

확장 해밀턴 이론에 근거한 탄점소성 시스템의 시간유한요소해석법

A Temporal Finite Element Method for Elasto-Viscoplasticity through the Extended Framework of Hamilton's Principle

김진규*
Kim, Jin-Kyu

Abstract

In order to overcome the key shortcoming of Hamilton's principle, recently, the extended framework of Hamilton's principle was developed. To investigate its potential in further applications especially for material non-linearity problems, the focus is initially on a classical single-degree-of-freedom elasto-viscoplastic model. More specifically, the extended framework is applied to the single-degree-of-freedom elasto-viscoplastic model, and a corresponding weak form is numerically implemented through a temporal finite element approach. The method provides a non-iterative algorithm along with unconditional stability with respect to the time step, while yielding whole information to investigate the further dynamics of the considered system.

Keywords : Variational formalism, Numerical method, Elasto-viscoplasticity, Non-iterative method, Unconditionally stable algorithm

1. 서론

과거 연구를 통해, 동역학에 관한 새로운 변분이론인 확장 해밀턴 이론이 정립되었고¹⁾, 현재 탄성, 점소성 연속체에 대해 그 적용 알고리즘이 제안되어 있다. 이 이론의 큰 장점은 그 원리가 매우 간단해 적용이 쉽다는 것이다. 곧, 확장 해밀턴 이론은 해밀턴 이론^{2,3)}의 가장 큰 문제점인 적절한 초기치 (initial conditions) 사용을 혼합변수의 사용과(mixed formulation) 초기치의 순차적 적용을 통해 해결함으로써 시공간(space-time)에 대해 유한요소를 적용시킬 수 있는 variational weak form을 제공한다.

해밀턴 이론은 그 근원이 태양계 행성의 움직임을 하나의 범함수(functional)로 나타내고자한 천체

물리학이 시발점으로, 오랫동안 수물리학을 비롯한 여러 분야에 걸쳐 중요하게 쓰이고 있다⁴⁻⁸⁾. 하지만, 해밀턴 이론은 두 가지의 큰 이론적 약점이 있다. 첫째, 해밀턴 이론은 end-point constraints의 조건을 가지고 있는데, 이는 범함수의 변분(variation)에 대한 제한 조건으로 시간 간격의 매 끝점에(end points of the time interval) 대한 변분은 없다는 것이다. 곧, 시간 간격의 처음과 마지막에 동적 시스템의 위치는 알려져 있다고 보는 것으로, 이는 대부분 동적 문제가 주어진 초기치에 대해 마지막 시간까지 어떻게 변화하는지를 살펴보는 것에 비취 적절치 않음을 알 수 있다. 둘째, 여러 실제적 현상들(phenomenological models)은 종종 수학적으로 에너지 비보존계로 모델링되는 데, 이 에너지 비보존계(non-conservative system)를 해밀턴 이론은 직접 다룰 수 없다. 별도의 범함수인 Rayleigh's dissipation⁹⁻¹³⁾을 통해 에너지 비보존계를 다룰 수 있으나, 이는 하나의 범함수로 경계치 문제를

* 정회원, 고려대학교 건축사회환경공학부 연구교수
Korea University, School of Civil, Environmental and Architectural Engineering
Tel: 02-3290-3833 Fax: 02-921-2439
Email: jk295@korea.ac.kr

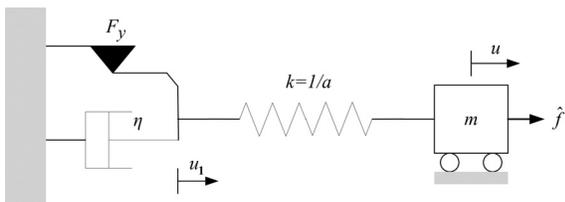
(boundary value problems) 정의하는 다른 정역학의 변분이론(Principle of virtual work, Principle of minimum total potential energy, etc.)과는 다른 해밀턴 이론이 지닌 한계라 할 수 있다.

과거 해밀턴 이론의 단점을 극복하고자 한 대표적인 연구로는, 합성적분(convolution)을 적용한 연구¹⁴⁾⁻¹⁶⁾와 fractional derivative(non-integer order differentiation)를 적용한 연구 등이¹⁷⁾⁻²¹⁾ 있다. 하지만, 합성적분을 적용한 Tonti의 접근은¹⁶⁾ 초기값이 0이 아닌 경우는 제대로 적용할 수 없는 어려움이 있고, Gurtin의 방법은^{14),15)} 초기치 문제(initial-value problem)를 등가의 경계치 문제(equivalent boundary-value problem)로 환원시킴으로 완전한 strong form을 회복할 수 없는 단점이 있다. 또한, fractional derivative를 적용한 어떤 연구도 가장 간단한 경우인 선형 탄성 단자유도계에 관해서조차도 검증된 바가 없다.

본 논문은 해밀턴 이론의 적절한 초기치 사용 문제를 해결한 확장해밀턴 이론의 향후 구조체 및 연속체의 재료 비선형문제에 대한 적용성을 살펴봄을 목적으로, 이를 위해 가장 기본적인 탄점소성 단자유도계에 확장 해밀턴이론을 적용, 시간에 대한 유한요소 수치해석법을 이끌어 내었고, 기본적인 수치해석법의 특징과 그 방법의 적절성을 알고리즘 분석과 수치해석 예제를 통해 검증하였다.

2. 확장해밀턴 이론의 적용

2.1 탄점소성 단자유도계



<Fig. 1> Single degree of freedom elasto-viscoplastic model

<Fig. 1>의 탄점소성 단자유도계는 질량 m 과 연결된 선형 탄성 단자유도계(harmonic oscillator)와 스프링의 내력이 항복 강도 F_y 를 넘어서는 때 이를

규제하는 슬라이더 부분의 두 부분이 직렬로 조합된 것이다. 곧, 선형 탄성 단자유도계의 스프링의 내력이 F_y 를 넘어서는 힘은 점성(viscosity) η 에 의해 소산되며, 이 탄점소성 단자유도계의 운동방정식과 변위는 다음의 식으로 표현되며,

$$m\ddot{u} + k(u - u_1) = \hat{f} \tag{1}$$

$$u = u_1 + F/k \tag{2}$$

초기조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u(0) = u_0; \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \tag{3}$$

(1)-(2)식에서, u, u_1, F 는 각각 질량 m 의 전체 변위, 슬라이더의 변위, 스프링 내력을 의미하며, k 와 \hat{f} 는 스프링 상수(stiffness)와 외력을 나타낸다.

확장 해밀턴 이론은 <Fig. 1>의 운동방정식을 두 가지 범함수인 action A 와 Rayleigh's dissipation ϕ 을 다음과 같이 혼합변수인 변위 u 와 스프링내 힘의 충격량(impulse) J 로 정의해 이끌어낸다.

$$A = \int_0^T L(u, \dot{u}, J) dt \tag{4}$$

$$\phi = \frac{1}{2\eta} \langle \| \dot{J} \| - F_y \rangle^2 \tag{5}$$

(4)식에서, Lagrangian L 은 다음식과 같고,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} a J^2 - Ju + \hat{f} u \tag{6}$$

a 는 스프링 상수의 역수로, 스프링의 연성(flexibility)을 나타낸다. 또한, (5)식의 $\langle \cdot \rangle$ 는 Macaulay bracket을 $\| \cdot \|$ 은 절대값을 의미한다.

확장 해밀턴 이론은 (4)식의 변분(first variation)을 다음과 같이 정의하는 데,

$$\delta A = -\delta \int_0^T L d\tau + \int_0^T \frac{\partial \phi}{\partial J} \delta J d\tau + \hat{p} \delta u|_0^T - \hat{u}_1 \delta J|_0^T = 0 \tag{7}$$

여기서, $\frac{\partial \phi}{\partial J}$ 은 슬라이더의 소성 변형률(plastic strain rate) \dot{u}_1 을 나타내며 이는 부호함수(signum function) sgn 로 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{u}_1 = \frac{\partial \phi}{\partial J} = \frac{1}{\eta} \langle \| \dot{J} \| - F_y \rangle sgn(\dot{J}) \tag{8}$$

(7)식에서 더해지는 항인 $\hat{p} \delta u|_0^T$ 에서 \hat{p} 은 정해지지 않은 미지의 값으로 초기와 마지막 시간에서의

모멘텀($\hat{p}=m\dot{u}$)을 $\hat{u}_1 \delta J_0^T$ 에서 \hat{u}_1 은 정해지지 않은 미지의 값으로 초기와 마지막 시간에서의 슬라이더의 변위를 나타낸다.

이것은 탄점소성 단자유도 시스템이 정해지지 않은 하나의 초기값인 $(u(0), \hat{p}(0), \hat{u}_1(0))$ 과 정해지지 않은 하나의 마지막값인 $(u(T), \hat{p}(T), \hat{u}_1(T))$ 으로 움직이게 제한하는 역할을 한다. 여기에, 정해지지 않은 초기값 $(u(0), \hat{p}(0), \hat{u}_1(0))$ 을 주어진 초기값인 $(u_0, \dot{u}_0, u_1(0))$ 이 다음과 같이 순차적으로 부가된다고 간주함으로

$$\hat{p}(0)=m\dot{u}_0; \hat{u}_1(0)=u_1(0) \quad (9)$$

$$u(0)=u_0; \text{ 혹은 } \delta u(0)=0 \quad (10)$$

확장해밀턴 이론은 초기값을 적절히 사용할 수 있다. 곧, (9)식과 (10)식은 (7)식에 더해 암묵적으로 사용되며, (10)식의 $\delta u(0)=0$ 은 (7)식에 명백하게 나타날 필요가 없다.

(7)식이 제대로 (1)-(2)식을 나타내는지를 확인코자, (5)식과 (6)식을 (7)식에 대입하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_0^T \{-m\dot{u}\delta\dot{u} + J\delta u - \hat{f}\delta u\} d\tau \quad (11) \\ & - \int_0^T \{aJ\delta\dot{J} - u\delta\dot{J} - \hat{u}_1\delta J\} d\tau \\ & + \hat{p}\delta u|_0^T - \hat{u}_1\delta J_0^T = 0 \end{aligned}$$

(11)식에 부분적분(integration by parts)을 적용하면, 다음의 식을 갖는다.

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_0^T \{m\ddot{u} + J - \hat{f}\} \delta u d\tau \quad (12) \\ & + \int_0^T \{a\ddot{J} - \dot{u} + \dot{u}_1\} \delta J d\tau \\ & + (\hat{p} - m\dot{u})\delta u|_0^T + (u - a\dot{J} - \hat{u}_1)\delta J_0^T = 0 \end{aligned}$$

(12)식에서 시간간격 $(0, T)$ 내에 임의로 변하는 변분값 δu 및 δJ 를 고려하면, 다음의 두 식이 성립함을 알 수 있다.

$$m\ddot{u} + J - \hat{f} = 0; \quad a\ddot{J} - \dot{u} + \dot{u}_1 = 0 \quad (13)$$

(13)식에서, 스프링 내의 힘 J 이 다음의 식으로

$$J = \frac{1}{a}(u - u_1) = k(u - u_1) \quad (14)$$

표현됨을 감안하면, 확장 해밀턴 이론에서 (1)식이 성립함을 알 수 있다. 또한, (2)식의 변형률식

(rate-constitutive relation)도 동시에 성립함을 확인할 수 있다.

2.2 시간에 대한 유한요소 수치해석법

식(11)은 탄점소성 시스템에 있어 시간에 대한 다양한 유한요소 해석법 개발에 단초가 된다. 곧, 변분항(variational term)을 가상 필드(virtual field)로 변분항이 아닌 항을 실제 필드(real field)로 간주하면, (11)식은 가상일의 원리가 혼합변수를 통해 적용됨을 알 수 있다: 곧, (11)식과 동등한 (12)식에서 보듯, (11)식은 탄점소성 단자유도계의 운동방정식과 rate-constitutive relation을 동시에 만족시키며, 가상 필드와 실제 필드는 같은 연속성 요구조건(temporal continuity requirement)을 갖는다.

(11)식을 통해 개발될 수 있는 여러 가지 시간에 대한 유한요소 수치해석법 중, 본 논문의 해석법은 주요변수에 대해 근사 차수를 달리한 방법을 통해 개발되었다.

2.2.1 혼합변수의 근사

먼저, (11)식은 하나의 균일한 time-step h 를 통해 시간간격 (t_{r-1}, t_r) 에 대한 변분 δA_r 로 다음과 같이 표현된다(곧, $h = t_r - t_{r-1}$).

$$\delta A = \sum_{r=1}^N \delta A_r \quad (15)$$

곧, (14)식에서 δA_r 은 다음을 의미하며,

$$\begin{aligned} \delta A_r = & \int_{t_{r-1}}^{t_r} \{-m\dot{u}\delta\dot{u} + J\delta u - \hat{f}\delta u\} d\tau \quad (16) \\ & - \int_{t_{r-1}}^{t_r} \{aJ\delta\dot{J} - u\delta\dot{J} - \hat{u}_1\delta J\} d\tau \\ & + \hat{p}\delta u|_{t_{r-1}}^{t_r} - \hat{u}_1\delta J|_{t_{r-1}}^{t_r} \end{aligned}$$

(16)식의 $\delta\phi_r$ 은 $\dot{u}_1\delta J$ 를 나타내며, 이는 하나의 time-step내의 시간 $\tau(t_{r-1} < \tau < t_r)$ 에 대한 주요변수인 J 와 δJ 가 최소 연속성 요구조건을 만족시키는 다음과 같이 근사시키고,

$$J(\tau) \approx \frac{1}{h} [t_r - \tau \quad \tau - t_{r-1}] \begin{Bmatrix} r-1 \\ r \end{Bmatrix} J \quad (17)$$

$$\delta J(\tau) \approx \frac{1}{h} [t_r - \tau \quad \tau - t_{r-1}] \begin{Bmatrix} \delta^{r-1} \\ \delta^r \end{Bmatrix} J \quad (18)$$

시간에 대해 직접 적분할 경우, 아래와 같이 세가

지 경우로 표현된다.

$$\begin{cases} (i) \frac{h}{2\eta} \left\{ \frac{1}{h}(rJ - r^{-1}J) - F_y \right\} (\delta^{r-1}J + \delta^r J) \\ (ii) \frac{h}{2\eta} \left\{ \frac{1}{h}(rJ - r^{-1}J) + F_y \right\} (\delta^{r-1}J + \delta^r J) \\ (iii) 0 \end{cases} \quad (19)$$

(17)-(18)식에서, $r^{-1}J$ 와 rJ 는 각각 t_{r-1} 과 t_r 일 때의 실제 필드에서 스프링내 힘의 충격량을 $\delta^{r-1}J$ 와 $\delta^r J$ 는 가상 필드에서 스프링내 힘의 충격량을 나타내며, $[\cdot]$ 과 $\{\cdot\}$ 은 각각 행벡터(row vector)와 열벡터(column vector)를 나타낸다. 또한, (19)식의 세 가지 경우는 다음을 나타낸다.

$$\begin{cases} (i) \frac{1}{h}(rJ - r^{-1}J) > F_y \\ (ii) \frac{1}{h}(rJ - r^{-1}J) < -F_y \\ (iii) elastic \end{cases} \quad (20)$$

이와 유사하게 실제 필드의 u 와 가상 필드 δu 도 최소의 연속조건을 만족하는 (17)-(18)식과 같이 선형의 근사법을 적용할 수 있다. 하지만, 본 연구에서는 확장 해밀턴 이론이 혼합 변수를 사용한 것을 감안, 시간간격 (t_{r-1}, t_r) 의 중간 시간인 $t_c \left(= \frac{t_r - t_{r-1}}{2} = \frac{h}{2} \right)$ 를 사용해, 아래와 같이 2차식의 u 와 δu 를 근사하였다.

$$u(\tau) \approx [Q_{r-1} \quad Q_c \quad Q_r] \begin{Bmatrix} r^{-1}u \\ c u \\ r u \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\delta u(\tau) \approx [Q_{r-1} \quad Q_c \quad Q_r] \begin{Bmatrix} \delta^{r-1}u \\ \delta^c u \\ \delta^r u \end{Bmatrix} \quad (22)$$

(21)-(22)식에서, Q_{r-1} , Q_c , Q_r 은 각각 다음의 2차식을 나타낸다.

$$Q_{r-1}(\tau) = \frac{2}{h^2}(\tau - t_r)(\tau - t_c) \quad (23)$$

$$Q_c(\tau) = -\frac{4}{h^2}(\tau - t_r)(\tau - t_{r-1}) \quad (24)$$

$$Q_r(\tau) = \frac{2}{h^2}(\tau - t_{r-1})(\tau - t_c) \quad (25)$$

이 주요 변수의 근사치에 따른 시간에 대한 미분항은 순차적인 미분으로 근사될 수 있다. 곧, 실제 필드와 가상필드의 속도의 경우, 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{u}(\tau) \approx [Q_{r-1} \quad \dot{Q}_c \quad \dot{Q}_r] \begin{Bmatrix} r^{-1}u \\ c u \\ r u \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\delta \dot{u}(\tau) \approx [Q_{r-1} \quad \dot{Q}_c \quad \dot{Q}_r] \begin{Bmatrix} \delta^{r-1}u \\ \delta^c u \\ \delta^r u \end{Bmatrix} \quad (27)$$

마찬가지로, \dot{J} 과 $\delta \dot{J}$ 은 (17)-(18)을 τ 에 대해 미분함으로써 근사시킬 수 있다.

주요 변수 근사에서 유의할 점은 확장해밀턴 이론에서 각 시간의 시작과 마지막에 대한 모멘텀은 별도로 다루고 있는 점인 데, (16)식의 \hat{p} 은 시간의 시작과 마지막의 대표값인 $\hat{p}(t_{r-1})$ 과 $\hat{p}(t_r)$ 로 근사되며, 마찬가지로 \hat{u}_1 은 $\hat{u}_1(t_{r-1})$ 과 $\hat{u}_1(t_r)$ 으로 별도로 근사된다. 덧붙여, 시간 $\tau (t_{r-1} < \tau < t_r)$ 에 대한 외력 \hat{f} 은 다음과 같이 근사된다.

$$\hat{f}(\tau) \approx \frac{1}{h} [t_r - \tau \quad \tau - t_{r-1}] \begin{Bmatrix} r^{-1}\hat{f} \\ r \hat{f} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

2.2.2 시간에 대한 직접 적분

앞의 실제 필드와 가상 필드의 혼합변수의 근사식 (17)-(28)을 (16)식에 대입하여 시간간격 (t_{r-1}, t_r) 에 대해 직접 적분을 하고, 식(19)의 가상 필드 $\delta^{r-1}J$ 와 $\delta^r J$ 를 제외한 계수를 $D\phi$ 로 놓으면 δA_r 은 다음의 다섯 개 식의 합으로 표현된다.

$$\delta^{r-1}u \left\{ -m \left(\frac{7}{3h} r^{-1}u + \frac{1}{3h} r u - \frac{8}{3h} c u \right) + \left[\frac{1}{6}(rJ - r^{-1}J) - \frac{h}{6} r^{-1}\hat{f} - \hat{p}(t_{r-1}) \right] \right\} \quad (29)$$

$$\delta^r u \left\{ -m \left(\frac{1}{3h} r^{-1}u + \frac{7}{3h} r u - \frac{8}{3h} c u \right) + \left[\frac{1}{6}(rJ - r^{-1}J) - \frac{h}{6} r \hat{f} + \hat{p}(t_r) \right] \right\} \quad (30)$$

$$\delta^c u \left\{ m \left(\frac{8}{3h} r^{-1}u + \frac{8}{3h} r u - \frac{16}{3h} c u \right) + \left[\frac{2}{3}(rJ - r^{-1}J) - \frac{h}{3} (r^{-1}\hat{f} + r \hat{f}) \right] \right\} \quad (31)$$

$$\delta^{r-1}J \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{h}(rJ - r^{-1}J) \\ -\frac{1}{6}(r^{-1}u + r u + 4^c u) \\ + \hat{u}_1(t_{r-1}) + D\phi \end{array} \right\} \quad (32)$$

$$\delta^r J \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{h}(rJ - r^{-1}J) \\ + \frac{1}{6}(r^{-1}u + r u + 4^c u) - \hat{u}_1(t_r) + D\phi \end{array} \right\} \quad (33)$$

확장 해밀턴 이론에 근거한 시간에 대한 유한요소 수치해석법은 전체 시간 간격에서 범함수 A 의 정상성(stationarity)이 각 시간 간격에서의 정상성, 곧 $\delta A_r = 0$ 을 통해 만족한다는 것에 근거하고, 각 시간 간격의 정상성은 (29)-(33)식의 각 가상 필드의 계수가 0이라는 것에 근거해 얻을 수 있다.

(29)-(33)식 가운데, 변수 ${}^r u$ 가 (31)식에서 다른 변수들로 표현될 수 있고, 이를 다른 식에 대입하면 (20)식의 각 조건에 따른 다음의 매트릭스 방정식을 얻을 수 있다.

$$[L] \begin{Bmatrix} {}^r u \\ {}^r J \\ \hat{p}(t_r) \\ u_1(t_r) \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} {}^{r-1} u \\ {}^{r-1} J \\ \hat{p}(t_{r-1}) \\ u_1(t_{r-1}) \end{Bmatrix} + \{V\} \quad (34)$$

(34)식에서, (20)식의 (i)인 경우, 매트릭스 L , R 과 벡터 V 는 다음과 같다.

$$(i) L = \begin{pmatrix} \frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{h} - \frac{h}{12m} + \frac{1}{2\eta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{a}{h} + \frac{h}{12m} + \frac{1}{2\eta} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (35a)$$

$$(i) R = \begin{pmatrix} \frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{a}{h} - \frac{h}{12m} + \frac{1}{2\eta} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{a}{h} + \frac{h}{12m} + \frac{1}{2\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (35b)$$

$$(i) V = \begin{pmatrix} \frac{h}{3} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h}{6} {}^r \hat{f} \\ \frac{h}{6} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h}{3} {}^r \hat{f} \\ -\frac{h^2}{24m} {}^{r-1} \hat{f} - \frac{h^2}{24m} {}^r \hat{f} + \frac{h}{2\eta} F_y \\ \frac{h^2}{24m} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h^2}{24m} {}^r \hat{f} + \frac{h}{2\eta} F_y \end{pmatrix} \quad (35c)$$

(20)식의 (ii)인 경우, 매트릭스 L 과 R 은 (35a) 및 (35b)와 같고, 벡터 V 는 다음과 같다.

$$(ii) V = \begin{pmatrix} \frac{h}{3} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h}{6} {}^r \hat{f} \\ \frac{h}{6} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h}{3} {}^r \hat{f} \\ -\frac{h^2}{24m} {}^{r-1} \hat{f} - \frac{h^2}{24m} {}^r \hat{f} - \frac{h}{2\eta} F_y \\ \frac{h^2}{24m} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h^2}{24m} {}^r \hat{f} - \frac{h}{2\eta} F_y \end{pmatrix} \quad (36)$$

또한, (20)식의 (iii)의 경우, 매트릭스 L , R 과 벡터 V 는 다음과 같다.

$$(iii) L = \begin{pmatrix} \frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{h} - \frac{h}{12m} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{a}{h} + \frac{h}{12m} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (37a)$$

$$(iii) R = \begin{pmatrix} \frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{m}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{a}{h} - \frac{h}{12m} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{a}{h} + \frac{h}{12m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (37b)$$

$$(iii) V = \begin{pmatrix} \frac{h}{3} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h}{6} {}^r \hat{f} \\ \frac{h}{6} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h}{3} {}^r \hat{f} \\ -\frac{h^2}{24m} {}^{r-1} \hat{f} - \frac{h^2}{24m} {}^r \hat{f} \\ \frac{h^2}{24m} {}^{r-1} \hat{f} + \frac{h^2}{24m} {}^r \hat{f} \end{pmatrix} \quad (37c)$$

(34)-(37)식에서 보듯, 확장 해밀턴 이론을 근거로 개발된 시간에 대한 유한요소해석법은 기존의 transient analysis에 쓰이는 방법(Newmark's methods, Central difference, etc.)이 재료 비선형을 다룰 때, iterative method를 사용하는 것과는 달리 non-iterative method임을 알 수 있다. 더욱 중요한 것은 새로운 해석법은 해석의 결과로 변위, 속도(모멘텀)와 스프링내 충격량은 물론, 잔류 변형 \hat{u}_1 을 직접적으로 산정한다는 것이다. 이는 곧, 잔류 변형을 가진 시스템의 향후 동적 해석을 가능케 하는 것으로 주목할 필요가 있다.

3. 수치해석 예제 및 분석

이상에서 유도한 해석법은 해석법의 기본적 특성 분석과 예제를 통해 그 타당성이 입증되었다.

3.1 안정성(Unconditionally stability)

제안된 해석법은 (20)식과 (34)식에서 이끌어내는 각 경우에 대한 매트릭스 $[L^{-1}R]$ 의 eigenvalues를 통해 안정성을 검증할 수 있으며 (L^{-1} 은 L 의 역행렬을 의미), 이는 <Table 1>에 정리되었다.

<Table 1> Eigenvalues for each case

Case	Eigenvalues
Case (i) Case (ii)	1
	1
	$\frac{6am\eta - 2h^2\eta + \sqrt{-3h^2(12\eta^2am - h^2\eta^2 - 3m^2)}}{6am\eta + h^2\eta + 3hm}$
Case (iii)	1
	1
	$\frac{6am - 2h^2 + \sqrt{-3h^2(12am - h^2)}}{6am + h^2}$

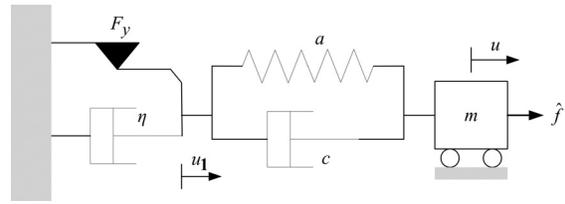
<Table 1>에서 보듯, time-step h 의 크기가

$$h^2 \leq 12am \tag{38}$$

일 경우, eigenvalues는 1보다 크지 않음을 알 수 있고, 이는 곧 제안된 수치해석법이 (38)식을 만족하는 한 무조건적 안정성을 갖고 있음을 의미한다.

3.2 수치예제

해석법의 타당성을 검증키 위해, 제안된 해석법은 Newmark's constant average acceleration method에 Newton Raphson iteration method가 고려된 기존의 방법과 비교되었다. 기존 해석법에 대한 결과는 OpenSees software²²⁾를 통해 도출되었으며, OpenSees가 <Fig. 1>의 기본적인 탄점소성 단자유도계에 대해서는 고려할 수 없기에, <Fig. 2>의 모델이 수치예제로 사용되었다.



<Fig. 2> Numerical simulation model

<Fig. 2>의 모델에 대한 제안된 해석법은 다음의 매트릭스와 벡터가 각각 앞의 L, R, V (식(35)-(37)에 더해짐)에 더해짐으로 고려될 수 있다.

$$L_{add} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} + \frac{hc^2}{12m} & \frac{hc}{12m} & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} - \frac{hc^2}{12m} & -\frac{hc}{12m} & 0 & 0 \\ -\frac{hc}{12m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{hc}{12m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{39a}$$

$$R_{add} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} + \frac{hc^2}{12m} & \frac{hc}{12m} & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} - \frac{hc^2}{12m} & -\frac{hc}{12m} & 0 & 0 \\ -\frac{hc}{12m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{hc}{12m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{39b}$$

$$V_{add} = \begin{pmatrix} \frac{h^2c}{24m} r^{-1}\hat{f} + \frac{h^2c}{24m} r\hat{f} \\ -\frac{h^2c}{24m} r^{-1}\hat{f} - \frac{h^2c}{24m} r\hat{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39c}$$

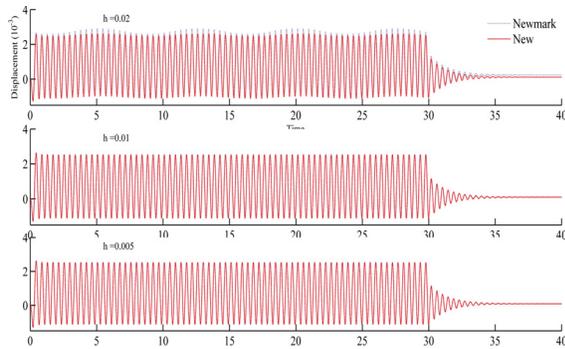
OpenSees를 이용한 기존의 해석에서, iteration에 사용된 기준은 positive force convergence criterion으로 10^{-7} 보다 작은 오차허용 혹은 최대 10회의 iteration 회수로 제한하였다.

해석상 편의를 위해, 고려된 예제는 <Fig. 2>에서 질량 $m = 1$, 스프링 강성 $k = 225$, 항복힘 $F_y = 1$ 의 무차원 값으로 고정하였다. 그 외 해석에 대한 주요정보는 Table 2와 같다.

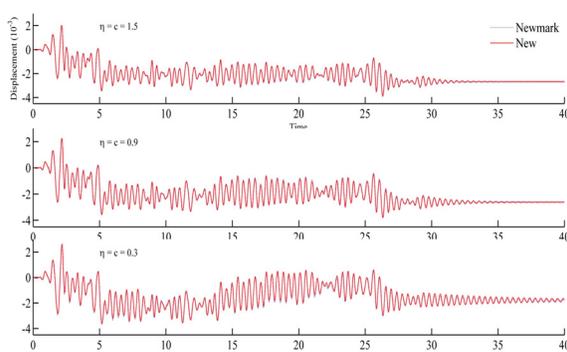
<Table 2> Numerical simulation cases

	$0.2 \sin(15t)$	El-Centro loading
Parameter changes	$h = 0.02$	$c = \eta = 1.5$
	$h = 0.01$	$c = \eta = 0.9$
	$h = 0.005$	$c = \eta = 0.3$
Parameters fixed	$c = \eta = 1.5$	$h = 0.02$
Loading duration	30	31.16
Analysis time	40	40

<Table 2>에서 보듯, sine loading에서는 time-step h 가 주요변수로 El-Centro loading에서는 감쇠상수(damping coefficient) c 가 주요변수이며, 각 해석에 대한 결과는 다음과 같다.



<Fig. 3> Displacement history results for sinusoidal loading



<Fig. 4> Displacement history results for El-Centro loading

<Fig. 3>-<Fig. 4>에서 보듯, 제안된 해석법에 의한 결과는 기존의 iteration을 사용한 방법의 결과와 잘 대응되는 것을 알 수 있다. 특히, <Fig. 3>은 제안된 해석법이 time-step이 큰 경우에 기존 해석에 비해 바람직한 결과를 도출하는 것을 알 수 있다.

향후 이 시스템의 동적거동을 알아보는 데 필요한 잔류 변형은 제안된 해석법에서 <Table 3>과 같이 산정되었다.

<Table 3> Residual displacements from the new method

Loading case	Parameter	\hat{u}_1
$0.2 \sin(15t)$	$h = 0.02$	1.1047e-004
	$h = 0.01$	9.2358e-005
	$h = 0.005$	9.1018e-005
El-Centro	$\eta = c = 1.5$	-0.0027
	$\eta = c = 0.9$	-0.0026
	$\eta = c = 0.3$	-0.0018

4. 결 론

본 논문에서는 확장 해밀턴 이론의 향후 구조체 및 연속체의 재료 비선형문제에 대한 적용성²³⁾을 목적으로 가장 기본적인 탄점소성 단자유도계에 그 이론을 적용, 시간에 대한 유한요소 수치해석법을 이끌어 내었고, 기본적인 수치 해석법의 특징과 그 적절성을 알고리즘 분석과 수치해석 예제를 통해 검증하였다.

제안된 해석법은 기존의 iterative methods가 아닌 non-iterative method로 unconditional stability의 바람직한 해석법 특성을 가지고 있고, 향후 동적 거동해석에 필요한 잔류변형을 직접적으로 산정하는 장점이 있음을 확인할 수 있었다.

또한, sinusoidal loading의 경우, 제안된 해석법이 time-step이 큰 경우에도 바람직한 해석결과를 도출하는 것을 확인할 수 있었는데, 이는 기존 해석법에서 time-step의 크기가 커지면 convergence criterion과 number of iterations 중에서 number of iterations에 의해 해석값이 결정되어 그 정확도가 떨어지기 때문으로 판단된다.

이 기본 연구를 근거로 한 해석법은 앞으로 구조체와 연속체에 적용될 예정이다.

감사의 글

본 논문은 한국연구재단 2013년도 일반연구지원사업(R1305331)의 지원을 받아 수행된 연구이며, 이에 감사를 드립니다.

References

1. Kim, J., Dargush, G.F., Ju, Y.K.(2013), Extended framework of Hamilton's principle for continuum dynamics, *International Journal of Solids and Structures*, 50, 3418-3429
2. Hamilton, W.R.(1834), On a general method in dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124, 247-308
3. Hamilton, W.R.(1835), Second essay on a general method in dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 125, 95-144
4. Bretherton, F.P.(1970), A note on Hamilton's principle for perfect fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 44, 19-31
5. Gossick, B.R.(1967), *Hamilton's Principle and Physical Systems*, Academic Press, New York
6. Slawinski, M.A.(2003), *Seismic Waves and Rays in Elastic Media*, Pergamon, Amsterdam
7. Tiersten, H.F.(1967), Hamilton's principle for linear piezoelectric media, *Proceedings of the IEEE*, 55, 1523-1524
8. Landau, L.E., Lifshitz, E.M.(1975), *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford
9. Rayleigh, J.W.S.(1877), *The Theory of Sound*, Dover, New York
10. Biot, M.A.(1955), Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity, *Physical Review*, 97, 1463-1469
11. Marsden, J.E., Ratiu, T.S.(1994), *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition to Classical Mechanical Systems*, Springer-Verlag, New York
12. Sivaselvan, M.V., Reinhorn, A.M.(2006), Lagrangian approach to structural collapse simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, 132, 795-805
13. Sivaselvan, M.V., Lavan, O., Dargush, G.F., et al.(2009), Numerical collapse simulation of large-scale structural systems using an optimization-based algorithm, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 38, 655-677
14. Gurtin, M.E.(1964), Variational principles for linear elastodynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16, 34-50
15. Gurtin, M.E.(1964), Variational principles for linear initial-value problems, *Quarterly of Applied Mathematics*, 22, 252-256
16. Tonti, E.(1973), On the variational formulation for linear initial value problems, *Annali di Matematica Pura Applicata*, 95, 331-369
17. Agrawal, O.P.(2001), A new Lagrangian and a new Lagrange equation of motion for fractionally damped systems, *Journal of Applied Mechanics*, 68, 339-341
18. Dreisigmeyer, D.W., Young, P.M.(2003), Nonconservative Lagrangian mechanics: a generalized function approach, *Journal of Physics A*, 36, 8297-8310
19. El-Nabulsi, R.A., Torres, D.F.M.(2008), Fractional actionlike variational problems, *Journal of Mathematical Physics*, 49, 053521
20. Atanckovic, T.M., Konjik, S., Pilipovic, S.(2008), Variational problems with fractional derivatives: Euler-Lagrange equations, *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 41, 095201
21. Baleanu, D., Muslih, S.I.(2005), Lagrangian formulation of classical fields within Riemann-Liouville fractional derivatives, *Physica Scripta*, 72, 119-121
22. Mckeena, F., McGann, C., Arduino, P., Harmon, J.A.(2013), *OpenSees Laboratory*
23. 석근영, 강주원, 신영식, "재료비선형을 고려한 복합적층판의 진동해석", *한국공간구조학회*, 제 6권 제 4호 2006, pp. 45-52

(접수일자 : 2014년 02월 17일)

(심사완료일자 : 2014년 02월 28일)

(게재확정일자 : 2014년 03월 04일)