Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2014) 20(12):1225-1230
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2014.14.0087 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

일차 다개체 시스템의 그룹 평균 상태일치와 그룹 대형 상태일치

Group Average-consensus and Group Formation-consensus for First-order Multi-agent Systems

김 재 만, 박 진 배*, 최 윤 호
(Jae Man Kim[1], Jin Bae Park[1,*], and Yoon Ho Choi[2])
[1]Department of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University
[2]Department of Electronic Engineering, Kyonggi University

Abstract: This paper investigates the group average-consensus and group formation-consensus problems for first-order multi-agent systems. The control protocol for group consensus is designed by considering the positive adjacency elements. Since each intra-group Laplacian matrix cannot be satisfied with the in-degree balance because of the positive adjacency elements between groups, we decompose the Laplacian matrix into an intra-group Laplacian matrix and an inter-group Laplacian matrix. Moreover, average matrices are used in the control protocol to analyze the stability of multi-agent systems with a fixed and undirected communication topology. Using the graph theory and the Lyapunov functional, stability analysis is performed for group average-consensus and group formation-consensus, respectively. Finally, some simulation results are presented to validate the effectiveness of the proposed control protocol for group consensus.

Keywords: group average-consensus, group formation-consensus, graph theory, multi-agent systems, Laplacian matrix

I. 서론

다개체 시스템의 협동제어(cooperative control)는 군집제어[1-3], 편대비행[4,5], 자세 동기화[6] 등의 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 그중 다개체 시스템의 상태일치 문제(consensus problem)는 최근 가장 활발히 연구가 이루어지고 있는 주제이다. 무선 네트워크 환경에서 다개체 시스템의 상태일치란 모든 개체들이 설계된 제어기를 통해 하나의 값이나 위치로 수렴함을 의미한다. 각 개체의 제어기는 자기 자신의 정보와 이웃하는 개체의 상태 정보, 개체간의 가중치 인접 성분(adjacency element)만으로 구성되며 개체간의 가중치 인접 성분은 네트워크 환경에 의해 결정된다.

다개체 시스템의 상태일치 문제는 그래프 이론(graph theory)을 바탕으로 많은 연구가 이루어져 왔으며, 그중 1차 연속/이산시간 모델에 대한 상태일치는 연구가 가장 많이 이루어진 분야이다. [7]는 이웃하는 개체의 상태정보를 오직 이산시간에 획득할 수 있는 1차 연속시간 시스템에서의 상태일치 문제를 다루었고, 양방향 그래프(undirected graph)에서 연속시간 시스템의 평균 상태일치를 위한 필요충분조건에 대한 연구도 수행되었다[8]. [9]은 이웃하는 개체들의 정보만 이용하여 속도가 일정한 1차 이산시간 모델을 다루었다. 불확실성이 있는 네트워크 환경에서의 다개체 시스템에 대한 상태일치 문제도 연구되었다. 단방향 그래프(directed graph)에서 이웃하는 개체의 정보가 불확실한 1차 이산시간 모델의 상태일치 문제를 다루었다[10].

그래프 이론을 이용한 다개체 시스템의 상태일치 연구는 또한 다른 문제들에 대해서도 다루어졌다. 시간지연을 갖는 다개체 시스템의 상태일치를 위한 충분조건을 선형 행렬부등식(LMI: Linear Matrix Inequality)을 통해 제시하였으며[11], 개체간 정보 전송이 실패할 경우 시스템의 안정성을 보장하는 제어 방법이 제안되었다[12]. [13]는 정책반복법, 강화학습, 게임이론을 바탕으로 각 개체가 최적해로 수렴하도록 하였으며, 고정된 토폴리지에서 선형 시불변 다개체 시스템의 상태일치 가능성에 대하여 연구하였다[14].

기존의 다개체 시스템의 상태일치는 대부분 모든 개체들이 하나의 위치나 값으로 수렴하도록 연구되었다. 하지만 다개체 시스템은 상황 및 목적에 따라 다양한 군집형태를 가질 수 있다. 이와 같이 상태일치가 여러 곳에서 일어나는 경우를 클러스터 일치(cluster synchronization) [15-17] 혹은 그룹 상태일치(group consensus)라고 부른다. 조화 진동자(harmonic oscillator)에 대한 클러스터 일치를 위해 분산 적응 제어기가 제안되었으며[15], [18]은 단방향 그래프에 대한 그룹 상태일치 제어방법을 제시하였다. 각 개체들은 같은 그룹 내의 이웃하는 개체들뿐만 아니라 다른 그룹의 이웃하는 개체들과도 정보를 교환한다. 따라서 각각의 제어기들은 개체들이 그룹 내 다른 개체들과 일치하도록 설계되

* Corresponding Author
Manuscript received August 14, 2014 / revised September 19, 2014 / accepted September 30, 2014
김재만, 박진배: 연세대학교 전기전자공학과
(utopiaro@yonsei.ac.kr/jbpark@yonsei.ac.kr)
최윤호: 경기대학교 전자공학과(yhchoi@yonsei.ac.kr)
※ 본 연구는 2010년도 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제 (No. 20124030200040/2)임.

Copyright© ICROS 2014

어야 하며, 기존의 다개체 시스템의 상태일치를 위한 제어기는 그룹 상태일치를 위한 제어기의 일종이라고 할 수 있다. 특히 개체들이 그룹내 평균으로 수렴하는 경우 그룹 평균 상태일치(group average-consensus)라고 불린다. 그룹 상태일치 문제에 대해 현재까지 양 인접 성분(positive adjacency element)만 갖는 그래프에 대한 연구는 전무하다. [19]과 달리 양 인접 성분은 그룹 내 개체들뿐만 아니라 다른 그룹에 있는 개체와의 연결에서도 이용된다. 따라서 [19]에서 가정한 라플라시안 행렬(Laplacian matrix)의 입력차수 균형(in-degree balance) 조건은 필요치 않다.

따라서 본 논문에서는 다개체 시스템의 그룹 상태일치를 다룬다. 개체간 연결은 그룹 내 개체뿐만 아니라 다른 그룹의 개체와도 연결되어 있기 때문에 그룹 상태일치를 위한 제어기는 이웃하는 개체들의 정보를 반영한다. 다른 그룹 개체와의 연결강도가 양의 값을 가지므로, 다개체 시스템의 안정성을 분석하기 위해 라플라시안 행렬을 그룹 내 개체간의 라플라시안 행렬과 그룹간 개체간의 라플라시안 행렬로 나눈다. 그래프 이론과 리아프노브(Lyapunov) 함수를 이용하여 다개체 시스템의 그룹 평균 상태일치와 그룹 군집 상태일치에 대한 안정성을 유도한다. 최종적으로 모의실험들을 통해 제안한 방법에 대한 우수성을 보이고자 한다.

II. 문제 설정

1. 그래프 이론

본 논문에서 개체간 통신 네트워크는 양방향 그래프 $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$로 표기한다. N개의 개체를 그래프로 표현하는 경우 $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,\cdots,v_N\}$는 노드(node)들의 집합, $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$는 노드를 연결하는 양방향 간선(edge)들의 집합, 그리고 $\mathcal{A}=[a_{ij}]$는 가중치 인접행렬(weighted adjacency matrix)을 의미한다. 만약 $(v_i,v_j)\in\mathcal{E}$이면 연결성분은 $a_{ij}=a_{ji}>0$이고, 그렇지 않으면 $a_{ij}=a_{ji}=0$이다. 노드 v_i와 이웃하는 개체들은 $\mathcal{N}_i=\{v_j\in\mathcal{V}|(v_i,v_j)\in\mathcal{E}\}$로 표현한다. 즉, v_i와 인접한 모든 노드들의 집합이다. 만약 $a_{ii}=0$으로 가정시 모든 $v_i\in\mathcal{V}$에 대하여 $\sum_{j=1}^{N}a_{ij}=\sum_{j=1}^{N}a_{ji}$를 만족하면 그래프는 균형을 이룬다. 노드간의 간선들의 가중치를 표현하는 라플라시안 행렬 $L=[l_{ij}]\in R^{N\times N}$은 다음과 같이 정의된다.

$$l_{ij}=\begin{cases}-a_{ij} & i\neq j,\\ \sum_{j=1,j\neq i}^{N}a_{ij} & i=j.\end{cases} \tag{1}$$

라플라시안 행렬 L의 중요한 성질 중 하나는 행(row)의 원소들의 합이 0이라는 것이다. 따라서 L의 고유값(eigenvalue) 0에 해당하는 고유벡터(eigenvector)는 $1_N=[1,\cdots,1]^T$이다. 고유값 중 두 번째로 작은 고유값을 대수적 연결도(algebraic connectivity)라 하며, $\lambda_2(L)$로 표현한다.

2. 다개체 시스템의 문제 정의

본 논문에서는 다음과 같은 1차 다개체 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}_i(t)=u_i(t),\qquad \forall i\in \mathrm{I}. \tag{2}$$

여기서 $x_i\in R$와 $u_i(t)\in R$는 각각 i번째 개체의 위치 상태변수와 제어입력을 의미한다. 네트워크 그래프 $\mathcal{G}$에 포함되어 있는 두 개의 부분 그래프(subgraph) $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$를 고려할 때 $n+m$개로 이루어진 개체들이 $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$에 각각 $x_{g1}=(x_1,\cdots,x_n)^T$와 $x_{g2}=(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})^T$으로 구성된다고 가정하자. 이때, 개체들의 번호를 나타내는 집합은 각각 $\mathcal{I}_1=\{1,2,\cdots,n\}$와 $\mathcal{I}_2=\{n+1,\cdots,n+m\}$으로 표시하며, 두 개의 그룹 $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$에 속한 노드들은 각각 $\mathcal{V}_1=\{v_1,\cdots,v_n\}$와 $\mathcal{V}_2=\{v_{n+1},v_{n+2},\cdots,v_{n+m}\}$로 표현된다. 따라서 네트워크 그래프 $\mathcal{G}$는 $\mathcal{I}=\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2$, $\mathcal{V}=\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2$을 만족한다. 또한 $\mathcal{N}_{1i}=\{v_j\in\mathcal{V}_1|(v_i,v_j)\in\mathcal{E}\}$, $\mathcal{N}_{2i}=\{v_j\in\mathcal{V}_2|(v_i,v_j)\in\mathcal{E}\}$이고 $\mathcal{N}_i=\mathcal{N}_{1i}\cup\mathcal{N}_{2i}$이다.

1차 다개체 시스템의 상태일치를 위한 제어입력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i(t)=k_i(x_{j1},\cdots,x_{jm}), \tag{3}$$

여기서 k_i는 제어입력의 이득값이고, $(x_{j1},\cdots,x_{jm})$는 i번째 노드와 이웃하는 노드들의 집합을 나타낸다. 일반적으로 다개체 시스템의 상태일치를 위한 제어입력은 모든 개체들이 하나의 위치나 값으로 수렴할 수 있도록 한다. 그러나 본 논문에서는 모든 개체들이 점진적으로 두 곳의 위치에서 상태일치가 이루어지는 그룹 상태일치의 제어입력을 설계하고자 한다. 따라서 하나의 위치에서 이루어지는 상태일치는 그룹 상태일치의 한 유형이라고 할 수 있다.

정의 1: 만약 개체들이 다음 조건들을 만족한다면 제어입력 (3)은 그룹 상태일치를 점진적으로 이룬다고 할 수 있다.

(1) $\lim_{t\to\infty}\| x_i(t)-x_j(t)\|=0,\ \forall i,j\in\mathcal{I}_1$

(2) $\lim_{t\to\infty}\| x_i(t)-x_j(t)\|=0,\ \forall i,j\in\mathcal{I}_2$

정의 2: i번째 개체의 초기값을 $x_i(0)$라고 하자. 만약 개체들이 다음 조건들을 만족한다면 제어입력 (3)은 그룹 평균 상태일치를 점진적으로 이룬다고 할 수 있다.

(1) $\lim_{t\to\infty}x_i(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)=0,\ \forall i\in\mathcal{I}_1$

(2) $\lim_{t\to\infty}x_i(t)=\frac{1}{m}\sum_{j=n+1}^{n+m}x_j(0)=0,\ \forall i\in\mathcal{I}_2$

이웃하는 개체들이 같은 그룹뿐 아니라 다른 그룹에도 존재한다고 하면 제어입력은 이웃하는 모든 개체들의 정보를 이용한다. 따라서 1차 다개체 시스템의 그룹 평균 상태일치를 위한 제어입력은 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$u_i(t)=\sum_{v_j\in N_{1i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\sum_{v_k\in N_{2i}}a_{ik}(x_k(t)-x_i(t))-\sum_{v_k\in N_{2i}}a_{ik}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m}x_k(0)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)\right),\qquad \forall i\in \mathrm{I1}$$

$$u_i(t)=\sum_{v_k\in N_{1i}}a_{ik}(x_i(t)-x_k(t))+\sum_{v_j\in N_{2i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\sum_{v_k\in N_{1i}}a_{ik}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m}x_k(0)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)\right),\quad \forall i\in \mathrm{I2} \quad (4)$$

여기서 $a_{ij}\geq 0,\ \forall i,j\in\mathcal{I}$이다.

참조 1: 연결성분 a_{ij}는 같은 그룹 내 개체뿐만 아니라 다른 그룹에 있는 개체와의 연결도 나타낸다. [19]와 달리 본 논문에서는 $a_{ij}\geq 0,\ i=\mathcal{I}_1,\ j=\mathcal{I}_2$를 만족한다. 따라서 [19]에서 가정한 라플라시안 행렬의 입력차수 균형이라는 조건이 없더라도 본 논문에서 제시한 제어입력은 그룹 평균 상태일치를 만족시킨다.

III. 본론

본 장에서는 1차 다개체 시스템의 그룹 평균 상태일치를 위한 안정성 분석을 한다. 제어입력 (4)에 의해 개체 중 n 개의 개체들은 $\mathcal{G}_1$의 평균에서 상태일치가 이루어지고, 나머지 m개의 개체들은 $\mathcal{G}_2$의 평균에서 상태일치가 이루어진다. 또한 개체들이 일정한 거리를 유지하면서 움직이는 그룹 대형 상태일치를 위한 제어입력도 설계한다.

1. 다개체 시스템의 그룹 평균 상태일치

1차 다개체 시스템 (2)와 제어입력 (4)를 결합하면 시스템은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{v_j\in N_{1i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\sum_{v_k\in N_{2i}}a_{ik}(x_k(t)-x_i(t))-\sum_{v_k\in N_{2i}}a_{ik}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m}x_k(0)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)\right),\quad \forall i\in\mathcal{I}_1$$

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{v_k\in N_{1i}}a_{ik}(x_i(t)-x_k(t))+\sum_{v_j\in N_{2i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\sum_{v_k\in N_{1i}}a_{ik}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m}x_k(0)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)\right),\quad \forall i\in\mathcal{I}_2 \quad (5)$$

시스템 (5)는 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t)=-Lx(t)-(c_2-c_1)L_c, \quad (6)$$

여기서 $c_1=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)$과 $c_2=\frac{1}{m}\sum_{j=n+1}^{n+m}x_j(0)$는 각각 그룹 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$의 상태변수들의 초기 평균값을 나타낸다. 라플라시안 행렬 L은 식 (1)에 정의되어 있으며, L_c는 개체들이 각 그룹의 평균으로 수렴하도록 한다. 라플라시안 행렬은 두 개의 부분 라플라시안 행렬로 나눠진다. 하나는 그룹 내 개체간 연결성분만을 고려하여 만들어진 행렬이며, 다른 라플라시안 행렬은 그룹간 개체의 연결성분으로 이루어져 있다. 분리된 라플라시안 행렬은 다음과 같이 나타낸다.

$$L=L_g+L_d,\qquad L_g=\begin{bmatrix}L_{11} & 0\\ 0 & L_{22}\end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$L_d=\begin{bmatrix}L_d^1\\ L_d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_d^{11} & L_d^{12}\\ L_d^{21} & L_d^{22}\end{bmatrix},\qquad L_c=1_{n+m}L_d,$$

여기서 L_g는 동일한 그룹 내에 있는 개체와의 연결성분으로 구성된 라플라시안 행렬이고, L_d는 다른 그룹에 있는 개체와의 연결성분으로 구성된 라플라시안 행렬이다. L_g는 또한 두 개의 행렬로 구성된다. L_{11}은 그룹 $\mathcal{G}_1$의 개체들만의 연결성분으로 구성된 행렬, L_{22}은 그룹 $\mathcal{G}_2$의 개체들만의 연결성분으로 구성된 행렬이다. L_{11}와 L_{22}는 모두 행의 원소들의 합이 0이므로, L_g의 고유값은 음수이거나 0이다.

참조 2: 일반적으로 그래프 $\mathcal{G}(\mathcal{A})$에 대한 라플라시안 행렬 L은 0을 고유값으로 가지므로 다개체 시스템의 상태일치는 $x^*=(\alpha,\cdots,\alpha)^T$의 형태가 되며, $\alpha=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)$이다. 하지만 서로 다른 두 그룹 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$에서 상태일치가 이루어지기 위해서는 라플라시안 행렬 L은 최소한 두 개의 고유값 0을 가져야 한다.

보조정리 1: 임의의 벡터 $a\in R^n$, $b\in R^m$, 그리고 행렬 M에 대하여 다음의 부등식은 성립한다.

$$-2a^TMb\leq\lim_{X,Y,Z\to\infty}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}X & (Y-I)M\\ M^T(Y^T-I) & M^TZM\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix},$$

여기서 행렬 M, Y 그리고 Z는 다음을 만족한다.

$$\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^T & Z\end{bmatrix}\geq 0.$$

정리 1: 두 그룹 $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$가 연결되어 있고 각 그룹은 스패닝 트리(spanning tree)를 만족한다고 하자. 만약 다음 부등식을 만족하는 양의 정부호 행렬 R_i, Y_i 그리고 Z_i, $i=1,2,3$가 존재한다면 1차 다개체 시스템은 제어입력 (4)에 의해 그룹 평균 상태일치를 만족시킨다.

$$\begin{bmatrix}-2\lambda_2(\Gamma_{11})I_n+Z_1+Z_2 & Y_1-\Gamma_{12}\\ \star & -2\lambda_2(\Gamma_{22})I_m+Z_3+R_1\end{bmatrix}<0, \quad (8)$$

여기서

$$\Gamma_{11}=L_{11}+L_d^{11},\qquad \Gamma_{22}=L_{22}+L_d^{22},\qquad \Gamma_{12}=L_d^{12} \quad (9)$$

이며, $\lambda_2(\Gamma_{11})$는 그룹 $\mathcal{G}_1$의 대수적 연결도, $\lambda_2(\Gamma_{22})$는 그룹 $\mathcal{G}_2$의 대수적 연결도를 의미한다.

증명: 1차 다개체 시스템에 대한 그룹 평균 상태일치를 보이기 위해 오차 방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$e_i(t)=x_i(t)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0),\quad \forall i,j\in I_1,\qquad e_i(t)=x_i(t)-\frac{1}{m}\sum_{j=n+1}^{n+m}x_j(0),\quad \forall i,j\in I_2, \quad (10)$$

여기서 e_i는 i번째 개체와 그룹의 평균과의 오차이다. 평균 상태일치의 목적은 오차 벡터 e_i를 점진적으로 0으로 수렴

시키는 것이다. 리아브노브 함수를 다음과 같이 고려하자.

$$V(t)=e_{g1}(t)^{T}e_{g1}(t)+e_{g2}(t)^{T}e_{g2}(t), \tag{11}$$

여기서 $e_{g1}=[e_1,\cdots,e_n]^T$와 $e_{g2}=[e_{n+1},\cdots,e_{n+m}]^T$은 각각 그룹 $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$의 오차벡터들을 나타낸다. 오차 방정식 (10)을 이용하여, 함수 $V(t)$의 미분을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= 2e_{g1}^{T}(t)\dot{e}_{g1}(t)+2e_{g2}^{T}(t)\dot{e}_{g2}(t)\\ &= -2e_{g1}^{T}(t)\{L_{11}+L_d^{11}\}e_{g1}(t)-2e_{g2}^{T}(t)\{L_{22}+L_d^{22}\}e_{g2}(t)\\ &\quad -2e_{g1}^{T}(t)L_d^{12}e_{g2}(t)-2e_{g2}^{T}(t)L_d^{21}e_{g1}(t),\end{aligned} \tag{12}$$

보조정리 1을 이용하면 식 (12)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\le -2\lambda_2(\Gamma_{11})e_{g1}^{T}(t)e_{g1}(t)-2\lambda_2(\Gamma_{22})e_{g2}^{T}(t)e_{g2}(t)\\ &\quad -2e_{g1}^{T}(t)\Gamma_{12}e_{g2}(t)-2e_{g2}^{T}(t)\Gamma_{21}e_{g1}(t)\\ &\le \zeta^{T}(t)\Omega\zeta(t),\end{aligned} \tag{13}$$

여기서 $\zeta=\begin{bmatrix}e_{g1}^T & e_{g2}^T\end{bmatrix}$이며, 행렬 Ω는 다음과 같다.

$$\Omega=\begin{bmatrix}-2\lambda_2(\Gamma_{11})I_n+X_1+Q_1 & (Y_1-I)\Gamma_{12}+S_1\\ \star & -2\lambda_2(\Gamma_{22})I_m+R_1+X_2\end{bmatrix},$$

$$Q_1=\Gamma_{21}^{T}Z_2\Gamma_{21},\quad R_1=\Gamma_{12}^{T}Z_1\Gamma_{12},\quad S_1=\Gamma_{21}^{T}(Y_2^{T}-I). \tag{14}$$

따라서 부등식 (8)이 만족된다면 1차 다개체 시스템은 그룹 평균 상태일치가 이루어진다. ■

다음 절에서는 개체들이 각 그룹의 평균으로 상태일치되는 것이 아니라 그룹간 원하는 거리를 유지한 채 상태일치가 이루어지는 그룹 대형 상태일치를 위한 제어입력 설계 및 안정성 증명에 대한 내용을 서술한다.

2. 다개체 시스템의 그룹 대형 상태일치

1차 다개체 시스템 (2)에 대하여 그룹 대형 상태일치를 위한 제어입력은 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$u_i(t)=\begin{cases}\sum_{v_j\in N_{1i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\sum_{v_k\in N_{2i}}a_{ik}(x_k(t)-x_i(t)-d),\\ \sum_{v_j\in N_{2i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\sum_{v_k\in N_{1i}}a_{ik}(x_i(t)-x_k(t)-d),\end{cases} \tag{15}$$

여기서 d는 두 그룹 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$간 원하는 거리를 나타낸다. 각 제어입력들은 같은 그룹 내에 있는 개체들의 정보뿐만 아니라 다른 그룹에 있는 이웃하는 개체의 정보들을 이용하며 모든 연결성분들은 음이 아닌 값을 갖는다.

주어진 제어입력 (15)을 이용하여 1차 다개체 시스템 (2)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_i(t)=\begin{cases}\sum_{v_j\in N_{1i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))\\ \quad+\sum_{v_k\in N_{2i}}a_{ik}(x_k(t)-x_i(t)-d), & i\in I_1,\\ \sum_{v_j\in N_{2i}}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))\\ \quad+\sum_{v_k\in N_{1i}}a_{ik}(x_i(t)-x_k(t)-d), & i\in I_2.\end{cases} \tag{16}$$

그룹 대형 상태일치를 위한 오차 방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}e_i(t)&=x_i(t)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0), && \forall i,j\in I_1,\\ e_i(t)&=x_i(t)-\frac{1}{m}\sum_{j=n+1}^{n+m}x_j(0), && \forall i,j\in I_2,\\ e_3(t)&=\frac{1}{m}\sum_{j=n+1}^{n+m}x_j(0)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(0)-d,\end{aligned} \tag{17}$$

여기서 $e_i(t)$는 각 그룹의 평균값과 i번째 개체와의 오차를 의미하며, $e_3(t)$는 두 그룹간의 거리 오차를 의미한다. 그룹 대형 상태일치의 목적은 오차벡터 $e_i(t)$와 $e_3(t)$를 0으로 수렴하게 하는 것이다.

정리 2: 두 그룹 $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$가 연결되어 있고 각 그룹은 스패닝 트리(spanning tree)를 만족한다고 하자. 만약 다음 부등식을 만족하는 양의 정부호 행렬 R_i, Y_i 그리고 Z_i, $i=1,2,3$가 존재한다면 1차 다개체 시스템은 제어입력 (15)에 의해 그룹 대형 상태일치를 만족시킨다.

$$\begin{bmatrix}\Psi_1 & Y_1-Y_{12} & Y_2-Y_{13}\\ \star & \Psi_2 & Y_3-Y_{23}\\ \star & \star & -2\lambda_2(Y_{33})+R_2+R_3\end{bmatrix}<0, \tag{18}$$

여기서

$$\begin{aligned}\Psi_1&=-2\lambda_2(Y_{11})I_n+Z_1+Z_2,\\ \Psi_2&=-2\lambda_2(Y_{22})I_m+Z_3+R_1,\\ Y_{11}&=L^1+L_d^{11}-\frac{1}{n}(1_n1_n^{T}L_d^{11}),\\ Y_{22}&=L^2-L_d^{22}+\frac{1}{m}(1_m1_m^{T}L_d^{22}),\\ Y_{33}&=\frac{1}{n}(1_n^{T}L_d^{11}1_n)-\frac{1}{m}(1_m^{T}L_d^{22}1_m),\\ Y_{12}&=L_d^{12}+\frac{1}{m}(1_m1_m^{T}L_d^{21})^{T}-(L_d^{21})^{T}-\frac{1}{n}(1_n1_n^{T}L_d^{12}),\\ Y_{13}&=\frac{1}{n}(1_n1_n^{T}L_d^{11}1_n)-\frac{1}{m}(1_m^{T}L_d^{21})^{T}\\ &\quad-(L_d^{11}1_n)-\frac{1}{n}(1_n^{T}L_d^{11})^{T},\\ Y_{23}&=\frac{1}{m}(1_m1_m^{T}L_d^{22}1_m)-\frac{1}{m}(1_m^{T}L_d^{22})^{T}\\ &\quad-L_d^{22}1_m-\frac{1}{n}(1_n^{T}L_d^{22})^{T}.\end{aligned} \tag{19}$$

증명: 다음과 같은 리아브노프 함수를 고려하자.

$$\begin{aligned}V(t)&=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t),\\ V_1(t)&=e_{g1}^{T}(t)e_{g1}(t),\\ V_2(t)&=e_{g2}^{T}(t)e_{g2}(t),\\ V_3(t)&=e_3^{T}(t)e_3(t).\end{aligned} \tag{20}$$

보조정리 1과 오차 방정식 (17)을 이용하여, 함수 $V(t)$의 미분을 계산하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(t)\le\xi^{T}(t)\begin{bmatrix}\Lambda_1(Y_1-I)Y_{13} & (Y_3-I)Y_{13}\\ \star & \Lambda_2 & (Y_2-I)Y_{23}\\ \star & \star & -2\lambda_2(Y_{33})+R_2+R_3\end{bmatrix}\xi(t), \tag{21}$$

여기서 $\xi=\begin{bmatrix}e_{g1}^T & e_{g2}^T & e_{g3}^T\end{bmatrix}$이고,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -2\lambda_2(Y_{11})I_n + X_1 + X_2, \\ \Lambda_2 &= -2\lambda_2(Y_{22})I_m + X_2 + R_1, \\ R_1 &= \Gamma_{12}^T Z_1 \Gamma_{12}, \quad R_2 = \Gamma_{13}^T Z_3 \Gamma_{13}, \quad R_3 = \Gamma_{23}^T Z_2 \Gamma_{23} \end{aligned} \tag{22}$$

이다. 따라서 부등식 (18)이 만족된다면 제어 입력 (15)에 의해 1차 다개체 시스템의 그룹 대형 상태일치에 대한 안정성이 보장된다. ■

IV. 모의 실험

본 장에서는 제안한 방법의 우수성을 보이기 위해 모의실험을 하였다. 먼저 그룹 상태일치에 대한 모의실험을 위해 그림 1과 같이 8개의 개체를 갖는 고정된 네트워크를 고려한다. 그림 1에서 실선은 같은 그룹에 있는 개체들간의 연결을 나타내며, 점선은 다른 그룹에 있는 개체와의 연결을 나타낸다. 개체 1~4는 그룹 $\mathcal{G}_1$에 속하며 개체 5~8은 그룹 $\mathcal{G}_2$에 속한다 하자. 만약 $v_j, v_i \in \mathcal{E}$이면 개체간 연결강도는 1이고 그렇지 않다면 연결강도는 0이다. 개체들의 초기값은 $x(0) = [0,2,3,3,6,8,5,5]$로 설정하였다. 다개체 시스템 (2)와 제어입력 (4)에 의한 그룹 평균 상태일치에 대한 결과는 그림 2와 같다. $\mathcal{G}_1$에 속한 개체들은 그룹의 초기 평균값인 2에서 상태일치가 이루어지며, $\mathcal{G}_2$에 속한 개체들은 그룹의 초기 평균값인 6에서 상태일치가 이루어진다. 모의실험과 같이 제어입력 (4)에 의해 1차 다개체 시스템은 그룹 평균 상태일치가 이루어지는 것을 확인할 수 있었다.

그룹 대형 상태일치에 대한 모의실험을 수행하기 위해 다개체 시스템의 조건들은 그룹 평균 상태일치 모의실험의

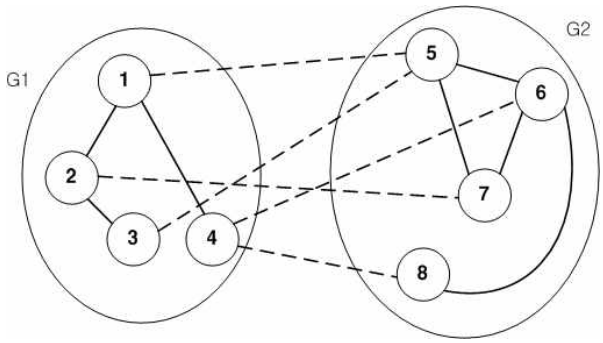


그림 1. 양방향 네트워크 토폴로지.
Fig. 1. Undirected network topology.

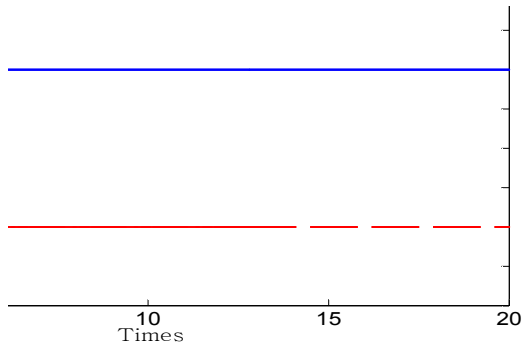


그림 2. 그룹 평균 상태일치에 대한 상태궤적.
Fig. 2. State trajectories for group average-consensus.

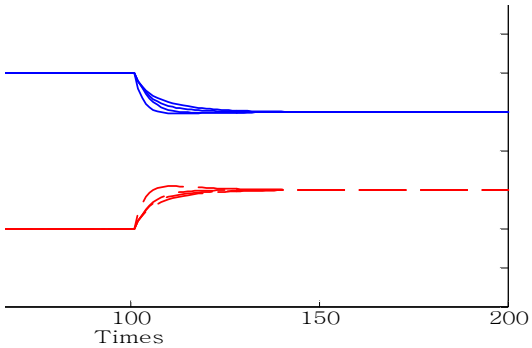


그림 3. 그룹 대형 상태일치에 대한 상태궤적.
Fig. 3. State trajectories for group formation-consensus.

조건들과 동일하게 하였다. 두 그룹 $\mathcal{G}_1$과 $\mathcal{G}_2$가 제어입력 (15)에 의해 원하는 거리를 유지하는지 확인하기 위해 먼저 100초 동안은 그룹 평균상태일치를 보인 후, 이후 100초 동안은 그룹간 거리가 $d=2$을 유지한 채 그룹 대형 상태일치가 이루어지도록 한다. 그림 3에서 볼 수 있듯이 다개체 시스템은 그룹 평균 상태일치를 보인 후 $d=2$가 되는 움직임을 보였다. 위의 모의실험을 통해 제어 입력 (18)이 그룹 대형 상태일치를 이루는 것을 확인할 수 있었다.

V. 결론

본 논문에서는 양방향 그래프에서 1차 다개체 시스템의 그룹 평균 상태일치와 그룹 대형 상태일치에 대한 문제를 각각 다루었다. 그룹 평균 상태일치와 그룹 대형 상태일치를 위한 제어입력을 설계하였으며, 다개체 시스템의 상태일치에 대한 안정도 분석도 하였다. 특히 개체간 연결성분이 $a_{ij} \geq 0$ 조건에서도 제어입력의 설계를 통해 그룹 상태일치를 이끌어냈다. 본 논문에서 제안한 방법의 유효성을 보이기 위해 그룹 평균 상태일치와 그룹 대형 상태일치에 대한 모의실험을 수행하여 성능을 검증하였다.

REFERENCES

[1] W. Dong, "Robust formation control of multiple wheeled mobile robots," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 62, no. 3, pp. 547-565, June 2011.

[2] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and co-operative control of vehicle formations," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, Sep. 2004.

[3] P. Lin and Y. Jia, "Distributed rotating formation control of multi-agent systems," *Systems and Control Letters*, vol. 59, no. 10, pp. 587-595, Oct. 2010.

[3] Y. Liu and Y. Jia, "An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems" *Systems and Control Letters*, vol. 61, no. 1, pp. 148-154, Jan. 2012.

[4] W. Dong, "Flocking of multiple mobile robots based on backstepping," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. B, Cybern.*, vol. 41, no. 2, pp. 414-424, Apr. 2011.

[5] W. Yu, G. Chen, G, and M. Cao, "Distributed lead-

er-follower flocking control for multi-agent dynamical systems with time-varying velocities," *System and Control Letters*, vol. 59, no. 9, pp. 543-552, Sep. 2010.

[6] A. Abdessameud and A. Tayebi, "Attitude synchronization of a group of spacecraft without velocity measurements," *IEEE. Trans. Autom. Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2642-2648, Nov. 2009.

[7] J. Almeida, C. Silvestre, and A. M. Pascoal, "Continuous-time consensus with discrete-time communications," *System and Control Letters*, vol. 61, no. 7, pp. 788-796, Jul. 2012.

[8] L. Cao, Y. Zheng, and Q. Zhou, "A necessary and sufficient condition for consensus of continuous-time agents over undirected time-varying networks," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 56, no. 8, pp. 1915-1920, Aug. 2011.

[9] T. Vicsek, A. Czirook, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, "Novel type of phase transition in a system of self-derived particles," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 6, pp. 1226-1229, Aug. 1995.

[10] M. Huang and J. H. Manton, "Stochastic consensus seeking with noisy and directed inter-agent communication: fixed and randomly varying topologies," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 55, no. 1, pp. 235-241, Jan. 2010.

[11] J. Wu and Y. Shi, "Consensus in multi-agent systems with random delays governed by a Markov chain," *System and Control Letters*, vol. 60, no. 10, pp. 863-870, Oct. 2011.

[12] J. M. Kim, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Leaderless and leader-following consensus for heterogeneous multi-agent systems with random link failures," *IET Control Theory and Applications*, vol. 8, no. 1, pp. 51-60, Jan. 2013.

[13] K. G. Vamvoudakis, F. L. Lewis, and G. R. Hudas, "Multi-agent differential graphical games: online adaptive learning solution for synchronization with optimality," *Automatica*, vol. 48, no. 8, pp. 1598-1611, Aug. 2012.

[14] C. Ma and J. Zhang, "Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 55, no. 5, pp. 1263-1268, May 2010.

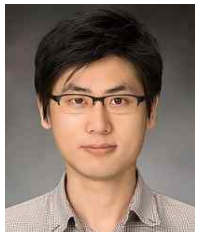
[15] H. Su, M. Z. Q. Chen, X. Wang, H. Wang, and N. V. Valeyev, "Adaptive cluster synchronization of coupled harmonic oscillators with multiple leaders," *IET Control Theory and Applications*, vol. 7, no. 5, pp. 765-772, Mar. 2013.

[16] W. Wu, W. Zhou, and T. Chen, "Cluster synchronization of linearly coupled complex networks under pinning control," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 56, no. 4, pp. 829-839, Apr. 2009.

[17] W. Xia and M. Cao, "Clustering in diffusively coupled networks," *Automatica*, vol. 47, no. 11, pp. 2395-2405, Nov. 2011.

[18] J. Yu and L. Wang, "Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange," *International Journal of Systems Science*, vol. 43, no. 2, pp. 334-348, Feb. 2012.

[19] J. Yu and L. Wang, "Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays," *Systems and Cotrol Letters*, vol. 59, no. 6, pp. 340-348, June 2010.



김 재 만

2005년 연세대학교 전기전자공학과(공학사). 2007년 연세대학교 전기전자공학과(공학석사). 2007년~현재 연세대학교 전기전자공학과 박사과정. 관심분야는 시간지연, 비선형 제어, 상태일치 제어.

박 진 배

1977년 연세대학교 전기공학과(공학사). 1985년 Kansas 주립대학교 전기공학과(공학석사). 1990년 Kansas 주립대학교 전기공학과(공학박사). 1992년~현재 연세대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인 제어, 필터, 비선형 제어, 로보틱스, 퍼지이론, 신경망 회로 이론. 2006년~2010년 국제저널 International Journal of Control, Automation, and Systems (IJCAS)의 Editor-in-Chief 역임. 2013년 제어・로봇・시스템학회 회장 역임.

최 윤 호

1980년 연세대학교 전기공학과(공학사). 1982년 연세대학교 전기공학과(공학석사). 1991년 연세대학교 전기공학과(공학박사). 1993년~현재 경기대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 비선형 적응 제어, 지능 제어, 다개체 군집 제어, 로보틱스, 웨이블릿 변환 및 응용, ADP 기반 최적 제어.