Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2014.40.2.233
Vol. 40, No. 2, pp. 233-239, April 2014.

ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457 <Original Research Paper>

생산시스템이 불완전하여 재작업이 요구되는 상황에서의 최적 생산시간 결정에 관한 연구

김 창 현†

전남대학교 문화사회과학대학 경상학부

Determination of an Optimal Production Run Length in a Deteriorating Production Process with Rework

Chang Hyun Kim

School of Business and Commerce, Chonnam National University

This paper presents an extended EMQ model which determines an optimal production run length in an deteriorating production process. The production process is subject to a random deterioration from an in-control state to an out-of-control state and thus producing some proportion of defective items. Defective items produced are re-processed in the rework process to convert them into non-defectives. Through the mathematical modeling, an optimal solution minimizing the average cost per unit time as well as minimum average cost are derived. Numerical experiment is carried out to examine the behavior of the proposed model depending on model parameters.

Keywords: EMQ, Production-Inventory System, Rework, Imperfect, Deteriorating

1. 서 론

제조조건이 비슷하거나 유사한 가공공정을 거쳐 제품을 생산하는 경우 또는 반도체 공정에서와 같이 제조공정상 경제적인 효율성을 고려하여 로트 편성에 의한 묶음(batch) 생산을 하는 것이 유리할 경우, 최적 생산량의 결정은 매우 중요하다. 묶음 생산시스템하에서의 경제적인 생산량 결정에 관한 여러 연구들이 과거 수많은 연구자들에 의해 진행되어져 왔다. 그러나, EMQ(Economic Manufacturing Quantity) 모형의 비현실적인 전제 조건 가운데 하나는 생산시스템이 완전하여 생산된 제품 모두가 품질측면에서 양품이라는 것이다. 현실적으로는 제조공정상 우연요인에 의하거나 원재료상의 품질 문제 등으로 다소의 불량품이 발생되며, 발생된 불량품들은 재가공되거나 폐기처분되기도 한다. 뿐만 아니라 생산시스템의 작동측면에서 살펴보면 생산시스템이 완전하지 않기 때문에 작동 불량으로 인하여 불량품의 발생이 불가피하며, 이들은 후공정에 심각한 문제를 야기시키기도 한다.

생산시스템이 불완전하여 불량품이 발생되는 경우에 경제적인 주문량/생산량을 결정하는 연구는 크게 두 분야로 대별된다. 하나는 생산시스템 그 자체의 불완전성을 모형화에 고려하느냐하는 것과 다른 하나는 생산시스템의 불완전성으로 초래되는 결과인 수율 문제를 모형화에 고려하느냐 하는 것이다.

첫 번째 연구 방향으로서 Rosenblatt and Lee(1986)는 고전적인 EMQ 모형을 확장하여 생산 과정이 진행됨에 따라 기계의 성능이 점차 퇴화하여 정상적인 가동상태(in-control state)에서 비정상적인 가동상태(out-of-control state)로 변하면, 생산 과정은 계속 진행되지만 일정 비율만큼 불량품을 생산한다고 가정할 때의 EMQ 모형을 발표하여 최적 생산시간이 고전적인

이 논문은 2010년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.
† 연락저자 : 김창현 교수, 550-749 전남 여수시 대학로 50 전남대학교 문화사회과학대학 경상학부, Tel : 061-659-7353, Fax : 061-659-7359, E-mail : chkim@chonnam.ac.kr
2013년 3월 20일 접수; 2013년 8월 29일 수정본 접수; 2013년 9월 12일 게재 확정.

EMQ 모형의 최적 생산시간보다 짧다는 것을 보여주었다. 그 후 Lee and Rosenblatt(1987)는 최적 생산량과 검사계획을 동시에 고려하는 모형을 발표하였는데, 기계가 지수분포의 정상 가동상태의 간격을 가질 때, 기계의 비정상 가동상태를 검출하고자 하는 최적 검사계획은 등간격을 가짐을 보여 주었다. Lee and Rosenblatt(1989)는 비정상적으로 가동중인 기계의 복구비용이 비정상적인 가동상태로 부터 검사 후 수리하기까지의 지연시간에 비례하는 경우의 최적 생산계획 및 검사계획을 동시에 결정하는 모형을 발표하였다. Rosenblatt and Lee(1986), Lee and Rosenblatt(1987)의 모형들을 기본으로 하여 현실적인 조건을 부가한 일련의 연구들이 있었다. Kim and Hong(1996)은 Rosenblatt and Lee(1986) 모형을 일반화하여 정상 가동시간이 임의의 일반분포를 가질 때, Rosenblatt and Lee(1986)와는 달리 비용함수를 대략화시키지 않고 원래 비용함수에 대한 최적 생산시간을 도출하였고, 선행연구에서 비용함수를 대략화함으로써 발생된 근사해의 오류 및 문제점을 지적하였다. Kim and Hong(1997)은 Lee and Rosenblatt(1987)의 모형을 대상으로 비용함수를 대략화하지 않고 해를 도출하는 과정과 함께 비용함수를 대략화함으로써 발견할 수 없었던 몇 가지 중요한 모형의 특성을 규명하였다.

Liou *et al*.(1994)은 Lee and Rosenblatt(1987)의 모형을 확장하여 생산과정 도중에 시행하는 공정검사에 1종 및 2종 오류가 존재하고, 정상 가동시간이 지수 및 와이블분포를 따를 경우에 최적 생산량과 검사계획을 결정하는 모형을 발표하였다. Rahim(1994)은 생산공정의 정상 가동상태 간격이 고장율 증가함수인 일반분포를 가지며, 주기적인 샘플링 검사로 생산공정의 가동상태를 검사하는 경우에 최적 생산량과 검사계획 및 관리도 설계안을 동시에 결정하는 재고문제와 품질문제의 혼합 모형을 발표하였다. Porteus(1986)는 제품 한 단위 생산할 때마다 공정 상태가 비정상 가동상태로 변하는 확률이 일정하고, 일단 비정상적인 가동상태가 되면 해당 로트를 모두 생산할 때까지 이 상태가 지속되면서 불량품을 생산한다고 가정할 때, 최적 생산량을 구하는 모형을 제시하였다. 그는 로트 크기를 적게 하면 적게 할수록 불량품 생산비율이 떨어진다는 수율과 생산량과의 관계를 명시적으로 나타내었으며, 불량품 생산비율과 로트 크기를 줄임으로써 단위 시간당 비용을 줄이기 위한 투자방안도 함께 제시하였다.

두 번째 연구 방향으로서 Yano and Lee(1995)는 첫 번째 연구 방향에 대한 제 문제를 포함, 생산량이나 구매량의 수율이 랜덤한 경우에 로트 크기를 정하는 문제에 대한 광범위한 문헌조사를 통하여 이 분야의 연구 흐름을 파악할 수 있게 하였다. Zhang and Gerchak(1990)은 불량품 발생비율이 랜덤할 때 EOQ (Economic Order Quantity) 모형하에서 로트 크기와 검사계획을 정하는 문제를 제시하였다. Salameh and Jaber(2000)은 EOQ 모형상에서 공급받은 제품들에 불량품이 섞여 있어서 이들을 전수검사를 거쳐 선별하고, 선별된 불량품을 낮은 가격에 판매 처분하는 경우에 총 이익을 최대화하는 주문량 결정 문제를 다루었다. Jamal *et al*.(2004)은 고전적인 EMQ 모형을 확장하여 생산과정상 불량품이 발생되고, 이 불량품을 양품으로 만들기 위하여 재작업을 수행하는 단일 공정으로 이루어진 생산-재고 시스템에서의 최적 생산량을 결정하는 문제를 다루었다. 그들은 생산되는 로트에 포함된 불량품의 비율이 항상 일정하고, 재작업 대상의 불량품에 대한 재고 유지비용을 무시할 수 있다는 전제조건하에 수리모형을 개발하였다. Kim(2005)은 Jamal *et al*.(2004)이 가정한 전제조건 가운데 비현실적인 부분을 현실화하여 생산되는 로트에 포함된 불량품 발생비율이 확률적인 분포를 따르고, 재작업 대상인 불량품에 대한 재고 유지비용을 고려하여야 하는 경우에서의 최적 생산량 결정 문제를 연구하였다. Sarker and Moon(2011)은 생산과정에 불량품이 확률적으로 발생될 때 인플레이션을 고려하는 경우에서의 생산-재고 문제를 다루었다.

선행 연구 가운데 Jamal *et al*.(2004), Kim(2005) 및 Sarker and Moon(2011)의 한계점으로서 첫번째 연구 방향에서의 선행연구와 같이 생산시스템이 정상적인 가동상태에서 비정상적인 가동상태로 변하였을 때, 생산 과정은 계속 진행되지만 일정 비율 만큼 불량품이 생산된다는 상황과는 달리 어떤 내재적인 원인에 의하여 생산개시 시작부터 불량품이 일정한 비율로, 또는 확률적으로 발생된다는 것이다.

불량품의 발생은 재작업으로 인하여 제조원가 상승의 요인으로 작용할 뿐만 아니라, 출하 뒤에 발견되는 불량품은 문제가 되었을 때 제조물책임법의 시행으로 더욱 더 기업의 보상책임을 가중시키며, 기업들의 이미지 훼손과 함께 국제경쟁력의 저하를 초래한다. 이에 각 기업에서는 불량품 발생을 줄이기 위한 생산기술 측면에서의 노력과 함께 불량품이 불가피하게 발생되는 경우 관련 비용을 최소화하는 관리기술 측면에서의 노력도 반드시 필요한 실정이다.

본 연구에서는 첫 번째 연구 방향에 대한 선행연구 상황을 Jamal *et al*.(2004)의 연구 내용에 접목하는 것은 매우 현실적이며 의미있는 연구라고 생각하여, 생산시스템이 불완전하여 불량품이 발생될 수 있으며, 발생되는 불량품은 모두 재작업에 투입되는 경우에서의 관련 비용을 고려한 최적 생산시간을 결정하는 수리모형을 제시하고자 한다. 아울러, 본 연구를 통하여 생산시스템의 불완전성과 관련하여 불완전성을 나타내는 파라미터의 변화에 따른 불량품 발생량의 추이와 불량품 발생에 따른 최적 생산시간의 변화 및 관련 비용의 변화 추이를 파악하여 경영 의사결정상의 지침으로 활용될 수 있도록 하고자 한다.

본 논문의 구성은 제 2장에서는 수리모형을 위한 가정과 전제조건을 설명하고 모형에 대한 수식화, 해의 결정에 대하여 다루며, 제 3장에서는 본 모형의 행태를 살펴보기 위하여 수치실험 결과를 제시한다. 최종 결론과 함께 향후 연구방향에 대하여는 제 4장에 기술되어 있다.

2. 수리모형

2.1 모형 설정을 위한 전제 조건 및 사용 기호

본 논문에 제시된 수리모형은 고전적인 EMQ 모형을 기본으로 하여 다음과 같은 전제조건하에서 개발되었다.

- 생산시스템은 하나의 기계로 구성되어 있고, 단일 품목을 생산한다.
- 생산율과 수요율은 일정하며 연속적이다.
- 생산시스템은 생산과정이 진행됨에 따라 퇴화할 수 있으며, 생산시스템이 퇴화되면 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변한다.
- 매 주기마다 생산 개시 초기에는 정상 가동상태에서 100% 양품만을 생산하며, 생산시스템이 비정상 가동상태로 변하면 전체 로트가 생산될 때까지 생산시스템의 상태는 비정상 가동상태로 있으면서 일정한 비율의 불량품을 생산한다. 이 전제조건은 일단 생산이 시작되면 생산 과정 중간에는 어떠한 조치도 취하기 어려운 상황이거나, 생산시스템의 상태 변화 자체를 감지하지 못했을 때 발생되는 상황으로 생각할 수 있다.
- 생산 개시 후 생산 공정이 정상 상태로 가동하는 시간은 랜덤하며, 이것의 분포는 임의의 일반분포를 따르며 평균과 분산은 유한하다.
- 재작업은 정규작업이 종료되면 동일한 생산시스템으로 어떠한 새로운 준비작업 없이 바로 불량품을 대상으로 시행한다. 이때 재작업 비용은 새 제품을 생산하는 비용과 동일하며, 재작업을 통한 생산율 또한 정규작업시의 생산율과 같다.
- 재작업 기간 동안 생산되는 제품은 특별한 주의를 기울여 재작업하기 때문에 불량품이 발생하지 않는다. 즉, 정규작업 때 발생되는 불량품은 단 한 번의 재작업 과정을 거친다.
- 재작업을 하기 위한 불량품의 선별은 자동화 계측장비에 의한다고 가정하여 불량품 선별에 소요되는 시간이나 비용은 무시한다.
- 모든 수요는 충족되어야 하므로 재고품절(shortage)은 고려하지 않는다.

모형 전개에 사용되는 생산시스템의 특성치와 비용 관련 모수들을 나타내는 기호는 다음과 같다.

D : 수요율(개/시간)
P : 생산율(개/시간)
H_1 : 양품의 재고 유지비용($/시간/개)
H_2 : 불량품의 재고 유지비용($/시간/개)
K : 생산주기당 생산 준비비용($/회)
Q : 한 생산 주기에서의 생산(로트)량(개)
T' : 생산 주기(시간), $T' = PT/D$
T : 실제 로트 생산시간, $T = Q/P$
s : 불량품 생산에 따른 재작업 비용($/개)
α : 비정상 가동 상태에서의 불량품 생산비율, $0 \le \alpha \le 1$
X : 생산시스템이 정상 상태로 가동하는 시간, $X \sim f(x)$
$f(x)$: 생산시스템이 정상 상태로 가동하는 시간의 확률 밀도 함수

2.2 모형의 수식화

<Figure 1>은 본 연구대상 문제에서의 재고 궤적을 나타낸 것으로 궤적 *abc*는 고전적인 EMQ 모형의 시간에 따른 재고수

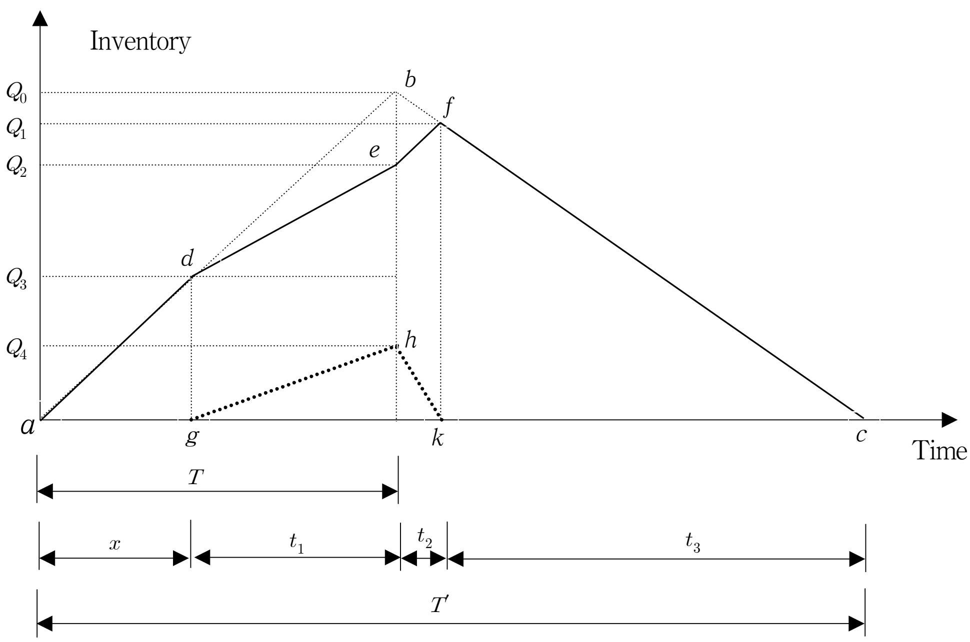

Figure 1. Inventory trajectory

준을 나타낸다. 따라서, 기간 T는 로트의 생산시간으로서 $T=Q/P$로 표시된다. 기간 x는 Rosenblatt and Lee(1986) 모형에서 생산과정이 진행되는 동안 정상적으로 가동되는 상태이다. 따라서, 이 구간에서는 불량품이 발생되지 않는다. 시점 g는 생산시스템의 성능이 점차 퇴화하여 정상적인 가동상태에서 비정상적인 가동 상태로 변하는 시점이다. 따라서 기간 t_1는 $(T-x)$로 표시되며, 이 시간 동안에는 불량품이 비율 α 만큼씩 발생된다.

궤적 *adefc*는 양품의 재고궤적을 나타내고, 궤적 *ghk*는 불량품의 재고궤적을 나타낸다. 기간 t_1동안 양품은 시간당 $P(1-\alpha)$만큼 생산되고 불량품은 αP만큼 발생되므로, 이 기간동안 양품은 생산율과 수요율의 차이인 단위 시간당 $P(1-\alpha)-D$만큼 재고가 증가하며, 불량품은 단위 시간당 αP씩 재고가 증가한다. 기간 t_2는 $\alpha(T-x)$로 표시되며, 불량품을 재작업하여 양품으로 만드는 기간으로, 불량품을 재작업하는 데 소요되는 시간이다. 이 기간동안 불량품의 재고는 시간당 P씩 감소하며, 양품은 수요를 차감한 양인 시간당 $P-D$씩 재고가 증가한다. 기간 t_3는 형성된 재고를 소진하는 기간으로 시간당 D씩 감소하며, $t_3=T'-x-t_1-t_2$로 표시된다. T'는 생산주기로서 $T'=PT/D$이다.

제안 모형에서 고려하고 있는 비용요소는 생산준비비, 재작업비, 양품과 불량품에 대한 재고유지비 등이다. 본 모형에서의 최적화는 위 비용요소들을 고려하여 단위 시간당 집계되는 비용을 최소화하는 최적 생산시간을 구하는 것이다. 단위 시간당 발생되는 비용을 비용요소별로 구하면 다음과 같다.

• 단위 시간당 생산준비 비용(K_s)

매 생산주기마다 K의 비용이 발생되므로

$$K_s=K/T'=KD/PT \tag{1}$$

• 단위 시간당 재작업비용(K_r)

생산시간동안 발생되는 불량품의 갯수를 N이라 두면, N은 정상 상태로 가동하는 시간 X에 따라 식 (2)와 같이 주어진다. N의 기대치 $E(N)$은 식 (3)과 같이 계산되며, K_r은 식 (4)와 같이 구할 수 있다.

$$N=\begin{cases}0 & \text{if} \quad X\geq T\\ \alpha P(T-X) & \text{if} \quad X<T\end{cases} \tag{2}$$

$$E(N)=\int_0^T \alpha P(T-x)f(x)dx \tag{3}$$

$$K_r=sE(N)/T'=s\alpha D\int_0^T(T-x)f(x)dx/T \tag{4}$$

• 단위 시간당 양품에 대한 재고유지비용(K_v)

단위 시간당 양품에 대한 재고유지비용을 구하기 위하여 한 생산주기 동안의 양품에 대한 평균 재고량을 $\overline{I_v}$라 하면, $\overline{I_v}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{I_v}=\frac{Q_3}{2}x+\frac{(Q_2+Q_3)}{2}t_1+\frac{(Q_1+Q_2)}{2}t_2+\frac{Q_1}{2}t_3 \tag{5}$$

<Figure 1>로부터 Q_3, Q_2, Q_1은 순차적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Q_3=(P-D)x \tag{6}$$

$$\begin{aligned}Q_2&=Q_3+[P(1-\alpha)-D](T-x)\\&=[P(1-\alpha)-D]T+\alpha Px\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}Q_1&=Q_2+(P-D)t_2\\&=[P-(1+\alpha)D]T+\alpha Dx\end{aligned} \tag{8}$$

식 (6)~식 (8)에 관계식 $t_1=(T-x)$, $t_2=\alpha(T-x)$, $t_3=T'-x-t_1-t_2=[(P-(1+\alpha)D)T+\alpha Dx]/D$을 대입하여 정리하면 $\overline{I_v}$는 식 (9)와 같이 정리된다. $E(\overline{I_v})$을 이용하여 K_v를 구하면 식 (10)으로 표현된다.

$$\overline{I_v}=\frac{1}{2}\frac{P(P-D)}{D}T^2-\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)P(T-x)^2 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}K_v&=H_1E(\overline{I_v})/T'\\&=\frac{1}{2}H_1\left\{(P-D)T-\alpha(1+\alpha)\frac{D}{T}\int_0^T(T-x)^2f(x)dx\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

• 단위 시간당 불량품에 대한 재고유지비용(K_w)

한 생산주기 동안의 불량품에 대한 평균 재고량을 $\overline{I_w}$라 하면, $Q_4=\alpha P(T-x)$을 이용하여 $\overline{I_w}$는 식 (11)과 같이 구할 수 있다. 이에 따라, K_w는 식 (12)와 같이 주어진다.

$$\overline{I_w}=\frac{Q_4}{2}(t_1+t_2)=\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)P(T-x)^2 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}K_w&=H_2E(\overline{I_w})/T'\\&=\frac{1}{2}H_2\alpha(1+\alpha)\frac{D}{T}\int_0^T(T-x)^2f(x)dx\end{aligned} \tag{12}$$

$TC(T)$를 제안 모형의 단위 시간당 총 비용의 기대치라고 하면 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned}TC(T)&=K_s+K_r+K_v+K_w=\frac{KD}{PT}\\&+\frac{1}{2}\left\{H_1(P-D)T-(H_1-H_2)\alpha(1+\alpha)\frac{D}{T}\int_0^T(T-x)^2f(x)dx\right\}\\&+\frac{s\alpha D}{T}\int_0^T(T-x)f(x)dx\end{aligned} \tag{13}$$

비용함수 $TC(T)$의 모양을 살펴보기 위하여 $TC(T)$의 극한치를 구하여 보면 $\lim_{T \to 0^+} TC(T) = \infty$, $\lim_{T \to \infty} TC(T) = \infty$가 되어 T가 0^+ 또는 무한대로 접근함에 따라 비용함수 $TC(T)$도 무한히 커지므로 함수형태가 고전적인 EMQ 모형과 유사함을 알 수 있다. 최적 생산시간 T^*가 무한대라는 의미는 생산시스템의 상태에 관계없이 즉, 불량품 생산 여부에 관계없이 무한히 생산하는 정책이므로 현실적인 의미는 없다. 위의 수리모형에서 단위 시간당 평균 비용을 최소화하는 최적 생산시간 T^*를 구하기 위하여 $TC(T)$의 일차 도함수를 구하면 식 (14)와 같이 주어진다.

$$TC'(T) = -\frac{KD}{PT^2} + \frac{1}{2}H_1(P-D) - \frac{1}{2}(H_1 - H_2)\alpha(1+\alpha)\frac{D}{T^2}\int_0^T (T^2 - x^2)f(x)dx + \frac{s\alpha D}{T^2}\int_0^T xf(x)dx \qquad (14)$$

$q(T) = T^2 TC'(T)$라 정의하면 $q(T)$는 식 (15)와 같이 정리된다.

$$q(T) = -\frac{KD}{P} + \frac{1}{2}H_1(P-D)T^2 - \frac{1}{2}(H_1 - H_2)\alpha(1+\alpha)D\int_0^T (T^2 - x^2)f(x)dx + s\alpha D\int_0^T xf(x)dx \qquad (15)$$

[정리 1] $(P-D) \geq \alpha(1+\alpha)D$이면 $q(T)$는 단조 증가함수이다.

<증명> $q(T)$를 미분하여 $q'(T)$를 구하여 보자.

$$q'(T) = H_1(P-D)T - (H_1 - H_2)\alpha(1+\alpha)DTF(T) + s\alpha DTf(T) \qquad (16)$$

$F(T)$가 $F(T) \leq 1$이므로 $(P-D) - \alpha(1+\alpha)DF(T) \geq \geq (P-D) - \alpha(1+\alpha)D \geq 0$이다. 따라서, $H_1(P-D)T - H_1 \alpha(1+\alpha)DTF(T) \geq 0$이므로 모든 T에 대하여 $q'(T) > 0$이다. ■

[정리 2] (최적 생산시간의 유일성)

$(P-D) \geq \alpha(1+\alpha)D$이면 $TC'(T^*) = 0$를 만족하는 T^*는 유일하게 존재한다.

<증명> $T^2 - \int_0^T (T^2 - x^2)f(x)dx = T^2\overline{F}(T) + \int_0^T x^2 f(x)dx > 0$이다. 즉, 이 함수는 $T > 0$인 모든 T에 대하여 항상 양수이다. 이에 따라, 조건 $(P-D) \geq \alpha(1+\alpha)D$ 하에서 $(P-D)T^2 - \alpha(1+\alpha)D\int_0^T (T^2 - x^2)f(x)dx > 0$이며, $q(T)$의 H_1항 역시 항상 양수이다. 그리고, $\lim_{T \to 0^+} q(T) = -KD/P < 0$이며, H_1항이 항상 양수이므로 $\lim_{T \to \infty} q(T) = \infty > 0$이다. [정리 1]에서 $q(T)$는 단조 증가함수이므로 $q(T^*) = 0$를 만족하는 T^*는 유일하다. 이에따라, $TC'(T^*) = 0$를 만족하는 최적 생산시간 T^*는 유일하다. ■

[정리 1]과 [정리 2]에서 사용된 조건 $(P-D) \geq \alpha(1+\alpha)D$의 의미는 다음과 같이 해석된다. 본 모형은 make-to-stock 정책에 의하여 생산율과 수요율의 차이 만큼 생산시간 동안 형성된 재고를 이용하여 비생산기간 동안의 수요율을 만족시키는 모형이다. 이러한 모형에서 생산율과 수요율의 차이는 생산시스템의 불완전성으로 인하여 향후 발생이 예상되는 불량품을 고려하였을 때, 적어도 수요율의 일정 부분 보다 커야한다는 것을 의미한다. 일반적으로 불량률 α는 $\alpha < 1$인 작은 양수이므로 대개의 생산시스템 환경에 부합되며, 비현실적인 강한 전제조건은 아닌 것으로 판단된다. [정리 2]에서 $q(T^*) = 0$을 만족하는 최적생산량 T^*는 닫힌 형태로는 나타낼 수 없으나, Newton Raphson 방법과 같은 수치해석적인 방법으로 구할 수 있다.

[정리 3] (최소 비용)

최적 생산시간 T^*에서의 최소 비용은 다음 식과 같다.

$$TC(T^*) = H_1(P-D)T^* - (H_1 - H_2)\alpha(1+\alpha) \times D\int_0^{T^*} (T^* - x)f(x)dx + s\alpha D\int_0^{T^*} f(x)dx \qquad (17)$$

<증명>

T^*가 $q(T^*) = 0$를 만족할 경우 식 (15)로부터 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\frac{KD}{PT^*} = \frac{1}{2}H_1(P-D)T^* - \frac{1}{2}(H_1 - H_2)\alpha(1+\alpha)\frac{D}{T^*} \times \int_0^{T^*} (T^2 - x^2)f(x)dx + \frac{s\alpha D}{T^*}\int_0^{T^*} xf(x)dx \qquad (18)$$

식 (18)을 식 (13)에 대입하여 정리하면 식 (17)을 구할 수 있다. ■

3. 수치실험

본 장에서는 수치실험을 통하여 생산시스템의 특성치를 포함한 관련 모수와 비용요소들이 최적 생산시간과 최소 비용에 미치는 영향에 대하여 분석하여, 모형의 행태와 특성에 대하여 살펴보고자 한다. 수치실험에서 사용된 기본 자료는 K = 100($/회), P = 400(개/시간), D = 300(개/시간), H_1 = 0.5($/시간/개), H_2 = 0.25($/시간/개), s = 10($/개)이 공통적으로 적용되었다. 이상의 기본 자료를 바탕으로 비정상 가동상태에서 불량품이 발생할 비율인 α값을 변화시켜 가며, 생산율과 수요율에 관한 조건 $(P-D) \geq \alpha(1+\alpha)D$을 만족하는 범위 즉, 불량품의 발생 비율이 $\alpha \leq 0.26$인 범위 내에서 수치실험을 실시하였다. 기계나 장비의 수명 특성을 지수분포가 잘 설명해 주는 것으로 알려져 있기 때문에(Lawless, 1982), 생산시스템이 정상 상태로 가동하는 시간은 모수가 μ인 지수분포를 갖는다고 가정하였다.

Table 1. Optimal production time and minimum cost

α	μ	T^*	$TC(T^*)$	ratio 1	ratio 2
0.05	0.1	1.541	98.03	-12.39	-12.11
	0.2	1.422	107.49	-21.82	-20.44
	0.3	1.339	115.63	-29.36	-26.16
	0.4	1.278	122.82	-35.56	-30.01
	0.5	1.231	129.26	-40.71	-32.49
0.1	0.1	1.399	108.36	-23.78	-22.87
	0.2	1.226	125.38	-41.28	-37.36
	0.3	1.115	139.69	-55.31	-46.78
	0.4	1.037	152.15	-67.03	-52.85
	0.5	0.978	163.28	-77.06	-56.60
0.15	0.1	1.289	117.86	-34.35	-32.65
	0.2	1.090	141.24	-58.87	-52.14
	0.3	0.971	160.56	-78.43	-64.44
	0.4	0.889	177.28	-94.85	-72.21
	0.5	0.829	192.13	-109.02	-76.91
0.2	0.1	1.201	126.68	-44.24	-41.67
	0.2	0.990	155.61	-74.97	-65.44
	0.3	0.869	179.23	-99.37	-80.16
	0.4	0.788	199.55	-119.86	-89.34
	0.5	0.729	217.57	-137.63	-94.84
0.25	0.1	1.128	134.96	-53.56	-50.09
	0.2	0.912	168.84	-89.89	-77.62
	0.3	0.792	196.25	-118.60	-94.45
	0.4	0.714	219.74	-142.72	-104.86
	0.5	0.657	240.54	-163.67	-111.07

Remark : $T^*_{EMQ} = 1.732$

ratio 1=$(T^* - T^*_{EMQ})/T^* \times 100(\%)$

ratio 2 = $[TC(T^*) - TC(T^*_{EMQ})]/TC(T^*) \times 100(\%)$

<Table 1>을 보면 생산시스템의 특성치인 μ를 포함하여 불량품 발생 비율 α 값에 따라 최적 생산시간과 최소 비용이 변하는 것을 볼 수 있다. 수치실험에서 사용된 데이터 상으로만 볼 때 α가 증가하거나 μ가 증가하면 최적 생산시간이 감소하는 것처럼 나타나지만, 이러한 현상은 이 데이터 세트에 한정하여 나타나는 것으로 판단된다. 실제로 다양한 데이터 세트를 가지고 수치실험을 해 본 결과, 관련 모수와 비용요소들을 특정한 값으로 고정시킨 후 μ를 증가시켰더니, 최적 생산시간이 감소하다가 증가하는 현상도 관찰할 수 있었다. 수리적으로 α와 μ값의 변화 또는, 관련 모수와 비용요소들의 변화가 최적 생산시간과 최소 비용에 미치는 영향을 규명하려고 노력하였으나, 발표할 만한 가시적인 결과는 얻지 못하였다. 고전적인 EMQ 모형에서의 최적 생산시간을 T^*_{EMQ}라 두면, 본 모형과의 최적 생산시간 및 최소 비용 차이가 α와 μ값에 따라 큰 차이가 나는 것을 관찰할 수 있다.

4. 요약 및 결론

본 논문에서는 생산시스템이 불완전하여 가동중에 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변할 수 있으며, 비정상 가동상태로 변하게 되면 일정 비율의 불량품이 발생되고, 이 불량품을 양품으로 만들기 위하여 재작업을 필요로 하는 단일 공정으로 이루어진 생산시스템에서의 최적 생산시간을 결정하는 방안을 제시하였다.

연구 결과로서 비용항목별로 모형을 수리화하여 최적화 척도로서 사용된 비용함수를 유도하였고, 제안모형의 특성 도출을 통하여 최적해가 유일하게 존재함을 보였다. 또한, 수치실험을 통하여 생산시스템의 특성치와 비용요소들이 최적 생산시간과 최소 비용에 미치는 영향과 모형의 특성을 살펴보았다. 수치실험에서 관찰되는 관련 모수와 비용요소들의 변화가 최적 생산시간과 최소 비용에 미치는 영향에 대하여 수리적으로 규명하지는 못하였으나, 고전적인 EMQ 모형과는 큰 차이를 보인다는 것을 관찰할 수 있었다. 이러한 결과는 생산현장에서 불량품의 발생을 줄이기 위한 생산기술 측면에서의 노력과 함께 불량품이 불가피하게 발생되는 경우, 관련 비용을 최소화하려는 관리기술 측면에서의 생산현장 문제를 해결하는데 기초 연구의 결과로서 고려할 수 있으리라 사료된다.

향후 연구 주제로서 본 연구내용을 확장하여 Lee and Rosenblatt(1987), Kim and Hong(1997)의 연구와 같이 가동중인 생산시스템의 작동상태를 파악하기 위하여 검사를 실시하는 경우에서의 최적 검사계획과 생산시간을 결정하는 문제도 생각해 볼 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

Kim, C. H. and Hong, Y. (1996), An Optimal Production Run Length in A Deteriorating Machine, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **22**(3), 351-364.

Kim, C. H. and Hong, Y. (1997), An Optimal Production Cycle and Inspection Schedules in A Deteriorating Machine, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **23**(2), 261-273.

Kim, C. H. (2005), An EMQ Model with Rework, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **31**(2), 173-179.

Jamal, A. M. M., Sarker, B. R., and Mondal S. (2004), Optimal Manufacturing Batch Size with Rework Process at a Single-Stage Production System, *Computers and Industrial Engineering*, **47**(1), 77-89.

Lawless, J. F. (1982), Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley and Sons.

Lee, H. L. and Rosenblatt, M. J. (1987), Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules In a Production System, *Management Science*, **33**(9), 1125-1136.

Lee, H. L. and Rosenblatt, M. J. (1989), A Production and Maintenance Planning Model with Restoration Cost Dependent on Detection Delay, *IIE Transactions*, **21**(4), 368-375.

Liou, M.-J., Tseng, S.-T., and Lin, T.-M. (1994), The Effects of Inspection Errors to the Imperfect EMQ Model, *IIE Transactions*, **26**(2), 42-51.

Porteus, E. L. (1986), Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction, *Operations Research*, **34**(1), 137-144.

Rahim, M. A. (1994), Joint Determination of Production Quantity, Inspection Schedule, and Control Chart Design, *IIE Transactions*, **26**(6), 2-11.

Rosenblatt, M. J. and Lee, H. L. (1986), Economic Production Cycles with Imperfect Production Processes, *IIE Transactions*, **18**(1), 48-55.

Salameh, M. K. and Jaber, M. Y. (2000), Economic Production Quantity Model for Items with Imperfect Quality, *International Journal of Production Economics*, **64**, 59-64.

Sarkar, B. and Moon, I. K. (2011), An EPQ Model with Inflation in an Imperfect Production System, *Applied Mathematics and Computation*, **217**(13), 6159-6167.

Yano, C. A. and Lee, H. L. (1995), Lot Sizing with Random Yields : A Review, *Operations Research*, **43**(2), 311-334.

Zhang, X. and Gerchak, Y. (1990), Joint Lot Sizing and Inspection Policy in an EOQ Model with Random Yield, *IIE Transactions*, **22**(2), 41-47.