

볼륨비 이송방정식의 소스항을 이용한 자유수면 유동 해석의 해 확산 감소

박 선 호,¹ 이 신 형*²

¹한국해양대학교 해양공학과

²서울대학교 조선해양공학과

NUMERICAL DIFFUSION DECREASE OF FREE-SURFACE FLOW ANALYSIS USING SOURCE TERM IN VOLUME FRACTION TRANSPORT EQUATION

Sunho Park¹ and Shin Hyung Rhee*²

¹Dept. of Ocean Engineering, Korea Maritime and Ocean University

²Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University

Accurate simulation of free-surface wave flows around a ship is very important for better hull-form design. In this paper, a computational fluid dynamics (CFD) code, termed SNUFOAM, which is based on the open source libraries, OpenFOAM, was developed to predict the wave patterns around a ship. Additional anti-diffusion source term for minimizing a numerical diffusion, which was caused by convection differencing scheme, was considered in the volume-fraction transport equation. The influence of the anti-diffusion source term was tested by applying it to free-surface wave flow around the Wigley model ship. In results, the band width of the volume fraction contours between 0.1 to 0.9 at the hull surface was narrowed by considering the anti-diffusion term.

Key Words : 자유수면 유동(Free-surface Flow), 확산 감소 소스항(Anti-diffusion Source Term), 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics)

1. 서 론

조선해양 산업에서 물과 공기가 접촉하는 자유수면은 여전히 중요한 문제로 다루어지고 있으며, 자유수면 유동에 대한 정확한 추정에는 중요하게 요구되고 있다.

최근 전산유체역학 기술과 고성능 컴퓨터의 발달로 인해 자유수면 유동이 전산유체역학에서 많이 다루어지고 있다. 자유수면 유동을 계산하기 위해서 볼륨비 이송 방정식(volume-fraction transport equation)을 이용하는 volume-of-fluid (VOF) 방법이 많이 사용되고 있다[1-7]. VOF 방법은 자유수면이 심하게 변화하는 유동장도 계산할 수 있는 장점이 있는 반면에 볼륨비 이송 방정식을 이산화 하는 방법[1-4], 소스항[5-7] 그리고 자유수면의 격자형상[1]에 크게 영향을 받는다.

자유수면에서 해의 확산을 줄여 정도 높은 해를 계산하기 위해 상류차분과 하류차분을 혼합한 고차의 이산화 방법[1-4]이 주로 사용된다. 이러한 고차의 이산화 방법을 이용한 연구는 많이 진행된 반면에 볼륨비 이송 방정식의 소스항을 이용한 연구는 상대적으로 적게 이루어졌다. Jasak[5]은 상류차분과 외재적 시간차분에서 대류에 의한 수치 확산의 크기를 계산하였다. Jasak[5]과 Rusche[6]는 볼륨비 이송 방정식에 해의 확산을 감소시키기 위한 소스항을 고려하여 자유수면을 계산하였다. Wang et al.[7]은 해의 확산을 줄이기 위해 볼륨비 이송 방정식에 소스항을 고려하고 형태를 바꾸어서 계산하였다.

본 논문에서는 볼륨비 이송 방정식에 소스항[6,7]을 고려하여 Wigley 모형선 주위 자유수면 유동을 계산하였다. 또한, 볼륨비 물리량의 확산을 정량화하고 그 유용성을 검토하였다. 전산유체역학 해석에는 소스 공개코드를 이용하여 개발한 SNUFOAM-FS를 사용하였다. SNUFOAM-FS는 SNUFOAM-WF[8]에 볼륨비 이송 방정식과 볼륨비 이송 방정식을 차별하는 고차의 이산화 방법[1-4] 추가하여 자유수면 유동을 해석하는 전산유체역학 코드이다.

Received: August 2, 2013, Revised: March 22, 2014,
Accepted: March 24, 2014.

* Corresponding author, E-mail: shr@snu.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2014.19.1.015>

© KSCFE 2014

2. 계산 방법

2.1 수학적 모델링

속도와 압력을 계산하기 위해 질량 보존 방정식, 운동량 보존 방정식을 고려하였고, 난류를 해석하기 위해 질량 보존 방정식과 운동량 보존 방정식을 시간 평균하였고, 난류모델을 고려하였다. 공기와 물의 이 상을 정의하기 위하여 볼륨비 이송 방정식을 고려하였다.

질량보존 방정식과 운동량 보존 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_m \vec{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \vec{v}_m) = -\nabla p + \nabla \cdot (\vec{\tau}) + S \quad (2)$$

여기서, ρ 는 밀도, \vec{v} 는 속도벡터를 나타낸다. S 는 소스항을 나타내고, 소스항에는 중력가속도가 포함된다. $\vec{\tau}$ 는 응력 텐서를 나타내고 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{\tau} = \mu \left[(\nabla \vec{v}_m + \nabla \vec{v}_m^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v}_m I \right] \quad (3)$$

여기서, I 는 단위 텐서를 나타낸다. 아래첨자 m 은 혼합류를 의미하고 혼합류에서의 밀도와 점성계수는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_m = \alpha_{water} \rho_{water} + \alpha_{air} \rho_{air} \quad (4)$$

$$\mu_m = \alpha_{water} \mu_{water} + \alpha_{air} \mu_{air} \quad (5)$$

여기서, α 는 체적분율을 나타내고, 아래첨자, $water$ 과 air 는 각각 물과 공기를 의미한다.

운동량 보존 방정식을 시간평균하면 속도 및 압력은 평균화된 속도와 압력으로 바뀌고 다음과 같은 Reynolds 응력항이 추가로 나타난다.

$$-\rho_m \overline{v_m' v_m'} = \mu_t \left[(\nabla \vec{v}_m + \nabla \vec{v}_m^T) - \frac{2}{3} (\rho k + \mu_t \nabla \cdot \vec{v}_m) I \right] \quad (6)$$

여기서, μ_t 는 난류점성계수를 나타낸다. μ_t 는 Boussinesq 가설에 기반을 둔 $k-\epsilon$ 난류 모델[9]을 이용하여 계산하였다. 난류 운동 에너지(k)와 난류 소산율(ϵ)은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m k) + \nabla \cdot (\rho_m k \vec{v}_m) \\ = \nabla \cdot \left[\left(\mu_m + \frac{\mu_{m,t}}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \epsilon) + \nabla \cdot (\rho_m \epsilon \vec{v}_m) = \nabla \cdot \left[\left(\mu_m + \frac{\mu_{m,t}}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] \\ + \rho C_1 S \epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}} + C_{1\epsilon} \rho \frac{\epsilon}{k} C_{3\epsilon} G_b + S_\epsilon \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$C_1 = \max \left[0.43, \frac{Sk/\epsilon}{Sk/\epsilon + 5} \right] \quad (9)$$

$$S = \sqrt{2 \left(\nabla \vec{v}_m + \nabla \vec{v}_m^T \right)} \quad (10)$$

여기서 G_k 는 속도의 구배로 인한 난류 운동에너지 생성항을 나타내고 G_b 는 부력에 의한 난류 운동에너지 생성항을 나타낸다. C_μ , $C_{1\epsilon}$, C_2 , σ_k , σ_ϵ 는 0.09, 1.44, 1.9, 1.0, 1.2를 사용하였다. μ_t 는 $\rho_m C_\mu k^2 / \epsilon$ 로 계산되며, 벽면에는 벽함수를 적용하였다[8].

2.2 볼륨비 이송방정식

유한체적법에서 2차 정도의 수치 에러를 수치 확산으로 나타낼 수 있으며 다음과 같이 표현된다[5].

$$\nabla \cdot (\Gamma_N \nabla \phi) \quad (11)$$

위 식에서 Γ_N 은 수치 확산 텐서를 나타낸다. 아래첨자 N 은 현재 계산하고 있는 셀에 인접한(neighbour) 셀을 의미한다.

본 논문에서는 수치 확산의 정도를 평가하고 수치 확산의 정도를 볼륨비 이송 방정식의 소스항에 부호를 변경하여 적용하고자 한다. 이를 위해, 혼합(blend) 차분 도식(scheme)[10]의 수치 확산을 평가하고 수치 확산 항의 특성을 파악하고자 한다.

면에서의 flux를 ϕ 라고 하면, ϕ 는 중심 차분 도식과 혼합 차분 도식에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} (\phi_f)_{CD} &= f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N \\ (\phi_f)_{BD} &= [(1 - \gamma) \max(\text{sign}(F), 0) + \gamma f_x] \phi_P \\ &\quad + [(1 - \gamma) \min(\text{sign}(F), 0) + \gamma (1 - f_x)] \phi_N \end{aligned} \quad (12)$$

위 식에서 γ 는 혼합 계수를 나타낸다. f_x 는 내삽 계수를 나타내고, F 는 질량의 flux를 나타낸다. 면에서의 도식에 다른 flux차이는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 아래첨자 N 은 현재 계산하고 있는 셀을 의미한다. 아래첨자 CD 와 BD 는 중앙차분(central differencing)과 하류차분(backward differencing)을 나타낸다. 면에서의 값에 대해 중앙차분을 이용하면 면을 공유

한 두 셀의 내적 값을 사용하고 하류차분을 이용하면 flux의 크기를 이용하여 흐름의 방향을 정하고 흐름의 하류 방향에 있는 셀의 값을 사용한다.

$$\begin{aligned} \delta\phi_f &= (\phi_f)_{CD} - (\phi_f)_{BD} \\ &= [(1-\gamma)f_x - (1-\gamma)\max(\text{sign}(F),0) + \gamma f_x] \phi_P \\ &\quad + [(1-\gamma)(1-f_x) - (1-\gamma)\min(\text{sign}(F),0)] \phi_N \end{aligned} \quad (13)$$

표현을 좀 더 명확하게 하기 위해 F 가 0보다 크다고 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta\phi_f &= [(1-\gamma)f_x - (1-\gamma)] \phi_P + (1-\gamma)(1-f_x) \phi_N \\ &= (1-\gamma)(1-f_x)(\phi_N - \phi_P) \end{aligned} \quad (14)$$

모든 대류항에서의 flux 차이를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_f F \delta\phi_f \\ &= \sum_f S[(1-\gamma)(1-f_x)(\rho U)_f d (\nabla\phi)_f] \\ &= \sum_f S(\Gamma_N \nabla\phi)_f \end{aligned} \quad (15)$$

위의 식을 보면 면에서의 차이는 결국 확산항과 유사한 형식으로 표현되고 결국 flux의 면에서의 기울기에 의존하는 것을 알 수 있다. 또한, 격자의 거리인 d 와 선형적인 관계를 가지는 것을 알 수 있다. 그리고 격자와 유동의 흐름이 같은 방향인 경우에는 $(U)_f S$ 가 0이 되게 된다. Γ_N 는 텐서 형태의 수치 점성으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma_N = (1-\gamma)(1-f_x)(\rho U)_f d \quad (16)$$

수치 확산 텐서인 Γ_N 를 좀 더 일반적인 형태로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\Gamma_N = (1-\gamma)(\rho U)_f d \begin{bmatrix} (1-f_x)\max(\text{sign}(F),0) \\ + f_x\min(\text{sign}(F),0) \end{bmatrix} \quad (17)$$

중심 차분 도식을 선택하면 $\gamma=1$ 이 되어 수치 확산 텐서는 0이 된다. 크기가 일정한 격자($f_x=1$)에 1차 상류 차분 도식을 적용하게 되면 수치 확산 텐서는 다음과 같이 표현된다.

$$\Gamma_N = \frac{1}{2}(\rho U)_f d \quad (18)$$

위와 같은 형태의 수치 확산을 볼륨비 이송 방정식의 소스항에 부호를 변경하여 고려한다면 물과 공기의 경계면에서의 1차 상류 차분 도식에 의한 에러를 감소시킬 수 있을 것으로 예상된다[6]. 따라서, 아래와 같은 볼륨비 이송 방정식을 고려하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho_m) + \nabla \cdot (\alpha\rho_m \overline{v_m}) \\ = -C_{ad} \nabla \cdot (\alpha(1-\alpha)\overline{v_r}) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, $\overline{v_r}$ 는 면에서의 속도를 나타낸다. 오른쪽에 있는 항은 해의 확산을 감소시키기 위한 소스항이다[5,6]. C_{ad} 는 해의 확산 감소를 위한 상수를 나타낸다. C_{ad} 을 0, 0.5, 1로 변화하면서 자유수면에서의 영향을 검토하였다. 물과 공기의 경계면에서 확산 감소 소스항을 고려하기 위하여 $\alpha(1-\alpha)$ 을 고려하였다. 2차 정도의 수치에러를 이용해 위와 같은 식을 적용하였으나 저차 또는 고차의 스킴을 사용하더라도 C_{ad} 의 값을 조절하면 위의 식을 사용할 수 있을 것으로 예상된다. 소스항으로 인해 원래의 질량보존식이 변경되어 해의 수렴을 위해 예 조건화 행렬을 이용하여 계산하였다.

2.3 수치 모델링

질량 보존 방정식, 운동량 보존 방정식, 난류모델 방정식, 볼륨비 이송 방정식을 비압축성 기반 비정상 상태에서 계산하였다. 셀 중심 차분법을 사용하였으며, 속도와 압력의 연성은 PISO 알고리즘을 선택하였다[11]. 대류항은 van Leer 도식[12]으로 차분하였고, 확산항은 2차 중심차분을 사용하였다. 볼륨비는 하류차분과 중심차분을 혼합한 이산화 방법[2]을 사용하여 계산하였다. 혼합류에 대해서는 상태방정식으로부터 밀도와 점성의 변화를 계산하였다. 계산의 수렴성을 증가시키기 위해 Algebraic Multi-Grid (AMG) 방법을 사용하였고, Gauss-Seidel 반복 계산법을 이용하였다.

3. 문제 정의

Wigley 모형선은 선형이 포물선 형태로 간단하고 일반적인 선박의 파형 분포를 가지고 있기 때문에 오랜 기간 동안 연구되었다[13,14]. Wigley 모형선의 선형은 다음과 같이 정의된다.

$$y = \frac{B}{2} \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{z}{T} \right)^2 \right] \quad (20)$$

여기서, L 은 선박의 길이, B 는 선박의 폭, T 는 선박의 흘수를

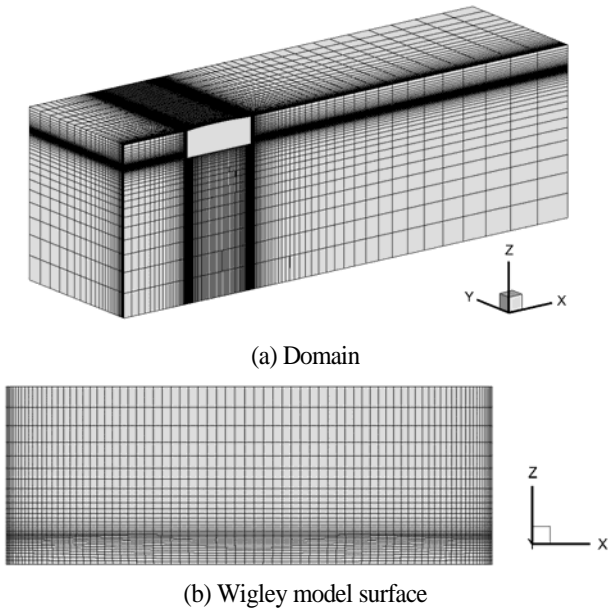


Fig. 1 Typical meshes for Wigley model ship

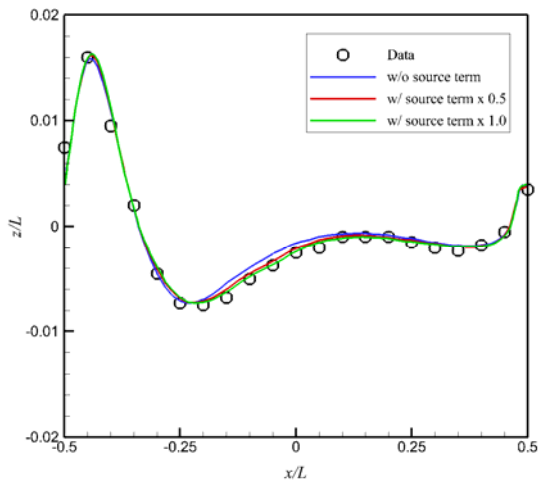


Fig. 2 Wave profile at Wigley model hull surface

나타낸다. 길이와 폭의 비(L/B)는 10, 폭과 흘수의 비(B/T)는 1.6을 사용하였다. 선박의 길이는 1 m, 흘수에서의 폭은 0.05 m, 길이는 0.289 m를 선택하였다. 계산에서는 직교 좌표계를 사용하였다. x 방향은 하류방향, y 방향은 우현방향, z 방향은 수직방향을 나타낸다.

4. 해석 결과 및 토의

Wigley 모형선의 선형이 좌우현 대칭이기 때문에 절반만 고려하였다. 계산영역의 크기는 $-1 \leq x/L \leq 5, 0 \leq y/L \leq 1.5,$

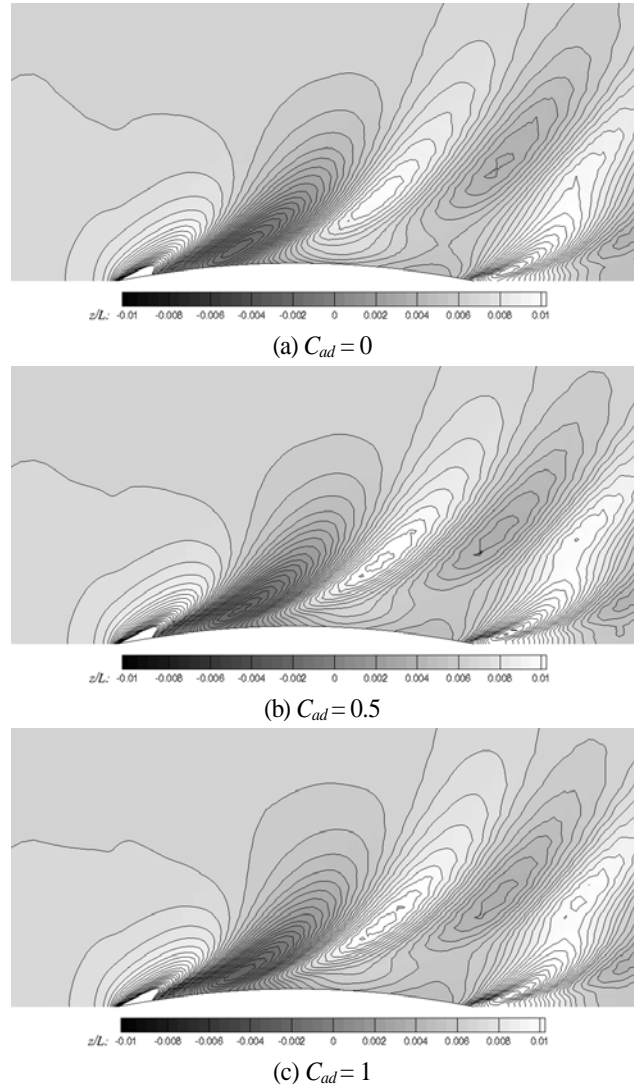


Fig. 3 Wave patterns around Wigley model ship

$-1.5 \leq z/L \leq 0.5$ 로 설정하였다[1]. 입구 경계면에는 속도를 Dirichlet 조건과 정수압 조건으로 설정하였고, 출구 경계면에는 속도와 볼륨비를 Neumann 조건으로 계산하였고 정수압 조건을 설정하였다. Wigley 모형선의 표면에는 no-slip 조건을 설정하였다. 계산은 모든 물리량들의 residual 변화가 10^{-4} 이하일 때까지 진행하였다.

Fig. 1은 계산에 사용된 격자를 보여주고 있다. 23,000개의 정렬격자를 사용하였다. Wigley 모형선 표면에는 길이 방향으로 90개, 높이 방향으로는 30개를 사용하였다. Wigley 모형선 표면의 첫 번째 격자는 $y+$ 가 평균 100 정도 되도록 생성하였다.

Fr수 0.289에서 계산을 진행하였다. 0, 0.5, 1 세 가지의 C_{ad} 에 대해 Wigley 모형선 주위 비정상상태 자유수면 유동을 계산하였다. Fig. 2는 Wigley 모형선 표면에서의 선측파고를 보

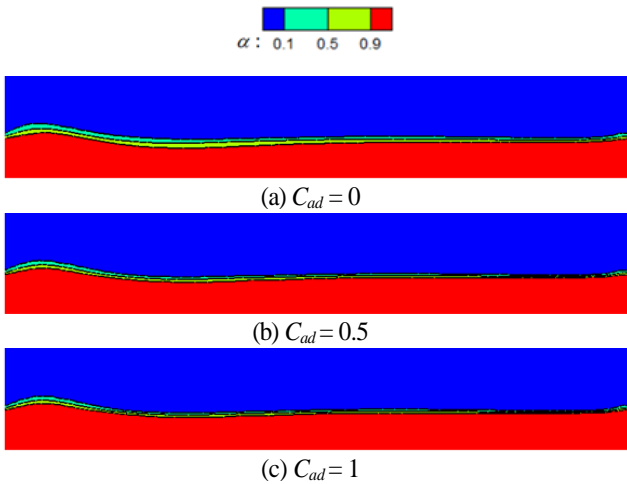


Fig. 4 Volume fraction contours on Wigley hull surface

여주고 있다. 자유수면은 볼륨비 0.5 값을 이용하여 나타내었다. C_{ad} 값과 관계없이 자유수면 분포가 거의 일정하게 계산 되었으며, 실험결과와 비교해 비교적 잘 맞는 결과를 보여주고 있다. C_{ad} 값이 증가할수록 실험결과에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 3은 C_{ad} 값에 따른 Wigley 모형선 주위의 파형을 보여 준다. 볼륨비 0.5 값에 대해 무차원화 된 파고(z/D)로 파형을 나타내었다. 비록 C_{ad} 값에 대해 모든 파형이 정확히 일치하진 않지만 C_{ad} 값 변화에 대해 파형의 형상이 완전히 달라지거나 하지 않고 거의 유사하게 계산된 것을 확인할 수 있다.

Fig. 4는 Wigley 모형선 표면에서의 공기의 볼륨비 분포를 보여준다. 볼륨비 0.1과 0.9 사이의 넓이가 C_{ad} 값이 증가할수록 줄어드는 것을 알 수 있다. Table 1은 C_{ad} 값에 따른 볼륨비 0.1과 0.9 사이의 넓이를 나타낸다. C_{ad} 값 1에서는 C_{ad} 값 0과 비교해 면적이 절반이하로 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 이 결과로부터 확산 감소 소스항이 자유수면에서 해의 확산을 감소시키는 것을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 자유수면 유동 해석에서 해의 확산 감소를 위한 소스항의 영향에 대해 연구하였다. 해의 확산 감소를 위하여 볼륨비 이송 방정식에 별도의 소스항을 고려하여 전산 유체역학 코드에 적용하였다.

Table 1 Surface area of volume fraction between 0.1 and 0.9

C_{ad}	(Area)/(Area with $C_{ad} = 0$)
0	1
0.5	0.59
1	0.45

확산 감소 소스항의 영향을 검토하기 위하여 Wigley 모형선 주위의 자유수면 유동을 계산하였다. 계산결과, 확산 감소 소스항의 고려를 통해 볼륨 비의 확산이 줄어드는 것을 확인하였다. 해의 범침 감소 소스항을 고려하였을 경우 고려하지 않은 경우보다 약 50% 정도 확산이 감소되는 것을 정량적으로 확인하였다.

후 기

이 논문은 교육과학기술부의 “첨단 사이언스 교육허브 개발사업(2010-0022835)”의 지원과 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원(2013T100200085)을 받아 수행한 연구과제입니다.

Note

This paper is a revised version of a paper presented at the KSCFE 2012 Autumn Annual meeting, Pusan National University, November 23, 2012.

References

- [1] 2009, Rhee, S.H., "Unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes method for free-surface wave flows around surface-piercing cylindrical structures," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, Vol.135, No.4, pp.135-143.
- [2] 1999, Muzaferija, S., Peric, M., Sames, P. and Schelin, T., "A two-fluid Navier-Stokes solvers to simulate water entry," *22th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Washington D.C., USA.
- [3] 1996, Ubbink, O., "Numerical prediction of two fluid systems with sharp interface," *Ph.D Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine*.
- [4] 2008, Waclawczyk, T. and Koronowicz, T., "Remarks on prediction of wave drag using VOF method with interface capturing approach," *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol.8, pp.5-14.
- [5] 1996, Jasak, H., "Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows," *Ph.D Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine*.
- [6] 2002, Rusche, H., "Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions," *Ph.D*

- Thesis, Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.*
- [7] 2009, Wang, Z., Zou, Q. and Reeve, D., "Simulation of spilling breaking waves using a two phase flow CFD model," *Computers & Fluids*, Vol.28, pp.1995-2005.
- [8] 2012, Park, S., Park, S.W., Rhee, S.H., Lee, S.B., Choi, J.-E. and Kang, S.H., "CFD code development for the prediction of the ship resistance using open source libraries," *Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.17, No.2, pp.21-27.
- [9] 1995, Shih, T.-H., Liou, W.W., Shabbir, A., Yang, Z. and Zhu, J., "A new k- ϵ eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows - model development and validation," *Computers & Fluids*, Vol.24, No.3, pp.227-238.
- [10] 1985, Peric, M., "A Finite Volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts," *Ph.D Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.*
- [11] 1985, Issa, R.I., "Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator splitting," *Journal of Computational Physics*, Vol.62, pp.40-65.
- [12] 1979, van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol.32, No.1, pp.101-136.
- [13] 1992, Journee, J.M.J., "Experiments and calculations on four Wigley hullforms," *Report No.909*, Delft University.
- [14] 1998, Beddhu, M., Jiang, M.-Y., Taylor, L.K. and Whitfield, D.L., "Computation of steady and unsteady flows with a free surface around the Wigley hull," *Applied Mathematics and Computation*, Vol.89, pp.67-84.