(2010). 분포 개념의 연계성 목표 관점에 따른 중학교 확률 단원 분석. **수학교육학연구, 20**(2), 163-183.

이준열 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 천재교육. 기본검색

이훈영(2010). **이훈영교수의 통계학**. 서울: 도서출판 청람.

윤용식(2005). **확률론**. 제주대학교출판부.

조민정(2011). **확률분포 개념에 대한 학생들의 이해 능력 및 지도내용 분석**. 고려대학교 대학원 석사학위논문. 고려대학교.

최경호(2008). 고등학교 수학과 교육과정 중 확률·통계에 나타난 의미의 연결망 구조와 분석. **Communications for Statistical Applications and Methods, 15**(2), 245-254.

최봉대 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. ㈜중앙교육진흥연구소.

최승현 (2007). **교육과정 개정에 따른 수학과 내용교수 지식(PCK) 연구**. 연구보고 RRI 2007-3-2. 서울: 한국교육과정평가원.

최용준 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 천재교육.

황선욱 외(2010). **고등학교 적분과 통계**. 좋은책 신사고.

홍봉영, 정요섭(2000). **통계학**. 서울 : 수서원.

Dinges, H. (2005). Variables, in particular random variables. In Hoffmann, M., Lenhard, J. & Seeger, F. (Eds.), *Activity and sign. number concepts and operations in the middle grades* (pp. 303-311). Reston: Lawrence Erlbaum.

Hazewinkel, M. (2001). "Random variable", Encyclopedia of Mathematics. Springer.

McClave, J. T., & Sincich, T. (2006). *A first course in statistics, ninth edition*. New Jersey : Pearson Education, Inc.

Mumford, D. (2000). The dawning of the age of stochasticity. In V. I. Arnold, M. Atiyah, P. D. Lax, & B. Mazur (Eds.) *Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000* (pp. 197-218). RI:AMS.

Tebbs, J. M. (2007). PROBABILITY Lecture Notes. http://www.math.sc.edu/~cooper/math511/fall07_notes.pdf

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In Hiebert, J. & Behr, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Rest Reston:Lawrence Erlbaum.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America,

Vinner, S. (2007). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall(Ed.), **Advanced Mathematics Thinking.** 류희찬, 조완영, 김인수 역(2007). 고등 수학적 사고. 서울: 경문사.

예일대학(1997). Lecture Notes. http://www.stat.yale.edu/Courses/1997-98/101/ranvar.htm

프린스턴대학(2002). Lecture Notes. http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall02/cs341/lec22.pdf

# A Study on Pre-Service Teachers' Understanding of Random Variable

Choi, Jiseon (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Yun, Yong Sik (Jeju National University)
Hwang, Hye Jeang (Chosun University)

This study investigated the degree of understanding pre-service teachers' random variable concept, based on the attention and the importance for developing pre-service teachers' ability on statistical reasoning in statistics education. To accomplish this, the subject of this study was 70 pre-service teachers belonged to three universities respectively. The teachers were given to 7 tasks on random variable and requested to solve them in 40 minutes. The tasks consisted of three contents in large; 1) one was on the definition of random variables, 2) the other was on the understanding of random variables in different/diverse conditions, and 3) another was on problem solving relevant to random variable concept.

The findings are as follows. First, while 20% of pre-service teachers understood the definition of random variable correctly, most teachers could not distinguish between random variable and variable or probability. Second, there was a significant difference in understanding random variables in different/diverse conditions. Namely, the degree of understanding on the continuous random variable was superior to that of discrete random variable and also the degree of understanding on the equal distribution was superior to that of unequality distribution. Third, three types of problems relevant to random variable concept dealt with in this study were finding a sample space and an elementary event, and finding a probability value. In result, the teachers responded to the problem on finding a probability value most correctly and on the contrary to this, they had the mot difficulty in solving the problem on finding a sample space.

* Key Words : Random Variable(확률변수), Pre-Service Teacher Education(예비교사교육), Statistics Education(통계교육)

논문접수 : 2014. 1. 19
논문수정 : 2014. 2. 7
심사완료 : 2014. 2. 7

<부록> 설문 문항 내용

1. '확률변수'의 정의를 적으시오.

2. 표본공간 $S$를 $a, b, c, d, e, f$가 적혀있는 정육면체를 던져서 나온 눈이라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.

$X: S \to \mathbb{R},\ X(a)=1,\ X(b)=2,\ X(c)=3,\ X(d)=4,\ X(e)=5,\ X(f)=6$

(1) $S$를 구하시오.
(2) $\{X=1\}=\{w \mid w \in S,\ X(w)=1\}$을 구하시오.
(3) $\mathrm{P}(X=1)$을 구하시오.

3. 표본공간 $S$를 $a, a, a, b, c, d$가 적혀있는 정육면체를 던져서 나온 눈이라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.

$X: S \to \mathbb{R},\ X(a)=1,\ X(b)=2,\ X(c)=3,\ X(d)=4$

(1) $S$를 구하시오.
(2) $\{X=1\}=\{w \mid w \in S,\ X(w)=1\}$을 구하시오.
(3) $\mathrm{P}(X=1)$을 구하시오.

4. 표본공간 $S$를 $a, b, c, d, e, f$가 적혀있는 정육면체를 던져서 나온 눈이라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.

$X: S \to \mathbb{R},\ X(a)=1,\ X(b)=1,\ X(c)=1,\ X(d)=4,\ X(e)=5,\ X(f)=6$

(1) $S$를 구하시오.
(2) $\{X=1\}=\{w \mid w \in S,\ X(w)=1\}$을 구하시오.
(3) $\mathrm{P}(X=1)$을 구하시오.

5. 원형 시계에서 임의의 시간에 분침이 나타내는 수를 표본공간 $S$라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.

$X: S \to [0,\ 3],\ \ X(t)=\dfrac{t}{4}$

(1) $S$를 구하시오.
(2) $\{s \in S \mid 0 \le X(s) \le 1\}$을 구하시오.
(3) $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)$을 구하시오.

6. 원형 시계에서 1시에서 2시 30분 사이에 분침이 나타내는 수를 표본공간 $S$라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.

$X: S \to [0,\ 3],\ \ X(t)=\dfrac{t}{4}$

(1) $S$를 구하시오.
(2) $\{s \in S \mid 0 \le X(s) \le 1\}$을 구하시오.
(3) $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)$을 구하시오.

7. 원형 시계에서 1시에서 2시 사이에 분침이 나타내는 수를 표본공간 $S$라 하자. $S$에 대하여 확률변수 $X$를 다음과 같이 정의한다.

$$X: S \to [0,\ 3],\ \ X(t)=\begin{cases} t, & 0 \le t \le 3, \\ \dfrac{t-3}{3}, & 3 < t \le 12 \end{cases}$$

(1) $S$를 구하시오.
(2) $\{s \in S \mid 0 \le X(s) \le 1\}$을 구하시오.
(3) $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)$을 구하시오.