

축소 차수 외란 관측기를 이용한 이종 다개체 시스템의 협조 추종 제어

Reduced-order Disturbance Observer based Coordinated Tracking of Uncertain Heterogeneous Multi-Agent Systems

김정수, 백주훈*
(Jung-Su Kim¹ and Juhoon Back^{2,*})

¹Department of Electrical and Information Engineering, Seoul National University of Science and Technology, Seoul, Korea

²School of Robotics, Kwangwoon University, Seoul, Korea

Abstract: This paper proposes a reduced-order disturbance observer based coordinated tracking controller for uncertain heterogeneous multi-agent systems. To this end, first the control problem is converted as a robust control problem. Then, a dynamic coordinated controller is designed based on the recently proposed reduced-order disturbance observer. Simulation results are given to show the effectiveness of the proposed control scheme.

Keywords: coordinated tracking, heterogeneous multi-agent systems, disturbance observer

I. 서론

다개체 시스템(MAS: Multi-Agent System)의 상태 또는 출력 일치제를 위한 협조 제어 문제는 최근에 시스템 및 제어 이론의 주요 연구 주제 중 하나이다.

이는 다개체 시스템을 위한 협조 제어 문제를 해결하는데 필요한 이론들이 공학 및 자연 과학의 여러 분야에 등장하는 군집 현상의 동특성 해석에 사용될 수 있기 때문이다[4-6,13-18,20]. 오랫동안 다개체 시스템의 일치제를 위한 협조 제어 문제는 리더 또는 외부에서 결정하는 지령치(reference)가 없는 연구에 대해서 진행되어 왔다. 그러나 실제 응용을 위해서는 리더(leader agent)가 존재하며 전체 추종자(follower agent)들이 따라야 할 지령치를 이 리더를 통해 전해 받는 문제를 해결하는 것이 필요하다. 이러한 문제를 협조 추종이라고 한다[7-9,12] 기존의 연구에서는 리더가 입력을 가지지 않거나 또는 추종자들이 리더에 인가되는 입력을 아는 경우에 국한되었다. 또한 모든 추종자들의 동특성이 같은 경우(homogeneous multi-agent system)를 주로 다루었다.

본 논문에서는 리더가 아닌 추종자(follower agent)들의 동특성이 모두 다른 이종 다개체 시스템(heterogeneous MAS)에 대해서 리더의 입력을 추종자들이 모른다는 가정 하에서 협조 추종 제어(coordinated tracking control)를 설계한다.

이를 위해서 우선 주어진 문제를 파라미터가 불확실하며 외란이 있는 선형 시스템을 위한 강인 안정화 제어기 설계 문제로 해결할 수 있음을 보인다. 그리고 축소 차수 외란 관측기(reduced-order disturbance observer) 이론을 적용하여 그러한 강인 제어기를 설계한다[3]. 본 논문이 제안하는 협조 추종 제어기는 실제적 추종(practical tracking)을 달성한다. 완전한 추종을 달성하지 못하는 이유는 대상이 이종 다개체 시스템이고 제안하는 제어기가 공통의 내부 모델(common internal model)을 가지고 있지 않기 때문이다. 이는 협조 제어를 위한 내부 모델 정리에 의해서 설명할 수 있다[11,19].

비슷한 연구 결과가 [1]에서 보고되었는데, [1]에서는 [2]에서 제안한 외란관측기 기반 제어기가 사용되었다. 이 제어기의 차수는 추종자 동특성 차수의 두 배이며, 이로 인해 페루프 시스템의 안정도 해석 및 제어기 계수 선정 과정이 복잡하다는 단점이 있다. 본 논문에서는 이와 같은 점들을 개선하고자 축소 차수 외란관측기 이론에 기초하여 추종자 동특성 차수와 같은 차수를 갖는 제어기를 제안한다.

II. 문제 정의

다음과 같은 추종자(follower agent) N 개로 이루어진 이종 다개체 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^i &= x_{j+1}^i, & j &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n^i &= \sum_{j=1}^n \phi_j^i x_j^i + g^i (u^i + d^i), \\ y^i &= x_1^i \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $i(i=1, \dots, N)$ 는 개체를 나타내는 첨자이고 $j(j=1, \dots, n)$ 는 벡터의 요소를 나타내는 첨자이다. 예를

* Corresponding Author

Manuscript received September 4, 2014 / revised October 15, 2014 / accepted October 21, 2014

김정수: 서울과학기술대학교 전기정보공학부(jungsu@seoultech.ac.kr)

백주훈: 광운대학교 로봇학부(backhoon@kw.ac.kr)

※ 이 연구는 서울과학기술대학교 교내 학술연구비 지원으로 수행되었음.

들어 x_j^i 은 i 번째 추종자 상태 벡터의 j 번째 요소를 나타낸다. ϕ_j^i 와 g^i 는 i 번째 추종자의 미지의 파라미터이며 d^i 는 외란이다.

가정 1: 고려하는 문제가 해를 가짐을 보장하기 위해서 추종자들의 동특성에 나타나는 미지의 파라미터와 외란은 다음 조건을 만족한다고 가정한다.

- 미지의 파라미터는 $\phi_j^i \in [\phi_j^-, \phi_j^+]$ 과 $g^i \in [g^-, g^+]$ 을 만족한다($j=1,2,\dots,n, i=1,2,\dots,N$). 여기서 $\phi_j^- \leq \phi_j^+$, 이고 $0 < g^- \leq g^+$ 이다.
- $d^i(t) \in C^1$ 와 $\dot{d}^i(t)$ 는 모든 시간 t 에 대해서 알려진 상한에 의해서 유계이다.

이제 추종자들이 추종(tracking)해야 하는 리더(leader agent)를 다음과 같이 정의하며 편의상 $N+1$ 번째 추종자라고 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \bar{x}_{j+1}, & j=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j x_j + \bar{g}u, \\ \bar{y} &= \bar{x}_1, \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\bar{\phi}_j$ 와 \bar{g} 는 알고있는 파라미터이며 $g^- \leq \bar{g} \leq g^+$ 이 성립하고 $\bar{\phi}_j (j=1, \dots, n)$ 는 다음 다항식이

$$s^n - \bar{\phi}_n s^{n-1} - \dots - \bar{\phi}_1$$

안정하도록(Hurwitz) 설정된다(즉 다항식을 0으로 만드는 모든 해의 실수부가 음). 또한 $\bar{u}(t) \in C^1$ 는 리더의 입력이며 $|\bar{u}(t)|$ 와 $|\dot{\bar{u}}(t)|$ 은 항상 유한하다. 문제 설정으로 적어도 추종자 하나는 리더의 출력 정보 \bar{y} 를 받으며 추종자들은 리더의 파라미터 $\bar{\phi}_j$ 와 \bar{g} 을 알고 있다고 가정한다. 본 논문에서는 추종자들끼리 다음과 같은 상대 출력(relative output) 정보를 주고받는다 가정한다.

$$z^i = \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} (y^j - y^i).$$

앞서 언급한 바와 같이 $y_{N+1} (= \bar{y})$ 은 리더의 출력이다.

가정 2: 다음 두 가지 사실이 성립한다고 가정한다.

- G^A 는 신장 트리(spanning tree)를 포함한다.
- G^F 는 방향성이 없고 연결이 되어 있다(undirected and connected).

여기서 G^A 는 추종자와 리더 전체의 연결을 나타내는 그래프이고 G^F 는 리더를 제외한 추종자들의 연결을 나타내는 그래프이다.

가정 3: 다음과 같은 부등식을 만족하는 양의 상수 λ^- 와 λ^+ 가 존재한다.

$$0 < \lambda^- I_N \leq L^* \leq \lambda^+ I_N,$$

여기서 행렬 L^* 는 그래프 G^A 를 나타내는 라플라시안 행렬 L 의 부분 행렬이고 다음과 같은 관계를 가진다.

$$L = \begin{bmatrix} L^* & L_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L^* 는 양한정행렬(positive definite matrix)이고 L_{12} 은 적절한 상수 행렬이다.

본 논문의 목적은 다음 두 가지를 만족하게 하는 제어를 설계하는 것이다.

1) 모든 시간 $t \geq 0$ 에서 페루프 시스템의 신호들은 유한하다(bounded).

2) 주어진 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해서 다음이 만족한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^i(t) - \bar{x}(t)\| \leq \epsilon, \quad i=1, \dots, N.$$

이러한 문제를 실제적 협조 추종 문제(practical coordinated tracking problem)라고 한다. 본 논문에서는 이중 다개체 시스템에 대한 실제적 협조 추종 문제를 해결하고자 한다.

내용 전개를 위해 필요한 변수와 행렬들을 정의하는데 우선 상태 변수와 파라미터의 오차 변수를 다음과 같이 정의한다 ($i=1, \dots, N, j=1, \dots, n$).

$$\tilde{x}_j^i = x_j^i - \bar{x}_j \in R, \quad \tilde{\phi}_j^i = \phi_j^i - \bar{\phi}_j \in R.$$

또한, 다음과 같은 R^N 차원의 벡터 변수를 정의하자.

$$z = \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^N \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^N \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_j = \begin{bmatrix} \tilde{x}_j^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_j^N \end{bmatrix}.$$

여기서 \tilde{x}_j 는 추종자의 추종 오차(tracking error) 변수 \tilde{x}^i 에서 j 번째 요소들을 모두 모아 만든 벡터이다. 그리고 $R^{N \times N}$ 차원의 다음과 같은 행렬들을 정의하자.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j &= \text{diag}\{\phi_j^1, \dots, \phi_j^N\}, \quad \tilde{\Phi}_j = \text{diag}\{\tilde{\phi}_j^1, \dots, \tilde{\phi}_j^N\} \in R^{N \times N} \\ G &= \text{diag}\{g^1, \dots, g^N\}. \end{aligned}$$

또한 편의를 위해 다음과 같은 벡터를 정의한다.

$$\Psi_{x_d} := \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \mathbf{1}_N \bar{x}_j + Gd - \bar{g} \mathbf{1}_N \bar{u} (< \infty).$$

i 번째 추종자와 리더의 동특성 (1)과 (2)를 고려하면 i 번째 추종자의 추종 오차 동특성은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j^i &= \tilde{x}_{j+1}^i, & j=1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n^i &= \sum_{j=1}^n \phi_j^i \tilde{x}_j^i + \sum_{j=1}^n \tilde{\phi}_j^i \bar{x}_j + g^i u^i + g^i d^i - \bar{g}u \end{aligned} \tag{3}$$

앞에서 정의한 변수 \tilde{x}_j 를 이용하면 추종 오차 동특성 (3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j &= \tilde{x}_{j+1}, & j &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \sum_{j=1}^n \Phi_j \tilde{x}_j + Gu + \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \mathbf{1}_N \bar{x}_j + Gd - \bar{g} \mathbf{1}_N \bar{u} \\ &=: \sum_{j=1}^n \Phi_j \tilde{x}_j + Gu + \Psi_{xd}. \end{aligned} \quad (4)$$

제안하는 제어기의 원리를 설명하기 위하여 i 번째 추종자가 받는 정보는 다음과 같이 표현할 수 있음에 주목한다.

$$\begin{aligned} z^i &= \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} (y^j - y^i) = \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} \left(y^j - \bar{y} - (y^i - \bar{y}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} (\tilde{x}_1^j - \tilde{x}_1^i) = - \sum_{j=1}^N l_{ij} \tilde{x}_1^j = -L_i^* \tilde{x}_1, \end{aligned}$$

여기서 L_i^* 는 L^* 의 i 번째 행을 나타낸다. 이 z^i 를 k 번 미분한 변수를 $(z^i)^{(k)}$ 와 같이 표현하고 $(z^i)^{(0)} := z^i$ 라 하면 z^i 의 동특성은 다음과 같이 주어진다.

$$(z^i)^{(j-1)} = -L_i^* \tilde{x}_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(z^i)^{(n)} = -L_i^* \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j \tilde{x}_j + \Psi_{xd} + Gu \right)$$

이것으로부터 $i = 1, \dots, N$ 까지 N 개의 z^i 를 고려한 $z \in R^N$ 변수의 동특성을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(z)^{(j-1)} = -L^* \tilde{x}_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(z)^{(n)} = -L^* \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j \tilde{x}_j + \Psi_{xd} + Gu \right).$$

구조적인 특징으로 인해 L^* 의 역행렬이 항상 존재한다는 사실을 이용하여 위의 $(z)^{(n)}$ 동특성의 \tilde{x}_j 에

$$L^{*-1}(-z)^{(j-1)} = \tilde{x}_j$$

을 대입하면 다음과 같은 $(z)^{(n)}$ 동특성을 얻을 수 있다.

$$(-z)^{(n)} = L^* \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j (L^*)^{-1} (-z)^{(j-1)} + Gu + \Psi_{xd} \right).$$

$L^*, \Phi_j, G, \Psi_{xd}$ 때문에 이 수식은 불확실한 선형 시스템의 동특성을 나타낸다. 이러한 관찰을 바탕으로 제어 입력 설계의 원리를 설명할 수 있다. 만약 제어 입력 $u \in R^N$ 를 $(z)^{(n)}$ 동특성의 해가 다음과 같은 알고 있는 시스템의 동특성의 해에 수렴하도록 설계한다고 가정하자.

$$(-\bar{z})^{(n)} = \bar{\phi}_1(-\bar{z}) + \dots + \bar{\phi}_n(-\bar{z})^{(n-1)},$$

여기서 $\bar{\phi}_i$ 는 (2)에서 정의하였다($(-\bar{z})$ 에 대해서 식을 정리한 것은 이후에 제어기 설계 과정에서 외란 관측기 이론을 적용하기 위해서이다). 설정된 $\bar{\phi}_n$ 의 값으로 인해 \bar{z} 는 안정한 선형시스템의 해가 된다. 그러므로 설계된 u 에 의해서 다음과 같은 관계를 얻게 된다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z)^{(j-1)}(t) \approx 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

이 결과는 동일하게 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_j^i(t) - \bar{x}_j(t)| \approx 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

이것은 실제적 협조 추종 문제가 해결됨을 의미한다.

III. 축소 차수 외란 관측기 기반 협조 추종 제어기 설계

제어 입력 $u \in R^N$ 를 이와 같이 설계하기 위하여 축소 차수 외란 관측기(disturbance observer) 설계 기법에 착안하여 i 번째 추종자의 제어기를 다음과 같이 제안한다[3].

$$\dot{q}^i = A_{qr} q^i + \frac{\alpha_0}{\tau^n} B_{qr} \begin{bmatrix} u_i \\ -\frac{1}{g} z^i \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$u^i = q_1^i + \frac{\alpha_0}{\tau^n} \left(\frac{1}{g} z^i \right)$$

여기서 $q^j \in R^n$ 는 제어기의 상태 변수이고,

$$A_{qr} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{n-1}}{\tau} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_{n-2}}{\tau^2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_1}{\tau^{n-1}} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\tau^n} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{qr} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\phi}_n + \frac{\alpha_{n-1}}{\tau} \\ 0 & \bar{\phi}_{n-1} + \frac{\alpha_{n-2}}{\tau^2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \bar{\phi}_2 + \frac{\alpha_1}{\tau^{n-1}} \\ 1 & \bar{\phi}_1 + \frac{\alpha_0}{\tau^n} \end{bmatrix}$$

이다. 이 동적 제어기(dynamic controller)에서 선정해야 할 파라미터는 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \tau$ 이다.

제어기 파라미터 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ 는 다음과 같은 행렬이 (이 행렬은 이후에 페루프 시스템 해석에 등장한다)

$$M := \begin{bmatrix} 0 & I_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_N \\ -\alpha_0 \frac{1}{g} L^* G - \alpha_1 I_N - \alpha_2 I_N \dots - \alpha_{n-1} I_N \end{bmatrix} \in R^{(Nn) \times (Nn)}$$

안정한 행렬(Hurwitz matrix)이 되도록 선정해야 한다. 이 과정에서 어려운 점은 행렬 M 이 다음과 같은 불확실성을 갖는다는 것이다.

$$0 < g^- I_N \leq G \leq g^+ I_N, \quad 0 < \lambda^- I_N \leq L^* \leq \lambda^+ I_N.$$

이러한 상황을 고려하여 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ 들은 다음과 같은 과정을 통해 선정한다.

• 제어기 파라미터 선정

1. $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 들을 $s^{n-1} + \alpha_{n-1} s^{n-2} + \dots + \alpha_1$ 이 안정한 다항식이 되도록 선정한다.

2. $0 < \gamma < \gamma^*$ 인 모든 γ 에 대해서, 다항식

$$s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \gamma$$

이 안정한 행렬이 되는 $\gamma^* > 0$ 를 찾는다.

3. 조건 $\alpha_0 < \min \left\{ \gamma^*, \frac{\gamma^* \bar{g}}{\lambda_{\max}(L^*) g^+} \right\}$ 이 만족되도록

α_0 를 선정한다. (λ_{\max} 는 행렬의 최대 고유치를 의미한다.)

제어기 설계 두 번째 단계에서 충분히 작은 γ^* 를 선정하면 조건이 만족한다. 이렇게 선정한 α_i 들에 의해 다음과 같은 사실이 성립한다.

보조 정리 1: 제어기 파라미터 선정에 따라 α_i 를 선정하면 다음과 같은 대칭 양한정행렬 $P > 0$ 가 존재한다.

$$M^T P + P M = -I.$$

L^* 와 G 가 가진 불확실성에도 불구하고 기본적으로 α_0 를 충분히 작게 잡으면 행렬 M 이 안정한 행렬이 된다.

보조 정리 1의 자세한 증명은 [1,2]를 참조한다.

주목 1: 본 논문에서 제안하는 제어기의 차수는 추종자 동특성 차수와 같으며, 이는 제어기 차수가 추종자 동특성 차수의 두 배인 최근 연구 결과 [1]에 비해 여러 장점을 갖는다. 먼저, 제어기 구현에 필요한 적분기 수가 반으로 줄어들어 제어 시스템의 자원을 더 효율적으로 사용할 수 있다. 또한 전체 폐루프 시스템의 안정성을 보이는 과정이 [1]에 비하여 훨씬 간단하며, τ^* 를 선정하기 위해 필요한 계산량도 적다는 장점이 있다.

이렇게 설계된 제어기로 인한 전체 다개체 시스템의 폐루프 시스템의 안정도를 고려하기 위하여 고이득 관측기 (high gain observer, [Chapter C21, 10])의 안정도 해석에서 사용된 좌표 변환에 착안한 다음과 같은 좌표 변환을 고려하자.

$$\eta_j^i = \tau^{j-1} \left((q_1^i)^{(j-1)} - \frac{\alpha_0}{\tau^n} \frac{1}{g} (-z^i)^{(j-1)} \right), \quad j=1, \dots, n.$$

새로운 좌표계에서 i 번째 추종자의 제어 입력과 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u^i &= \eta_1^i \\ \dot{\tilde{x}}_j &= \tilde{x}_{j+1}, \quad j=1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \tilde{x}_j + Gu + \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_{j1} \tilde{x}_{j+1} Gd - \bar{g} 1_N \bar{u} \\ &=: \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \tilde{x}_j + Gu + \Psi_{xd} \\ \dot{\tau} \eta_j &= \eta_{j+1}, \quad j=1, \dots, n-1 \\ \dot{\tau} \eta_n &= -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \eta_{j+1} + \alpha_0 u - \alpha_0 \frac{1}{g} \sum_{j=1}^n \tilde{\phi}_j(z) (z)^{(j-1)} + \alpha_0 \frac{1}{g} (z)^{(n)}. \end{aligned}$$

폐루프 방정식의 마지막 식은 $(q_1^i)^{(n)}$ 을 구하고 앞에서 계산한 $(z^i)^{(n)}$ 을 이용한 후 다음과 같은 좌표 변환에 나타난 η_n 의 정의를 이용하여 구할 수 있다.

$$\dot{\eta}_n = \tau^{n-1} \left((q_1^i)^{(n)} - \frac{\alpha_0}{\tau^n} (-z^i)^{(n)} \right).$$

폐루프 시스템 (6)은 특이 섭동 이론(singular perturbation)으로 안정도 해석이 가능하지만 그 과정이 복잡하다. 따라서

본 논문에서는 특이 섭동 이론 과정을 요약하는 것에 해당하는 다음과 같은 좌표 변환을 고려한다.

$$\tilde{\eta}_j = \eta_j - \eta_j^*, \quad j=1, \dots, n.$$

여기서

$$\begin{aligned} \eta_1^* &= -G^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j \tilde{x}_j + \Psi_{xd} \right) \\ \eta_j^* &= 0, \quad j=2, \dots, n, \\ u^* &= \eta_1^* \end{aligned}$$

이다. 새로운 $\tilde{\eta}$ 좌표를 이용하면 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j &= \tilde{x}_{j+1}, \quad j=1, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \sum_{j=1}^n \tilde{\phi}_j \tilde{x}_j + G \tilde{\eta}_1 \\ \dot{\tilde{\eta}}_1 &= \tilde{\Phi}_n \tilde{\eta}_1 + \frac{1}{\tau} \tilde{\eta}_2 + G^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\tilde{\Phi}_{j-1} + \tilde{\Phi}_n \tilde{\phi}_j \right) \tilde{x}_j + G^{-1} \dot{\Psi}_{xd} \\ \dot{\tilde{\eta}}_j &= \frac{1}{\tau} \tilde{\eta}_{j+1}, \quad j=2, \dots, n-1 \\ \dot{\tilde{\eta}}_n &= -\frac{\alpha_0}{\tau} \frac{1}{g} L^* G \tilde{\eta}_1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\tau} \tilde{\eta}_{j+1}. \end{aligned}$$

여기서 $\tilde{x}_j = [\tilde{x}_j^1 \ \tilde{x}_j^2 \ \dots \ \tilde{x}_j^M]^T$ 이고 $\tilde{\eta}_j = [\tilde{\eta}_j^1 \ \tilde{\eta}_j^2 \ \dots \ \tilde{\eta}_j^M]^T$ ($j=1, \dots, n$) 이다. 이 폐루프 시스템은 다음과 같이 간단한 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \frac{1}{\tau} M + \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \end{bmatrix} G^{-1} \dot{\Psi}_{xd}$$

여기서 $\tilde{\eta} = [\tilde{\eta}_1; \tilde{\eta}_2; \dots; \tilde{\eta}_n] \in R^{nN}$, $B_3 = [I_N; 0]$,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & I_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_N \\ \tilde{\phi}_1 I_N & \tilde{\phi}_2 I_N & \tilde{\phi}_3 I_N & \dots & \tilde{\phi}_n I_N \end{bmatrix},$$

이고 행렬 A_{12} , A_{21} , \tilde{A}_{22} 는 상수나 τ 에 관한 다항식으로 이루어져있다.

정리 1: 가장 1-3이 성립하며 제어 파라미터 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ 들은 제어기 파라미터 선정에 따라 선정되었다고 가정하자. 그러면, 주어진 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해서 양수 $\tau^* > 0$ 가 존재하여 $\tau \in (0, \tau^*)$ 을 만족하는 임의의 τ 에 대해서 폐루프 시스템의 모든 신호들은 유한하며 다음 관계가 성립한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^i(t) - \bar{x}(t)\| \leq \epsilon, \quad i=1, \dots, N.$$

증명: 다음과 같은 리아프노프 함수를 고려하자.

$$V = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \tilde{\eta}^T P_2 \tilde{\eta},$$

여기서 $P_1 > 0$ 와 $P_2 > 0$ 은 각각 $P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 = -I$ 과 $P_2 M + M^T P_2 = -I$ 의 해이다. 리아프노프 함수의 시간 미분은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{x} - \frac{1}{\tau} \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \tilde{\eta}^T M(\mu^*) \tilde{\eta} + \mu^* B_{\tilde{\psi}_{xd}}^2,$$

여기서

$$M(\mu^*) := \frac{1}{2} \tilde{A}_1^T \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \frac{1}{\mu^*} P_2 B_3 G^{-1} G^{-1} B_3^T P_2,$$

$\tilde{A}_1 = 2 + P_1 A_{12}^T + 2A_{21}^T P_2$, 그리고 $\tilde{A}_2 = 2P_2 \tilde{A}_{22}$ 이며 $\mu^* > 0$ 은 미분의 상한을 구하는 과정에서 Young의 부등식 적용으로 생긴 임의의 상수이다. 또한, $B_{\tilde{\psi}_{xd}} > 0$ 는 $\|\tilde{\psi}_{xd}\| \leq B_{\tilde{\psi}_{xd}}$ 을 만족하는 상수이다.

따라서 다음을 만족하는 $\tau^* > 0$ 가 존재한다.

$$-\frac{\theta}{\tau^*} I + M(\mu^*) \leq -\frac{1}{2} I.$$

그러므로 $0 < \tau < \tau^*$ 을 만족하는 임의의 τ 에 대해서 리아프노프 함수의 미분의 상한에 대해서

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{x} - \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \mu^* B_{\tilde{\psi}_{xd}}^2 \leq -\delta V + \mu^* B_{\tilde{\psi}_{xd}}^2,$$

이 성립하며 δ 는 양의 상수이다. 이 부등식에 비교 정리 (comparison lemma) 를 적용하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있으며

$$V(t) \leq e^{-\delta t} V(0) + \frac{1}{\delta} \mu^* B_{\tilde{\psi}_{xd}}^2,$$

이 부등식은 다음을 의미한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{1}{\delta} \mu^* B_{\tilde{\psi}_{xd}}^2.$$

결과적으로, μ^* 는 임의의 상수이므로 모든 신호는 유한하다. 또한 주어진 ϵ 에 대해서 τ^* 가 존재하여 임의의 $0 < \tau < \tau^*$ 에 대해서 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^i(t) - \bar{x}(t)\| \leq \epsilon, \quad i = 1, \dots, N.$$

IV. 모의 실험

이 장에서는 제안하는 제어가 잘 동작함을 모의 실험을 통해 보인다. 그림 1은 고려하는 다개체 시스템의 연결을 나타낸다. 본문에 설명한 바와 같이 리더를 제외한 추종자들끼리는 방향성이 없이 연결(undirected and connected)되어 있으며, 리더를 포함하면 전체 그래프는 신장 트리(spanning tree)를 포함하고 있다. 이 그래프를 표현하는 라프라시안 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$L = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

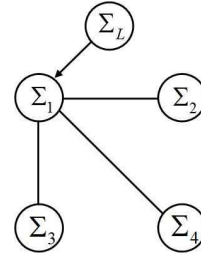


그림 1. 다개체 시스템의 연결 그래프.
Fig. 1. Network topology among agents.

표 1. 추종자 파라미터와 인가된 외란.

Table 1. Parameters of the followers and disturbances.

Agent #	ϕ_1^i	ϕ_2^i	g^i	d^i
1	-5.5	1.3	1.6	$0.3 \sin 5t$
2	-1.4	-1.5	1.3	$-0.4 \sin 10t$
3	0.75	-1.3	1.4	$-0.17 \sin 15t$
4	-1.25	-2	2.0	$0.35 \sin 20t$

표 1은 추종자들의 파라미터와 각 추종자의 동특성에 인가된 외란을 정리한다. 특별히, 추종자 1과 3은 불안정한 개루프 동특성을 가짐에 주목한다. 리더 (2)의 파라미터는 다음과 같고

$$\bar{\phi}_1 = -1.5, \quad \bar{\phi}_2 = -2.5, \quad \bar{g} = 1,$$

리더에 인가된 입력은 $\bar{u}(t) = 2 \sin t$ 으로 설정하였다. 제안하는 제어기 (5)의 파라미터는 $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\tau = 0.001$ 로 선택하였고 모의실험을 위한 초기치는 임의의 값으로 결정되었다.

그림 2와 3에서 보이듯이 제안하는 제어기는 이중 다개체 시스템의 협조 추종을 성공적으로 달성한다. 두 그림에서 처음부터 추종이 이루어진 것으로 착각할 수 있으나 그림 4에서 확인할 수 있듯이 초기 구간에서 궤적이 크게 진동한다. 확대해 보면 그림 2에서도 같은 현상을 발견할 수 있다. 이는 제안하는 제어기가 고이득 형태이기 때문이며 이러한 현상을 peaking이라고 한다. 이러한 현상이 심한 경

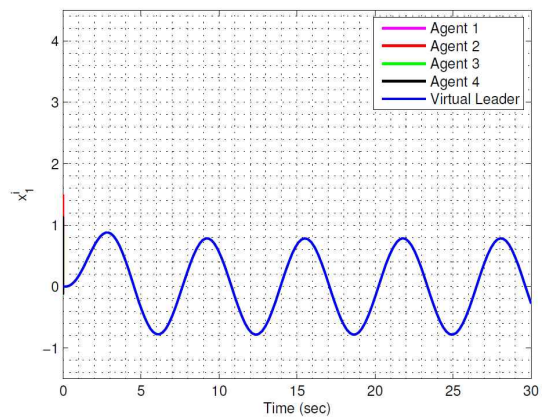


그림 2. 제어기 (5)를 사용한 x_1^i 들의 궤적.

Fig. 2. Trajectories x_1^i controlled by (5).

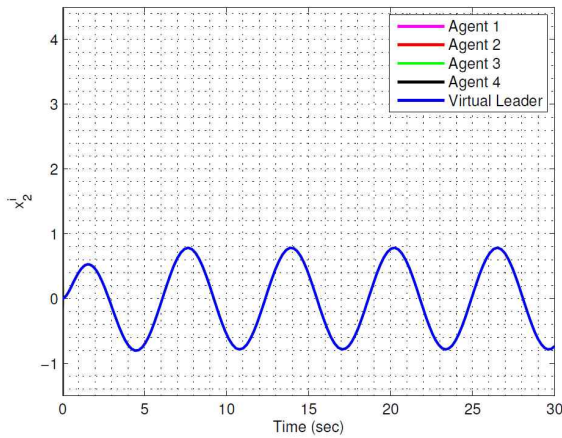


그림 3. 제어기 (5)를 사용한 x_2^i 들의 궤적.

Fig. 3. Trajectories x_2^i controlled by (5).

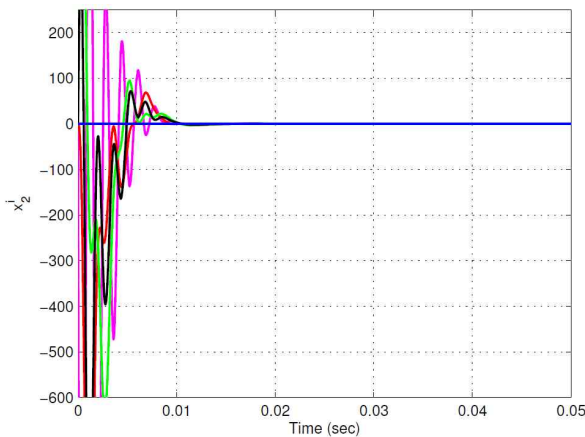


그림 4. x_2^i 궤적의 초기 구간 확대.

Fig. 4. Zoomed trajectories x_2^i in transient period.

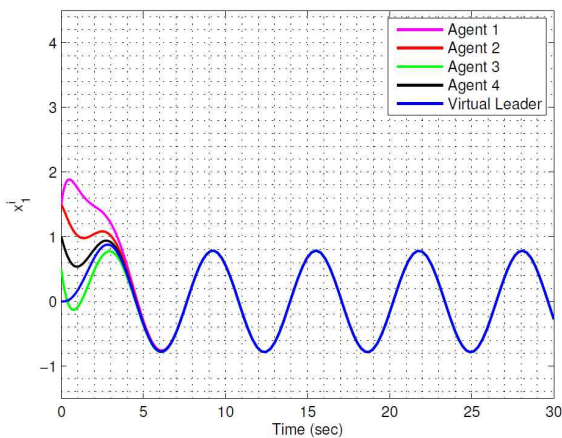


그림 5. 제어기의 출력에 제약을 가했을 때 x_1^i 궤적.

Fig. 5. Trajectories x_1^i controlled by (5) with a saturation function.

우 제어기 출력의 크기를 제한하여 문제를 해결할 수 있다 [10,1]. 그림 5는 제어기의 출력에 제약 함수($\text{sat}(u^i)$)를 적용했을 때의 x_1^i 궤적을 나타낸다.

V. 요약

본 논문에서는 축소 차수 외란 관측기를 이용하여 외란이 있는 이중 다개체 시스템을 위한 협조 추종 제어기를 제안하였다. 이를 위해 우선 주어진 제어 문제가 외란과 모델 불확실성을 가지는 시스템을 위한 강인 제어 문제로 변환될 수 있음을 보이고 변환된 문제에 외란 관측기 기반의 동적 협조 추종 제어기를 설계하였다. 모의 실험을 통해서 제안하는 이중 다개체 시스템의 협조 추종을 성공적으로 달성함을 보였다.

REFERENCES

- [1] J. Back and J.-S. Kim, "A disturbance observer based practical coordinated tracking controller for uncertain heterogeneous multi-agent systems," *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, In press, 2014.
- [2] J. Back and H. Shim, "Adding robustness to nominal output-feedback controllers for uncertain nonlinear systems: A nonlinear version of disturbance observer," *Automatica*, vol. 44, pp. 2528-2537, 2008.
- [3] J. Back, H. Shim, N. H. Jo, and J.-S. Kim, "Robust tracking by reduced-order disturbance observer: Linear case," *In 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, FL, USA, pp. 3514-3519, Dec. 2011.
- [4] Y. Cao and W. Ren, "Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, no. 1, pp. 33-48, 2012.
- [5] Y. Cao, W. Yu, W. Ren, and G. Chen, "An overview of recent progress in the study of distributed multiagent coordination," *IEEE Trans. on Industrial Informatics, Special issue on Advances in Theories and Industrial Applications of Networked Control Systems*, vol. 9, no. 1, pp. 427-438, 2013.
- [6] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, 2004.
- [7] Y. Hong, J. Hua, and L. Gao, "Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology," *Automatica*, vol. 42, pp. 1177-1182, 2006.
- [8] G. Hu, "Robust consensus tracking for an integrator-type multi-agent system with disturbances and unmodeled dynamics," *International Journal of Control*, vol. 84, no. 1, pp. 1-8, 2011.
- [9] J. Hu and G. Feng, "Distributed tracking control of leader-follower multiagent systems under noisy measurement," *Automatica*, vol. 46, no. 8, pp. 1382-1387, 2010.
- [10] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [11] H. Kim, H. Shim, and J. H. Seo, "Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems,"

- IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 56, no. 1, pp. 200-206, 2011.
- [12] Z. Li, X. Liu, W. Ren, and L. Xie, "Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 58, no. 2, pp. 518-523, 2013.
- [13] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proc. of IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007.
- [14] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control: collective group behavior through local interaction," *IEEE Control Syst. Mag.*, 27(2):2007, 2007.
- [15] L. Scardovi and R. Sepulchre, "Synchronization in networks of identical linear systems," *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2557-2562, 2009.
- [16] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back, "SConsensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach," *Automatica*, vol. 45, pp. 2659-2664, 2009.
- [17] H. L. Trentelman, K. Takaba, and N. Monshizadeh, "Robust synchronization of uncertain linear multiagent systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1511-1522, 2013.
- [18] P. Wieland, J.-S. Kim, and F. Allgöwer, "On topology and dynamics of consensus among linear highorder agents," *International Journal of Systems Science*, vol. 42, no. 10, pp. 1831-1842, 2011.
- [19] P. Wieland, R. Sepulchre, and F. Allgöwer, "An internalmodel principle is necessary and sufficient for linear output synchronization," *Automatica*, vol. 47, pp. 1068-1074, 2011.
- [20] D. Zelazo and M. Mesbahi, "Edge agreement: Graph theoretic performance bounds and passivity analysis," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 56, no. 3, pp. 554-555, 2011.

김 정 수

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제19권 제5호, 2013. 5, pp. 390-397 참고.

백 주 훈

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제19권 제5호, 2013. 5, pp. 390-397 참고.