

구매 종속성을 고려한 부분 부재고 재고모형*

박 창 규[†]

울산대학교 경영대학

Partial Backordering Inventory Model under Purchase Dependence

Changkyu Park

College of Business, University of Ulsan

■ Abstract ■

Retail shops often experience purchase dependence in which some items are purchased together by customers due to their unknown interior associations. This paper develops an inventory model considering partial backordering under purchase dependence and compares the performance of the inventory model that ignores purchase dependence. Computational analyses show that purchase dependence should be incorporated as an important factor of inventory replenishment policy because the impact of purchase dependence can be more significant as the lost portion of the unmet demand orders increases and the item set is more correlated in terms of order demand.

Keyword : Inventory, EOQ, Partial Backordering, Correlated Demand, Purchase Dependence

1. 서 론

지금까지 알려진 재고모형 중에서 최초이면서 가장 많이 인용되는 경제적 주문량(EOQ, Economic

Order Quantity) 모형이 Harris[7]에 의해서 개발된 이후로, 수많은 논문과 책들이 다양한 조건과 가정 하에서 여러 형태의 재고모형들을 발표하여 왔다[1~3]. Harris 모형에서 비현실적이라고 비평 받는 가

논문접수일 : 2013년 09월 29일 논문게재확정일 : 2014년 01월 06일

논문수정일(1차 : 2013년 11월 13일, 2차 : 2014년 01월 03일)

* 이 논문은 2013년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2013-S1A5A2A01014883).

† 교신저자 ckparkou@ulsan.ac.kr

정들 중에 하나는 부재고를 허용하지 않는다는 것이었다. 그런데 이러한 가정(부재고를 허용하지 않음)을 완화함으로써 부재고를 고려한 새로운 재고모형들이 개발되었다. 재고가 부족할 때 고려할 수 있는 상황은 기본적으로 2가지로 부재고(backorder)와 판매손실(lost sales)이다. 부재고는 제품을 즉시 공급받지 못한 고객들이 다음 재고 보충 때에 그들의 요구가 충족되기까지 기꺼이 기다려 주는 경우를 나타낸다. 반면에 판매손실은 재고 부족에 대해 고객들이 인내하지 않고 그들이 원하는 제품을 다른 공급자로부터 구매함으로써 충족되지 않은 수요는 즉시 상실되는 경우를 나타낸다. 부재고와 판매손실이 결합된 경우 만족되지 못한 고객의 일부는 기꺼이 기다려서 다음 재고 보충 시 그들의 요구를 충족하는 반면에 다른 고객들은 그들이 원하는 제품을 구매하기 위해서 다른 공급자를 선택한다. 이러한 상황은 부분 부재고(partial backordering)로 알려져 있다.

Montgomery et al.[8]가 처음으로 부분 부재고를 고려한 기본 EOQ 모형과 그 모형의 해법절차를 제시한 이후로 그 후 40년간에 걸쳐 많은 연구자들이 부분 부재고를 고려한 기본 EOQ 모형에 대해 추가적으로 가정 사항들을 완화하는 모형을 개발하였다. 완화한 가정 사항에는 시간-종속 또는 부재고-종속 부재고 확률, 재고 가치하락, 시간-종속 또는 재고-종속 수요함수, 그리고 수량 할인과 같은 것들이 포함된다. Pentico and Drake[10]는 부분 부재고를 고려한 확정적 EOQ 모형에 대한 문헌 고찰 연구를 훌륭히 수행하였다.

비록 부분 부재고를 고려한 확정적 EOQ 모형에 대한 연구가 많이 존재하지만, 이러한 연구의 대부분은 단일품목 재고문제에 관한 것이다. 대부분의 연구들이 판매에서 수요간에는 상관관계가 없는 것으로 가정하여 독립된 수요를 재고모형에 적용하였다. 이 와중에 Zhang et al.[13]은 교차판매(cross-selling) 때문에 부 품목(minor item)의 수요가 주 품목(major item)의 수요와 상관관계를 가지는 2-품목 재고 시스템을 고려하였다. 교차판매는 한 품목의 구매가 다른 품목의 구매와 연관이 있는 상황으로 정의하였다. 다시

말해서, 주 품목의 판매가 부품목에 대한 추가적인 수요를 유도할 수도 있는 경우이다. 따라서 부 품목은 독립적으로 판매될 수도 있고 주 품목과 함께 추가적으로 판매될 수도 있다. 주 품목의 재고가 부족하면 부 품목에 대한 수요는 감소할 것이다. 추후 Zhang[12]은 여러 개의 부품목을 다룰 수 있도록 Zhang et al.[13]의 모형을 확장시켰다.

본 논문은 구매 종속성을 고려한 부분 부재고 EQO 모형을 개발하고자 한다. 구매 종속성은 다음과 같이 묘사될 수 있다. 고객은 모든 품목을 함께 구매하기를 원하기 때문에 모든 품목이 재고로 존재할 때만 품목을 구매를 한다. 이러한 구매 패턴에서 다른 모든 품목이 재고로 존재하지만 품목들 중 하나가 재고로 존재하지 않는다면, 상황은 모든 품목이 재고 부족인 경우와 동일하다. 이러한 형태의 종속성을 구매 종속성이라 정의한다.

구매 종속성은 어떤 품목들이 알려지지 않은 그들 내부의 연관관계 때문에 고객에 의해 함께 구매되어지는 것으로 소매점이나 슈퍼마켓에서 매우 빈번하게 발생하는 현상이다. Bala[4, 5]와 Bala et al.[6]은 소매 판매에서 구매 종속성을 확인하였고, Park and Seo[9]는 선박 엔진 및 발전기 부품 유통업체의 재고 운영 실태를 분석하는 과정에서 구매 종속성을 인식하였다. 문헌상에서 Bala[4, 5]와 Bala et al.[6]이 구매 종속성에 대한 개념을 처음으로 언급하였으나, 그들의 노력은 사례연구에 그치고 수리적 모형은 제시하지 못하였다. 처음으로, Park and Seo[9]가 즉시 만족되지 않는 수요주문은 모두 상실되는 상황에서 구매 종속성을 고려한 근사적인 연속 및 정기 검토 모형을 제시하였다. 본 논문이 이전의 연구들과 차이가 나는 점은 구매 종속성이 존재할 때, 즉시 만족되지 않는 수요주문이 일부는 상실되고 일부는 부재고 되는 상황을 다루는 EOQ 모형을 개발하는데 있다.

구매 종속성은 주 품목과 부 품목을 구분하지 않는다는 점에서 교차판매에 의한 수요 종속성과는 다르다. 또한 구매 종속성은 어떤 구매가 다른 구매에 의존하는 방향 종속성에 제한을 받지 않는다. 결과적으로 교차판매에 의한 수요 종속성은 구매 종속성의 특수

한 경우라고 볼 수 있다. 이러한 내용에 대한 설명은 제 5장의 후반부에서 자세히 기술할 것이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 2장은 본 논문에서 사용한 기호들을 요약한다. 제 3장에서는 부분 부재고를 고려한 단일품목 EOQ 모형을 간략히 살펴본다. 구매 종속성이 존재할 때, 제 4장은 부분 부재고를 고려한 2-품목 EOQ 모형을 제시한다. 이 때 두 품목의 주문주기가 동일하다고 가정한다. 제 5장은 2-품목 EOQ 모형을 다품목 부분 부재고 EOQ 모형으로 확장한다. 제 6장은 새로이 개발한 모형을 설명하고, 다양한 부재고율에 따라 최적 재고정책이 어떻게 반응하는지 검사하기 위한 수리적 분석을 보여준다. 마지막으로 제 7장에서는 본 논문의 결론을 제시한다.

2. 기호

이 장은 본 논문에서 사용한 기호들을 다음과 같이 요약한다.

모수

- D_i 품목 i 의 수요율(units/unit time)
- C_{oi} 품목 i 의 주문비용(\$/order)
- C_{hi} 품목 i 의 재고유지비용(\$/unit time/unit)
- C_{bi} 품목 i 의 부재고 비용(\$/unit time/unit)
- C_{li} 품목 i 의 판매손실 비용(\$/unit)
- β 부재고율
- p_m 전체 주문에서 주문유형 m 의 비율

변수

- T 주문주기
- F_i 품목 i 의 충족율, 즉 재고로 채워지는 수요의 비율
- Q_i 품목 i 의 주문량

3. 단일품목 부분 부재고 EOQ 모형

이 장은 Pentico and Drake[10]가 개발한 단일

품목 부분 부재고 EOQ 모형을 간략히 설명한다. 본 논문에서 그들의 접근방법을 활용하는 이유는 그들의 방법이 사용하기 간단하고 이해하기 쉬운 형태의 식을 생성하기 때문이다. 부재고율이 0과 1 사이의 상수($0 < b < 1$)라고 가정하면 단일품목 부분 부재고 EOQ 모형의 재고수준은 [그림 1]의 아래 부분에 있는 품목 1에 대한 재고수준과 같이 나타난다(품목 2와 품목 3에 대한 재고수준을 나타낸 그림은 무시). 여기서 재고수준을 나타내는 선의 기울기는 특정기간 동안 해당 품목의 수요율을 나타낸다.

Pentico and Drake[10]에 의해 유도된 단위시간당 평균비용은 다음과 같이 표현된다.

$$T(T, F_1) = \frac{C_{o1}}{T} + \frac{C_{h1}D_1TF_1^2}{2} + \frac{\beta C_{b1}D_1T(1-F_1)^2}{2} + C_{l1}D_1(1-\beta)(1-F_1) \quad (1)$$

식 (1)을 T 와 F_1 으로 일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음의 식을 얻는다.

$$F_1^* = \frac{(1-\beta)C_{h1} + \beta C_{b1}T^*}{T^*(C_{h1} + \beta C_{b1})} \quad (2)$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_{o1}}{D_1C_{h1}} \left[\frac{C_{h1} + \beta C_{b1}}{\beta C_{b1}} \right] - \frac{[(1-\beta)C_{h1}]^2}{\beta C_{h1}C_{b1}}} \quad (3)$$

주문량은 다음의 식과 같이 결정된다.

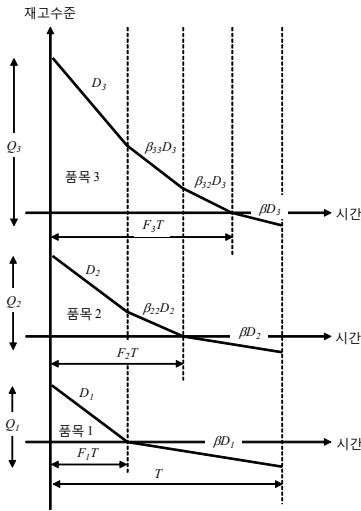
$$Q_1 = D_1F_1^*T^* + \beta D_1(1-F_1^*)T^* \quad (4)$$

식 (2)와 식 (3)이 최적해가 되기 위해서는 부재고율은 다음의 식과 같이 임계값 β^* 보다 크거나 같아야 한다.

$$\beta \geq \beta^* = 1 - \sqrt{\frac{2C_{o1}C_{h1}}{D_1C_{l1}^2}} \quad (5)$$

$\beta > \beta^*$ 이면 식 (2)와 식 (3)에 의해 계산된 T^* 와

F_1^* 는 식 (1)의 전체 최소값을 얻는다. 만약 $\beta \leq \beta^*$ 이면 최적 재고정책은 판매손실이 없게 하거나, 재고를 갖지 않고 모든 수요를 상실하는 것 중에 비용이 적게 드는 쪽이다.



[그림 1] 3-품목의 재고수준

4. 구매 종속성을 고려한 2-품목 부분 부재고 EOQ 모형

구매 종속성이 존재할 때, 한 품목의 구매는 다른 품목의 가용성에 의존할 수 있다. 고객은 한 주문에 한 개 또는 두 개의 품목을 요구한다. 한 주문에서 요구된 모든 품목들은 한번의 배송으로 모두 함께 빠른 시간 내에 전달되어야 한다. 고객은 모든 품목을 함께 구매하기를 원하기 때문에 한 품목이라도 재고로 보유하고 있지 않으면 비록 다른 품목이 재고로 있다고 하더라도 상황은 모든 품목이 재고 부족한 것과 같다.

만약 일부 고객들이 그들의 수요에 대해 부재고를 허용하여 다음 재고 보충 때까지 기꺼이 기다려 준다면 재고에 대한 의사결정은 부분 부재고 EOQ 모형에 의해 결정될 수 있다. 이러한 상황에서 재고로 존재하는 품목에 대한 수요는 재고 부족한 다

른 품목에 의해 영향을 받을 것이다. 따라서 효과적인 재고관리를 통하여 총재고비용을 최소화하기 위해서는 두 품목에 대한 공동의 재고정책을 추구하여야 한다. 이 문제를 모형화하기 위해 본 논문은 다음과 같은 사항을 가정한다.

1. 모든 모수는 알려져 있고, 무한의 시간축 상에서 상수이다.
2. 재고 보충은 조달기간이 0으로 즉시 이루어진다.
3. 주문비용은 주문의 크기와는 상관없이 항상 일정하다.
4. 부재고가 발생할 때, 재고로 존재하는 품목은 즉시 조달되고, 재고 부족한 품목은 다음 보충에 의해 채워진다.
5. 정기적인 의사소통이나 일정계획 수립을 쉽게 하기 위해서 모든 품목에 동일한 주문주기를 사용한다.

주문주기 동안에 재고수준과 수요와의 관계는 [그림 1]의 품목 1, 품목 2와 같이 보여질 것이다. 여기서 품목 1에 대한 재고 및 부재고 수준은 단일 품목 부분 부재고 EOQ 모형의 것과 동일하다. 따라서 품목 1의 주문량 Q_1 은 식 (4)에 의해 계산된다. 그러나 품목 2에 대한 재고 및 부재고 수준은 품목 1의 재고 부족에 의해 영향을 받는다. 품목 2의 주문량 Q_2 는 다음의 식에 의해 계산된다.

$$Q_2 = D_2 F_1 T + \beta_{22} D_2 (F_2 - F_1) T + \beta D_2 (1 - F_2) T \quad (6)$$

여기서 β_{22} 는 품목 2의 수요 변화율이다. [그림 1]에서 보면 품목은 $F_1 \leq F_2$ 이 되도록 배열되어 있음을 알 수 있다.

4.1 수요 변화율

[그림 1]에서 품목 1에 대한 재고가 부족할 때, 품목 2의 수요율은 품목 2가 재고로 존재하는 동안의 수요율에 β_{22} 를 곱한 것만큼 변경된다. 수요 변화율 β_{22} 를 계산하기 위해서 품목 2의 수요를 자세

히 살펴보면, 품목 2의 수요가 자체적인 독립수요와 품목 1과 결합된 수요로 구성되어 있음을 알 수 있다. 다시 말하면, 고객은 오직 품목 2만 주문하거나 품목 1과 품목 2를 같이 주문 할 수 있다. 품목 2만 주문한 독립수요는 품목 1의 재고수준에 영향을 받지 않는다.

고객주문이 <표 1>에서 보여주는 바와 같이 3가지 형태로 구성되어 있다고 가정하자. 주문형태는 어떤 품목이 요구되었는지를 보여준다. 예를 들어, 어떤 주문이 품목 1과 품목 2를 모두 요구한다면 그 주문은 주문형태 3이다. 비율 p_m 은 전체주문에서 주문형태 m 이 차지하는 부분을 나타낸다. 수요 변화율은 다음과 같이 계산된다.

$$\beta_{22} = \frac{p_2}{p_2 + p_3} + \frac{p_3}{p_2 + p_3} \beta \quad (7)$$

여기서 $0 \leq \beta \leq \beta_{22} \leq 1$ 의 조건은 항상 만족한다.

<표 1> 두 품목에 대한 주문유형

주문형태	품목		비율
	1	2	
1	1		p_1
2		1	p_2
3	1	1	p_3

4.2 부재고가 허용되지 않는 기본 EOQ 모형

$$(F_1 = F_2 = 1)$$

재고가 바닥이 나는 상황을 허용하지 않는 경우에 두 품목의 재고에 대한 정책을 결정하는 것은 간단한 기본 EOQ 문제가 된다. 단위시간당 평균비용은 다음과 같다.

$$I(T) = \frac{C_{o1} + C_{o2}}{T} + \frac{(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)T}{2} \quad (8)$$

T 에 대해서 $I(T)$ 을 일차 미분하고 0으로 놓으면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$T^* = \sqrt{\frac{2(C_{o1} + C_{o2})}{C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2}} \quad (9)$$

각 품목에 대한 주문량은 $Q_1 = D_1 T^*$ 와 $Q_2 = D_2 T^*$ 이다. 이 주문량은 $F_1 = F_2 = 1$ 으로 설정한 식 (4)와 식 (6)과 동일하다. 단위시간당 평균비용은 $I^* = \sqrt{2(C_{o1} + C_{o2})(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)}$ 이다.

4.3 부분 부재고 EOQ 모형($0 < F_1 \leq F_2 < 1$)

[그림 1]로부터 단위시간당 평균비용은 다음이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} I(T, F_2, F_1) = & \frac{C_{o1}}{T} + \frac{C_{h1}D_1 T F_1^2}{2} \quad (10) \\ & + \frac{\beta C_{o1} D_1 T (1 - F_1)^2}{2} C_{h1} D_1 (1 - \beta) (1 - F_1) \\ & + \frac{C_{o2}}{T} + \frac{C_{h2} D_2 T F_1^2}{2} \\ & + \beta_{22} C_{h2} D_2 T (F_2 - F_1) F_1 \\ & + \frac{\beta_{22} C_{h2} D_2 T (F_2 - F_1)^2}{2} \\ & + \frac{\beta C_{o2} D_2 T (1 - F_2)^2}{2} \\ & + C_{h2} D_2 [(1 - F_1) - \beta_{22} (F_2 - F_1) - \beta (1 - F_2)] \end{aligned}$$

식 (10)의 단위시간당 평균비용을 좀 더 단순화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I(T, F_1, F_2) = & \frac{G_{01}}{T} + G_{11} T F_1^2 - 2G_{12} T F_1 - G_{13} F_1 \quad (11) \\ & + G_{21} T F_2^2 - 2G_{22} T F_2 - G_{23} F_2 + G_{02} T + G_{03} \end{aligned}$$

식 (11)에 사용된 치환변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} G_{01} &= C_{o1} + C_{o2} \\ G_{11} &= \frac{C_{h1} D_1 + C_{h2} D_2 + \beta C_{o1} D_1 - \beta_{22} C_{h2} D_2}{2} \\ G_{12} &= \frac{\beta C_{o1} D_1}{2} \end{aligned}$$

$$G_{13} = C_{11}D_1(1-\beta) + C_{12}D_2(1-\beta_{22})$$

$$G_{21} = \frac{\beta C_{12}D_2 + \beta_{22}C_{11}D_2}{2}$$

$$G_{22} = \frac{\beta C_{12}D_2}{2}$$

$$G_{23} = C_{12}D_2(\beta_{22} - \beta)$$

$$G_{02} = \frac{\beta(C_{01}D_1 + C_{12}D_2)}{2}$$

$$G_{03} = (C_{11}D_1 + C_{12}D_2)(1-\beta)$$

결국, 본 논문에서 다루는 문제는 다음과 같이 묘사될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{P1} \quad & \text{minimize } \Gamma(T, F_1, F_2) \\ & \text{subject to } T > 0 \text{ and } 0 < F_1 \leq F_2 < 1 \end{aligned}$$

4.3.1 해법절차

라그랑지 승수이론(theory of Lagrange multiplier)으로부터 다음의 함수를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma(T, F_1, F_2, \lambda) = & \frac{G_{01}}{T} + G_{11}TF_1^2 - 2G_{12}TF_1 - G_{13}F_1 \quad (12) \\ & + G_{21}TF_2^2 - 2G_{22}TF_2 - G_{23}F_2 + G_{02}T \\ & + G_{03} + \lambda(F_2 - F_1) \end{aligned}$$

여기서 λ 는 라그랑지 승수이고, T^* , F_1^* , F_2^* , 그리고 λ^* 는 다음 식의 해이다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = \frac{\partial \Gamma}{\partial F_1} = \frac{\partial \Gamma}{\partial F_2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0$$

마지막 미분식 $\partial \Gamma / \partial \lambda = 0$ 으로부터 P1의 최적해는 $F_1 = F_2$ 의 조건을 만족시킴을 유추할 수 있다. <부록 C>에서 이 부분에 대한 심도 있는 고찰을 제공한다.

이제 $F = F_1 = F_2$ 로 놓고, F 에 대해서 식 (11)을 일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial F} = 2(G_{11} + G_{21})TF - 2(G_{12} + G_{22})T - (G_{13} + G_{23}) = 0$$

위 식을 간단히 정리하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$F^*(T) = \frac{2(G_{12} + G_{22})T + (G_{13} + G_{23})}{2(G_{11} + G_{21})T} \quad (13)$$

식 (13)에 G_{11} , G_{12} , G_{13} , G_{21} , G_{22} , G_{23} 을 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$F^*(T) = \frac{\beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)T + (1-\beta)(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)}{T[(C_{11}D_1 + C_{12}D_2) + \beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)]} \quad (14)$$

비슷한 방법으로 $F = F_1 = F_2$ 로 놓고, T 에 대해서 식 (11)을 일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = -\frac{G_{01}}{T^2} + (G_{11} + G_{21})F^2 - 2(G_{12} + G_{22})F + G_{02} = 0 \quad (15)$$

식 (15)을 간단히 정리하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$T^*(F) = \sqrt{\frac{G_{01}}{(G_{11} + G_{21})F^2 - 2(G_{12} + G_{22})F + G_{02}}} \quad (16)$$

식 (16)에 G_{11} , G_{12} , G_{13} , G_{21} , G_{22} , G_{23} 과 식 (14)를 대입하면 다음의 식을 얻는다.(자세한 절차는 <부록 A> 참조)

$$T^* = \sqrt{\frac{2(C_{01} + C_{02}) \left[\frac{(C_{11}D_1 + C_{12}D_2) + \beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)}{\beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)} \right]}{C_{11}D_1 + C_{12}D_2} - \frac{[(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)(1-\beta)]^2}{\beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)}}} \quad (17)$$

부분 부재고 EOQ 모형이 의미를 갖기 위해서는 부분 부재고 모형에 대한 T^* 는 기본 EOQ 모형 ($F_1 = F_2 = 1$)에 대한 T^* 보다 크거나 같아야 한다. 따라서 다음과 같은 경계가 형성된다.

$$\frac{2(C_{01} + C_{02})}{C_{11}D_1 + C_{12}D_2} \left[\frac{(C_{11}D_1 + C_{12}D_2) + \beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)}{\beta(C_{11}D_1 + C_{12}D_2)} \right] \quad (18)$$

$$-\frac{[(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)(1-\beta)]^2}{\beta(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)(C_{o1}D_1 + C_{o2}D_2)} \geq \frac{2(C_{o1} + C_{o2})}{C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2}$$

이러한 경계조건으로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 즉, T^* 와 F^* 에 대한 식 (17)과 식 (14)가 최적해가 되기 위해서는 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$\beta \geq \beta^* = 1 - \sqrt{\frac{2(C_{o1} + C_{o2})(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)}{(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)^2}} \quad (19)$$

여기서 β^* 는 부재고율의 임계값이다. <부록 B>에서 본 논문은 식 (19)에 있는 β 의 조건을 만족하면 식 (14)와 식 (17)이 구매 종속성을 고려한 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 전체 최적해를 제공한다. 이를 증명한다.

최종적으로 요약하면, 최적의 재고정책을 결정하기 위한 절차는 다음과 같다.

1. 식 (19)로부터 부재고율의 임계값 β^* 를 구한다.
2. $\beta \leq \beta^*$ 이면 식 (9)를 이용하여 기본 EOQ 모형에 대한 T^* 를 계산하고 부재고를 허용하지 않는 최적의 비용인 $\sqrt{2(C_{o1} + C_{o2})(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)}$ 을 계산한다. 이 비용을 모든 수요를 상실하는 비용인 $C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2$ 와 비교하여, 부재고를 허용하지 않는 것과 모든 수요를 상실하는 것 중에서 어느 것이 최적인지 결정한다.
3. 만약 $\beta > \beta^*$ 이면 식 (17)을 이용하여 T^* 값을 계산하고, 이 값을 식 (14)에 대입하여 F^* 의 값을 계산한다.
4. 주문량은 $Q_1 = D_1F^*T^* + \beta D_1(1-F^*)T^*$ 과 $Q_2 = D_2F^*T^* + \beta D_2(1-F^*)T^*$ 에 의해 계산된다.

5. 구매 종속성을 고려한 다품목 부분 부재고 EOQ 모형

이 장에서는 구매 종속성이 존재할 때, 제 4장에 서 다룬 2-품목 EOQ 모형을 다품목 부분 부재고

EOQ 모형으로 확장한다. 비록 [그림 1]이 3-품목에 대해서 주문주기 동안에 재고수준과 수요와의 관계를 보여주지만, k -품목에 대한 그림도 유사할 것이라는 것을 쉽게 상상할 수 있을 것이다. 여기서 $F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_i \leq \dots \leq F_k$ 라는 것을 주지하고, 품목 i 에 대한 주문량은 다음과 같이 계산된다.

$$Q_i = D_iF_iT + \sum_{j=2}^i \beta_{i(i+2-j)}D_i(F_j - F_{j-1})T + \beta D_i(1-F_i)T \quad (20)$$

k -품목에 대한 단위시간당 평균비용은 다음과 같이 확장될 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma(T, F_1, F_2, \dots, F_k) = & \frac{C_{o1}}{T} + \frac{C_{h1}D_1TF_1^2}{2} \quad (21) \\ & + \frac{\beta C_{h1}D_1T(1-F_1)^2}{2} + C_{h1}D_1(1-\beta)(1-F_1) + \frac{C_{o2}}{T} \\ & + \frac{C_{h2}D_2TF_1^2}{2} + \beta_{22}C_{h2}D_2T(F_2 - F_1)F_1 \\ & + \frac{\beta_{22}C_{h2}D_2T(F_2 - F_1)^2}{2} + \frac{\beta C_{h2}D_2T(1-F_2)^2}{2} \\ & + C_{h2}D_2[(1-F_1) - \beta_{22}(F_2 - F_1) - \beta(1-F_2)] + \dots + \\ & \frac{C_{ok}}{T} + \frac{C_{hk}D_kTF_1^2}{2} + \sum_{j=2}^k \frac{\beta_{k(k+2-j)}C_{hk}D_kT(F_j - F_{j-1})^2}{2} \\ & + \frac{\beta C_{hk}D_kT(1-F_k)^2}{2} \\ & + C_{hk}D_k \left[(1-F_1) - \sum_{j=2}^k \beta_{k(k+2-j)}(F_j - F_{j-1}) - \beta(1-F_k) \right] \\ & + \sum_{j=2}^k \beta_{k(k+2-j)}C_{hk}D_kT(F_j - F_{j-1})F_1 \\ & + \sum_{j=3}^{k-1} \sum_{i=j}^k \beta_{k(k+2-j)}C_{hk}D_kT(F_j - F_{j-1})(F_i - F_{i-1}) \end{aligned}$$

따라서 k -품목에 대한 문제는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$$\begin{aligned} P2 \text{ minimize } & \Gamma(T, F_1, F_2, \dots, F_k) \\ \text{subject to } & T > 0 \text{ and } 0 < F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_k < 1 \end{aligned}$$

P1과 유사하게, P2의 최적해도 $F_1 = F_2 = \dots = F_k$ 의 조건을 만족시킴을 유추할 수 있다.

$F = F_1 = F_2 = \dots = F_k$ 로 놓고, F 에 대해서 식 (21)을

일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial F} = TF \left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{j=1}^k C_{bi} D_i \right) - T \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i - (1-\beta) \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i = 0$$

위 식을 간단히 정리하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$F^*(T) = \frac{T \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i + (1-\beta) \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i}{T \left[\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i \right]} \quad (22)$$

유사한 방법으로 $F = F_1 = F_2 = \dots = F_k$ 로 놓고, T 에 대해서 식 (21)을 일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = - \frac{\sum_{i=1}^k C_{oi}}{T^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i}{2} \right) F^2 - F \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i + \frac{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i}{2} = 0$$

위 식을 간단히 정리하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$T^*(F) = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^k C_{oi}}{\left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i \right) F^2 - 2 F \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i + \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i}} \quad (23)$$

식 (23)에 식 (22)를 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^k C_{oi} \left[\frac{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i}{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i} \right]^2}{\left[(1-\beta) \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right]^2 + \beta \left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right) \left(\sum_{i=1}^k C_{bi} D_i \right)}} \quad (24)$$

부분 부재고 모형에 대한 T^* 는 기본 EOQ 모형

($F_1 = F_2 = 1$)에 대한 T^* 보다 크거나 같아야 하므로 다음과 같은 경계가 형성된다.

$$\frac{2 \sum_{i=1}^k C_{oi}}{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i} \left[\frac{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i}{\beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i} \right] - \frac{\left[(1-\beta) \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right]^2}{\beta \left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right) \left(\sum_{i=1}^k C_{bi} D_i \right)} \geq \frac{2 \sum_{i=1}^k C_{oi}}{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i}$$

이러한 경계 조건으로부터 부재고율의 임계값은 다음과 같이 주어진다.

$$\beta \geq \beta^* = 1 - \sqrt{\frac{2 \left(\sum_{i=1}^k C_{oi} D_i \right) \left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right)^2}} \quad (25)$$

여기서 흥미로운 사실은 다품목 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 식 (22), 식 (24), 그리고 식 (25)는 단일품목 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 식 (2), 식 (3), 그리고 식 (5)와 각각 매우 유사하다는 것이다. 마치 다품목 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 최적해를 관련된 재고비용을 다품목의 합으로 설정한 후 단일품목 부분 부재고 EOQ 모형으로 구할 수 있는 것처럼 보인다. 이러한 결과는 구매 종속성이 존재할 때 다품목 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 최적해가 $F_1 = F_2 = \dots = F_k$ 를 만족시켜야 한다는 사실 때문에 발생한다.

2-품목 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 최적 재고정책을 결정하는 절차와 유사하게, k -품목에 대한 최적 재고정책은 다음과 같다.

1. 식 (25)를 이용하여 부재고율의 임계값 β^* 를 구한다.
2. $\beta \leq \beta^*$ 이면 기본 EOQ 모형을 이용하여 부재고를 허용하지 않는 최적비용인 $\sqrt{2 \left(\sum_{i=1}^k C_{oi} \right) \left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right)}$ 을 계산한다. 부재고를 허용하지 않는 것과 모든

수요를 상실하는 것 중에서 어느 것이 최적인지를 결정하기 위해서 앞에서 계산한 최적비용과 모든 수요를 상실하는 비용인 $\sum_{i=1}^k C_{hi}D_i$ 와 비교한다.

3. 만약 $\beta > \beta^*$ 이면 식 (24)를 이용하여 T^* 값을 계산하고 그 값을 식 (22)에 대입하여 F^* 값을 계산한다.
4. 각 품목에 대한 주문량은 $Q_i = D_i F^* T^* + \beta D_i (1 - F^*) T^*$ ($i = 1, 2, \dots, k$)이다.

본 논문은 제 1장에서 교차판매에 의한 수요 종속성은 구매 종속성의 특수한 경우라고 언급하였다. 교차판매 효과를 고려한 부분 부재고 문제의 평균 비용은 $F_2 = F_3 = \dots = F_k = 1$ 로 설정된 식 (21)으로 표현될 수 있다. 이것은 교차판매 효과를 고려한 부분 부재고 문제를 $F_2 = F_3 = \dots = F_k = 1$ 라 설정한 구매 종속성을 고려한 부분 부재고 문제로 해결할 수 있다는 것을 의미한다. 그러나 본 논문의 모형을 Zhang et al.[13]과 Zhang[12]이 제시한 모형과 직접적으로 비교할 수는 없다. 그 이유는 서로 다른 가정을 사용하여 모형을 설계하였기 때문이다. 즉, 본 논문에서는 부재고가 발생할 때 재고로 존재하는 품목은 즉시 조달되며 재고 부족한 품목은 다음 보충에 의해 채워진다고 가정한다. 그러나 Zhang et al.[13]과 Zhang[12]은 미충족 되었던 주 품목의 수요가 재고 보충 시점에 만족될 때, 교차판매 효과에 의해 발생된 부 품목의 판매 수량이 순간적으로 팔린다고 가정한다.

6. 수리적 분석

6.1 수리적 예제

구매 종속성이 존재할 때 부분 부재고 EOQ 모형이 어떻게 적용되는지를 보여주기 위해서 본 논문은 세 품목으로 구성된 예제를 사용한다. 수리적 예제에 사용된 모수는 <표 2>에서 보여준다.

단계 1 : 식 (25)를 사용하여 $\beta^* = 1 - \sqrt{\frac{2 \times 2250 \times 224000}{(70500)^2}}$

$= 0.55$ 을 구한다.

단계 2 : $\beta \leq 0.55$ 일 경우, 부재고가 발생하지 않는다면 단위시간당 평균비용은 $\Gamma = \sqrt{2 \times 2250 \times 224000} = 31749.02$ 이다. 만약 모두 수요가 상실된다면 비용은 70500이 된다. 따라서 최적정책은 부재고를 허용하지 않고 기본 EOQ 모형을 사용하는 것이다.

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^3 C_{oi}}{\sum_{i=1}^3 C_{hi} D_i}} = \sqrt{\frac{2 \times 2250}{224000}} = 0.1417$$

$$Q_1 = 2000 \times 0.1417 = 283.4$$

$$Q_2 = 300 \times 0.1417 = 42.51$$

$$Q_3 = 1000 \times 0.1417 = 141.7$$

$$\Gamma^* = 31749.02$$

단계 3 : $\beta > 0.55$ 일 경우, 식 (24)와 식 (22)를 이용하여 T^* 와 F^* 를 계산한다. 예를 들어, $\beta = 0.6$ 이라면 다음과 같다.

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^k C_{oi} \left[\frac{\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i}{\beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i} \right] - \frac{[(1-\beta) \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i]^2}{\beta \left(\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i \right) \left(\sum_{i=1}^k C_{bi} D_i \right)}}{224000 \left[\frac{224000 + 0.6 \times 64000}{0.6 \times 64000} \right] - \frac{[0.4 \times 70500]^2}{0.6 \times 224000 \times 64000}} = 0.2117$$

$$F^* = \frac{T^* \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i + (1-\beta) \sum_{i=1}^k C_{hi} D_i}{T^* \left[\sum_{i=1}^k C_{hi} D_i + \beta \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i \right]} = \frac{0.2117 \times 0.6 \times 64000 + 0.4 \times 70500}{0.2117 \times (224000 + 0.6 \times 64000)} = 0.6540$$

$$Q_1 = D_1 F^* T^* + \beta D_1 (1 - F^*) T^* = 2000 \times 0.6540 \times 0.2117 + 0.6 \times 2000 \times (1 - 0.6540) \times 0.2117 = 364.80$$

$$Q_2 = 300 \times 0.6540 \times 0.2117 + 0.6 \times 300 \times (1 - 0.6540) \times 0.2117 = 54.72$$

$$Q_3 = 1000 \times 0.6540 \times 0.2117 + 0.6 \times 1000 \times (1 - 0.6540) \times 0.2117 = 182.40$$

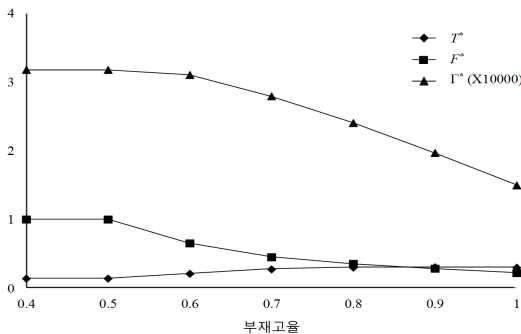
$$\Gamma^* = 31013.37$$

<표 2> 예제에 사용한 모수

모수	품목		
	1	2	3
D_i	2000	300	1000
C_{oi}	650	1000	600
C_{hi}	42	350	35
C_{bi}	12	100	10
C_{li}	12	105	15

6.2 부재고율에 따른 최적정책에 관한 분석

부재고율이 달라짐에 따라 최적정책이 어떻게 영향을 받는지 검사하기 위해서 본 논문은 부재고율을 변화시켜가며 제 6.1절에서 활용한 3-품목 EOQ 모형의 결과를 살펴본다. 임계값 $\beta^* = 0.55$ 이기 때문에 본 절에서는 부재고율을 0.4에서 0.1씩 1.0까지 증가시킨다. [그림 2]는 부재고율에 따라서 단위시간당 최적 평균비용, 최적 총족율, 그리고 최적 주문주기가 어떻게 변하는지를 보여준다.



[그림 2] 부재고율에 따른 최적결정

[그림 2]로부터 단위시간당 최적 평균 비용은 부재고율이 증가함에 따라 단조롭게 감소하는 것을 관찰할 수 있다. 이것은 더 많은 고객이 기꺼이 기다려주어 그들의 수요에 대해 부재고를 허용하면 할수록, 더 많은 이익이 실현될 수 있다는 것을 의미한다. 또한 [그림 2]는 부재고율이 적다면 최적정책은 부재고를 허용하지 않고 수요를 만족시키는 것(즉, $F^* = 1$)임을 보여준다. 반면에 부재고율이

임계값보다 더 크다면 최적정책은 부분 부재고를 고려하여 수요를 만족시키는 것이다.

6.3 구매 종속성의 영향

본 절은 재고운영비용에 미치는 구매 종속성의 영향을 보여줌으로써 구매 종속성을 고려하는 것이 재고관리에 얼마나 중요한가를 입증하고자 한다. 구매 종속성의 영향은 구매 종속성을 무시한 재고 모형의 결과와 구매 종속성을 고려한 재고모형의 결과를 비교함으로써 보여줄 수 있을 것이다. 다시 제 6.1절에서 활용한 3-품목 EOQ 모형을 이용한다. 고객 주문은 <표 3>에서 보여주는 바와 같이 7가지의 주문유형으로 구성되었다고 가정한다.

<표 3> 세 품목에 대한 주문유형

주문형태	품목			비율
	1	2	3	
1	1			p_1
2		1		p_2
3			1	p_3
4	1	1		p_4
5	1		1	p_5
6		1	1	p_6
7	1	1	1	p_7

<표 4>는 부재고율을 0.6에서 0.1씩 0.9까지 증가시켜가면서 구매 종속성을 고려한 재고모형과 구매 종속성을 무시한 재고모형에 의해 결정된 최적 재고정책을 보여준다. 구매 종속성을 무시한 다품목 부분 부재고 재고모형은 여러 개의 단일품목 부분 부재고 EOQ 모형을 독립적으로 더하여 유도할 수 있다. 단위시간당 평균비용은 다음과 같이 표현된다.

$$I(T, F_1, F_2, \dots, F_k) = \sum_{i=1}^k \left[\frac{C_{oi}}{T} + \frac{C_{hi} D_i T F_i^2}{2} + \frac{\beta C_{bi} D_i T (1 - F_i)^2}{2} + C_{li} D_i (1 - \beta)(1 - F_i) \right] \quad (26)$$

식 (26)을 F_i 에 대해 일차 편미분하여 0으로 놓

<표 4> 최적 재고정책의 비교

부재고율	구매 종속성을 고려한 경우			구매 종속성을 무시한 경우														
				비유사도 = 0.3					비유사도 = 0.5					비유사도 = 0.8				
	T	F	비용	T	F ₁	F ₂	F ₃	비용	T	F ₁	F ₂	F ₃	비용	T	F ₁	F ₂	F ₃	비용
0.6	0.21	0.65	31013.37	0.21	0.62	0.64	0.86	32067.28	0.21	0.62	0.64	0.86	31998.96	0.21	0.62	0.64	0.86	31849.20
0.7	0.28	0.45	27914.41	0.27	0.43	0.44	0.56	28430.18	0.27	0.43	0.44	0.56	28400.25	0.27	0.43	0.44	0.56	28334.64
0.8	0.30	0.36	24023.79	0.30	0.34	0.35	0.42	24287.19	0.30	0.34	0.35	0.42	24274.46	0.30	0.34	0.35	0.42	24246.54
0.9	0.31	0.29	19682.57	0.31	0.28	0.28	0.32	19792.50	0.31	0.28	0.28	0.32	19789.23	0.31	0.28	0.28	0.32	19782.06

으면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$F_i^* = \frac{(1-\beta)C_{hi} + \beta C_{bi} T^*}{T^*(C_{hi} + \beta C_{bi})}$$

식 (26)의 단위시간당 평균비용을 최소화하는 주문주기 T 는 단일변수 탐색기법(single variable search technique)을 이용하여 구할 수 있다.

구매 종속성의 정도에 따른 구매 종속성의 영향을 검사하기 위해서 본 논문에서는 구매 종속성의 정도를 측정하는 척도로서 Tsai et al.[11]가 제안한 비유사도(dissimilarity) 개념을 이용한다. 연관성 군집 알고리즘을 개발하면서 Tsai et al.[11]은 비유사도를 (1-지지도)로 정의하였다. 지지도는 데이터 마이닝 기법의 한 유형인 연관성 규칙에 의해 정의된다. 품목집합 X 의 지지도는 주문 데이터베이스 D 에서 품목집합 X 를 포함하고 있는 주문의 비율로 정의된다. 즉, 품목집합 X 의 지지도는 $|품목집합 X| / |D|$ 와 같다, 여기서 $|A|$ 는 집합 A 에 있는 원소의 수이다. 지지도의 값이 0과 1 사이이기 때문에 비유사도의 값도 0과 1의 범위에 있다. 비유사도 값, 0은 품목집합이 주문수요의 관점에서 긴밀히 연관되어 있음을 나타낸다. 반면에 비유사도 값, 1은 품목집합이 매우 낮은 수요관계를 가진다는 것을 나타낸다.

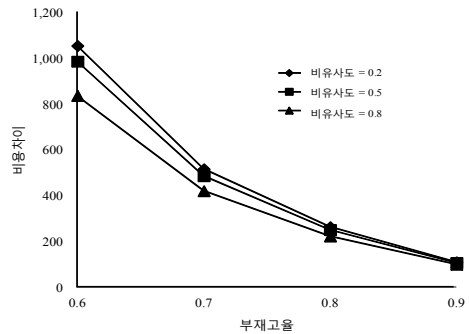
본 절은 3가지 비유사도를 고려한다. 각각의 비유사도에 대해, 본 절은 <표 3>에 있는 p_i 에 (1 - 비유사도)의 값을 할당하고, 편의를 피하기 위하여 나머지 값은 각 p_i 에 균등하게 할당한다. <표 3>에서 보여주는 7가지 주문유형에 근거한 수요 변화율은 다음과 같이 계산된다.

$$\beta_{22} = \frac{p_2 + p_6}{p_2 + p_4 + p_6 + p_7} + \frac{p_4 + p_7}{p_2 + p_4 + p_6 + p_7} \beta$$

$$\beta_{32} = \frac{p_3}{p_3 + p_5 + p_6 + p_7} + \frac{p_5 + p_6 + p_7}{p_3 + p_5 + p_6 + p_7} \beta$$

$$\beta_{33} = \frac{p_3 + p_6}{p_3 + p_5 + p_6 + p_7} + \frac{p_5 + p_7}{p_3 + p_5 + p_6 + p_7} \beta$$

<표 4>로부터 구매 종속성을 무시한 재고모형에 의해 결정된 재고정책이 구매 종속성을 고려한 재고모형에 의해 결정된 재고정책보다 단위시간당 평균비용을 더 발생시킨다는 것은 알 수 있다. 세 가지 비유사도에 대해 [그림 3]은 부재고율에 따라 구매 종속성을 고려한 모형과 구매 종속성을 무시한 모형간의 비용차이를 보여준다.



[그림 3] 비용차이에 대한 비교

[그림 3]으로부터, 부재고율이 감소함에 따라 비용차이가 단조롭게 증가하고, 또한 비유사도가 감소함에 따라 비용차이가 단조롭게 증가하는 것을 알 수 있다. 이것은 두 가지의 해석을 이끌어 낼

수 있다. 첫째로, 부재고율의 감소는 재고부족이 발생할 때 판매손실의 비율이 증가함을 의미한다. 비용차이의 증가는 구매 종속성을 무시하면 더 많은 재고운영비용을 야기할 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 고객이 참을성이 없을수록(즉시 만족되지 않는 주문수요는 손실됨), 구매 종속성의 영향은 더 뚜렷해 질 수 있다. 둘째로, 비유사도의 감소는 품목집합이 주문수요의 관점에서 더욱 긴밀히 연관됨을 의미하고, 이것은 구매 종속성의 정도가 더 높아진다는 것을 암시한다. 유사하게, 품목집합이 주문수요의 관점에서 더욱 긴밀히 연관될수록 구매 종속성의 영향은 더 뚜렷해 질 수 있다. 결국, 앞의 결과로부터 재고관리에서 구매 종속성을 고려하는 것이 중요하다는 것을 유추할 수 있다.

7. 결 론

재고보충정책을 설계하는데 어떤 품목의 구매가 동일 주문에서 요구한 다른 품목들의 가용성에 의존할 때 발생할 수 있는 구매 종속성은 아주 중요한 요소임에도 불구하고, 아직 구매 종속성에 대한 연구는 드물었다. Park and Seo[9]의 최근의 연구는 즉시 만족되지 않는 수요주문은 모두 상실되는 상황에서 구매 종속성을 고려하였으나 이와는 달리 본 논문은 구매 종속성이 존재할 때 즉시 만족되지 않은 수요주문이 일부는 상실되고 일부는 부재고 되는 상황을 다룬 EOQ 모형을 개발하였다. 부재고율과 구매 종속성의 정도를 변경시켜가며 구매 종속성을 고려한 재고모형과 구매 종속성을 무시한 재고 모형을 비교한 결과 즉시 만족시키지 못한 수요주문이 상실되는 비율이 증가할수록, 품목집합이 주문수요의 관점에서 더욱 긴밀히 연관될수록 구매 종속성의 영향은 더욱 뚜렷해진다는 것을 발견하고 따라서 재고보충정책에서 구매종속성을 고려하는 것이 중요함을 보였다. 그런데 해법절차에서 최적해를 만족시키는 라그랑지 승수의 음수성에 대한 증명은 현 상태에서는 증명되지 못하고 여러 가지 수치예를 통해 강력한 추측(conjecture)으로 남겨졌다. 이 점은 본 연구의

한계인 동시에 흥미 있는 도전과제라고 할 수 있다.

본 논문에서 제시한 EOQ 모형은 모든 품목에 대해 공통의 주문주기를 사용한다고 가정하였다. 그러나 Zhang et al.[13]이 언급한 바와 같이, 동일한 주문주기에 대한 가정은 실제 현실에서는 너무 엄격한 제약이 될 수 있다. 예를 들어, 현실적 관점에서 A 분류에 속하는 고가의 품목들은 재고관리에서 훨씬 더 중요하게 다루어지고, 재고유지비용을 낮추기 위해서 더 빈번히 재고 보충될 것이다. 따라서 향후 연구과제로 본 논문에서 제시한 EOQ 모형이 다양한 주문주기를 포함할 수 있도록 확장하는 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

- [1] 유석천, 박찬규, 정 욱, “구매가격 변동시 위험을 고려한 재고모형”, 『한국경영과학회지』, 제35권, 제4호(2010), pp.33-53.
- [2] 이경근, 문일경, 송재복, 류시욱, “공동 납품 사슬에서의 재고관리 모형”, 『한국경영과학회지』, 제31권, 제2호(2006), pp.113-127.
- [3] 이효성, “판매기회가 유실되는 생산/재고 시스템에서의 (s, S) 재고정책”, 『한국경영과학회지』, 제16권, 제1호(1991), pp.13-34.
- [4] Bala, P.K., “Identification of purchase dependencies in retail sale,” *International Journal of Strategic Management*, Vol.8, No.2 (2008), pp.75-83.
- [5] Bala, P.K., “An inventory replenishment model under purchase dependency in retail sale,” *International Journal of Computer Applications*, Vol.37, No.10(2012), pp.43-48.
- [6] Bala, P.K., S. Sural, and R.N. Banerjee, “Association rule for purchase dependence in multi-item inventory,” *Production Planning and Control*, Vol.21, No.3(2010), pp.274-285.
- [7] Harris, F., “How many parts to make at once,” *Factory, The Magazine of Management*,

- Vol.10, No.2(1913), pp.135-136, 152. *Reprinted in Operations Research*, Vol.38, No.6(1990), pp.947-950.
- [8] Montgomery, D.C., M.S. Bazaraa, and A.K. Keswani, "Inventory models with a mixture of backorders and lost sales," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.20, No.2(1973), pp.255-263.
- [9] Park, C. and J. Seo, "Consideration of purchase dependence in inventory management," *Computers and Industrial Engineering*, Vol.66, No.2(2013), pp.274-285.
- [10] Pentico, D.W. and M.J. Drake, "A survey of deterministic models for the EOQ and EPQ with partial backordering," *European Journal of Operational Research*, Vol.214, No.1(2011), pp.179-198.
- [11] Tsai, C.Y. and P.W. Huang, "An association clustering algorithm for can-order policies in the joint replenishment problem," *International Journal of Production Economics*, Vol.117, No.1(2009), pp.30-41.
- [12] Zhang, R.Q., "An extension of partial back-ordering EOQ with correlated demand caused by cross-selling considering multiple minor items," *European Journal of Operational Research*, Vol.220, No.3(2012), pp.876-881.
- [13] Zhang, R.Q., I. Kaku, and Y.Y. Xiao, "Deterministic EOQ with partial backordering and correlated demand caused by cross-selling," *European Journal of Operational Research*, Vol.210, No.3(2011), pp.537-551.

〈부 록〉

부록 A. 식 (17)의 유도 과정

$A = G_{11} + G_{21}$, $B = G_{12} + G_{22}$, $C = G_{13} + G_{23}$, 그리고 $D = G_{01}$ 라 놓으면, 식 (13)으로부터 $F = \frac{2BT+C}{2AT}$ 이 된다. 식 (15)에 F 를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{T^2} &= A \left(\frac{2BT+C}{2AT} \right)^2 - 2B \left(\frac{2BT+C}{2AT} \right) + B = \frac{4B^2 T^2 + 4BCT + C^2}{4AT^2} - \frac{2B^2 T + BC}{AT} + B \\ &= \frac{4ABT^2 - 4B^2 T^2 + C^2}{4AT^2} = \frac{B(A-B)}{A} + \frac{C^2}{4AT^2} \end{aligned}$$

여기서 $G_{02} = G_{12} + G_{22}$ 이다. 위 식을 간단히 정리하면 $T = \sqrt{\frac{4AD - C^2}{4B(A-B)}}$ 를 얻는다. T 에 A, B, C, D 을 대입하면 $T = \sqrt{\frac{4(G_{11} + G_{21})G_{01} - (G_{13} + G_{23})^2}{4(G_{12} + G_{22})(G_{11} + G_{21} - G_{12} - G_{22})}}$ 를 구할 수 있다. 마지막으로, T 에 $G_{01}, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{21}, G_{22}, G_{23}$ 를 대입하면 식 (17)을 얻을 수 있다.

부록 B. 전체 최적해에 대한 증명

$F = F_1 = F_2$ 라 놓고, 식 (11)의 평균 비용함수를 다음과 같이 다시 표현한다.

$$\Gamma(T, F) = \frac{G_{01}}{T} + TU(F) - V(F) \tag{B1}$$

여기서

$$\begin{aligned} U(F) &= (G_{11} + G_{21})F^2 - 2(G_{12} + G_{22})F + G_{02} \\ V(F) &= (G_{23} + G_{13})F - G_{03} \end{aligned}$$

식 (B1)을 T 에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = -\frac{G_{01}}{T^2} + U(F)$$

위 식을 0으로 놓으면 T 는 다음과 같이 표현된다.

$$T^*(F) = \sqrt{\frac{G_{01}}{U(F)}} \tag{B2}$$

식 (B1)에 $T^*(F)$ 를 대입하면 다음의 식은 얻는다.

$$\hat{I}(F) := \Gamma(T^*(F), F) = 2\sqrt{G_{01}U(F)} - V(F)$$

함수 $\hat{I}(F)$ 는 구간 $F \in [0, 1]$ 에서 연속이고, 각 F 값에 대해서 가능한 최소 비용을 나타낸다.
 F 에 대해서 $\hat{I}(F)$ 의 함수를 일차 및 이차 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{I}}{\partial F} &= \sqrt{G_{01}} \frac{\partial U}{\sqrt{U(F)}} - \frac{\partial V}{\partial F} = \sqrt{G_{01}} \frac{2(G_{11} + G_{21})F - 2(G_{12} + G_{22})}{\sqrt{U(F)}} - (G_{13} + G_{23}) \\ \frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial F^2} &= \sqrt{G_{01}} \frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial F^2} U(F) - \left[\frac{\partial U}{\partial F} \right]^2}{2[U(F)]^{3/2}} = \frac{2\sqrt{G_{01}} [(G_{11} + G_{21})G_{02} - (G_{12} + G_{22})^2]}{[U(F)]^{3/2}} \end{aligned}$$

여기서 모든 G 는 양의 값을 가지고, $G_{11} > G_{12}$, $G_{21} > G_{22}$, 그리고 $G_{02} = G_{12} + G_{22}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$(G_{11} + G_{21})G_{02} - (G_{12} + G_{22})^2 = (G_{12} + G_{22})[(G_{11} - G_{12}) + (G_{21} - G_{22})] > 0$$

이고

$$U(F) = (G_{11} + G_{21})F^2 - 2(G_{12} + G_{22})F + G_{02} > (G_{12} + G_{22})F^2 - 2(G_{12} + G_{22})F + (G_{12} + G_{22}) = (G_{12} + G_{22})(F-1)^2 \geq 0$$

이다. 결국, 이차 미분 $\frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial F^2}$ 는 모든 F 에 대해 양의 값을 가지므로, $\hat{I}(F)$ 은 F 에 대해서 볼록 함수(convex function)이다.

$$F=0 \text{ 이라면, } \left. \frac{\partial \hat{I}}{\partial F} \right|_{F=0} = \sqrt{G_{01}} \frac{-2(G_{12} + G_{22})}{\sqrt{G_{02}}} - (G_{13} + G_{23}) < 0 \text{ 이다. 따라서 } \hat{I}(F) \text{는 } F=0 \text{ 근처에서 단조롭게}$$

감소한다. 이것은 최적해를 $F=0$ 에서 얻을 수 없다는 것을 의미이다. 또한 $\left. \frac{\partial \hat{I}}{\partial F} \right|_{F=1} > 0$ 일 경우에 $F \in (0, 1)$ 구간에서 $\hat{I}(F)$ 의 최소치를 얻을 수 있다. 다시 말해서,

$$\left. \frac{\partial \hat{I}}{\partial F} \right|_{F=1} = \sqrt{G_{01}} \frac{2(G_{11} + G_{21}) - 2(G_{12} + G_{22})}{\sqrt{(G_{11} + G_{21}) - 2(G_{12} + G_{22}) + G_{02}}} - (G_{13} + G_{23}) > 0$$

위의 부등식에 G_{01} , G_{11} , G_{12} , G_{13} , G_{21} , G_{22} , G_{23} , $G_{02} = G_{12} + G_{22}$ 을 대입하여 간단히 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\beta > 1 - \sqrt{\frac{2(C_{01} + C_{02})(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)}{(C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2)^2}} \quad (B3)$$

이 조건은 식 (19)에서 주어진 β 에 대한 조건 중에 절대 부등식 부분에 해당한다.

결론적으로, 식 (B3)이 만족된다면 $\hat{I}(F)$ 는 $(0, 1)$ 구간에서 유일한 최소값을 가지고, 식 (B3)이 만족되지 않는다면 최소값은 기본 EOQ 해가 되는 $F=1$ 인 경계점에 위치할 것이다.

부록 C. 최적해 조건에 대한 고찰

P1의 최적해가 $F_1 = F_2$ 을 만족시키기 위해서는 쿤터커 정리에 의해 첫째로 목적함수가 F 들에 대해서 볼록함수이어야 하고, 둘째로 라그랑지 승수가 음수이어야 한다. 각 조건에 대하여 살펴보면 다음과 같다.

C.1 볼록함수의 증명

목적함수가 F 들에 대해서 볼록함수임은 다음과 같이 증명될 수 있다. 식 (11)의 평균 비용함수를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\Gamma(T, F_1, F_2) = \frac{G_{01}}{T} + TU(F_1, F_2) - V(F_1, F_2) \quad (C1)$$

여기서

$$\begin{aligned} U(F_1, F_2) &= G_{11}F_1^2 - 2G_{12}F_1 + G_{21}F_2^2 - 2G_{22}F_2 + G_{02} \\ V(F_1, F_2) &= G_{13}F_1 + F_{23}F_2 - G_{03} \end{aligned}$$

식 (C1)을 T 에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = -\frac{G_{01}}{T^2} + U(F_1, F_2)$$

위 식을 0으로 놓으면 T 는 다음과 같이 표현된다.

$$T^*(F_1, F_2) = \sqrt{\frac{G_{01}}{U(F_1, F_2)}} \quad (C2)$$

식 (C1)에 $T^*(F_1, F_2)$ 를 대입하면 다음의 식은 얻는다.

$$\hat{\Gamma}(F_1, F_2) := \Gamma(T^*(F_1, F_2), F_1, F_2) = 2\sqrt{G_{01}U(F_1, F_2)} - V(F_1, F_2)$$

함수 $\hat{\Gamma}(F_1, F_2)$ 가 볼록함수가 되려면 헤시안 행렬이 positive definite이어야 한다. F 들에 대해서 $\hat{\Gamma}(F_1, F_2)$ 의 함수를 일차 및 이차 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial F_1} &= \sqrt{G_{01}} \frac{2G_{11}F_1 - 2G_{12}}{\sqrt{U(F_1, F_2)}} - G_{13} \\ \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial F_2} &= \sqrt{G_{01}} \frac{2G_{21}F_2 - 2G_{22}}{\sqrt{U(F_1, F_2)}} - G_{23} \\ \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial F_1^2} &= \frac{2\sqrt{G_{01}}(G_{11}G_{21}F_2^2 - 2G_{11}G_{22}F_2 + G_{11}G_{02} - G_{12}^2)}{[U(F_1, F_2)]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial F_2^2} = \frac{2\sqrt{G_{01}}(G_{11}G_{21}F_1^2 - 2G_{12}G_{21}F_1 + G_{21}G_{02} - G_{22}^2)}{[U(F_1, F_2)]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial F_1 \partial F_2} = G_{11}G_{21}F_1F_2 - G_{11}G_{22}F_1 - G_{12}G_{21}F_2 + G_{12}G_{22}$$

여기서 모든 G 는 양의 값을 가지고, $G_{11} > G_{12}$, $G_{21} > G_{22}$, 그리고 $G_{02} = G_{12} + G_{22}$ 임을 알 수 있다. 헤시안 행렬의 첫 원소 $\frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial F_1^2}$ 에 대해 살펴보면

$$\begin{aligned} U(F_1, F_2) &= G_{11}F_1^2 - 2G_{12}F_1 + G_{21}F_2^2 - 2G_{22}F_2 + G_{02} \\ &> G_{12}F_1^2 - 2G_{12}F_1 + G_{12} + G_{22}F_2^2 - 2G_{22}F_2 + G_{22} \\ &= G_{12}(1-F_1)^2 + G_{22}(1-F_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} G_{11}(G_{21}F_2^2 - 2G_{22}F_2 + G_{02}) - G_{12}^2 &> G_{11}(G_{22}(1-F_2)^2 + G_{12}) - G_{12}^2 = \\ G_{11}G_{22}(1-F_2)^2 + G_{11}G_{12} - G_{12}^2 &= G_{11}G_{22}(1-F_2)^2 + G_{12}(G_{11} - G_{12}) > 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial F_1^2} > 0$ 이다.

다음으로 헤시안 행렬의 determinant을 계산하면

$$\begin{aligned} \det(H(\hat{\Gamma})) &= \frac{4G_{01}}{U(F_1, F_2)} \begin{bmatrix} (G_{11}^2 G_{21} G_{02} - G_{11} G_{12}^2 G_{21} - G_{11}^2 G_{22}^2) F_1^2 + \\ (-2G_{11} G_{12} G_{21} G_{02} + 2G_{12}^3 G_{21} + 2G_{11} G_{12} G_{22}^2) F_1 + \\ (G_{11} G_{21}^2 G_{02} - G_{11} G_{21} G_{22}^2 - G_{12}^2 G_{21}^2) F_2^2 + \\ (-2G_{11} G_{21} G_{22} G_{02} + 2G_{11} G_{22}^3 + 2G_{12}^3 G_{21} G_{22}) F_2 + \\ (G_{11} G_{21} G_{02}^2 - G_{12}^2 G_{21} G_{02} - G_{11} G_{22}^2 G_{02}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{4G_{01}}{U(F_1, F_2)} \begin{bmatrix} (G_{11}^2 G_{21} G_{12} + G_{11}^2 G_{21} G_{22} - G_{11} G_{12}^2 G_{21} - G_{11}^2 G_{22}^2) F_1^2 + \\ (-2G_{11} G_{12}^2 G_{21} - 2G_{11} G_{12} G_{21} G_{22} + 2G_{12}^3 G_{21} + 2G_{11} G_{12} G_{22}^2) F_1 + \\ (G_{11} G_{21}^2 G_{12} + G_{11} G_{21}^2 G_{22} - G_{11} G_{21} G_{22}^2 - G_{12}^2 G_{21}^2) F_2^2 + \\ (-2G_{11} G_{21} G_{22} G_{12} - 2G_{11} G_{21} G_{22}^2 + 2G_{11} G_{22}^3 + 2G_{12}^3 G_{21} G_{22}) F_2 + \\ (G_{11} G_{21} G_{12}^2 + 2G_{11} G_{21} G_{12} G_{22} + G_{11} G_{21} G_{22}^2 - \\ G_{12}^2 G_{21} G_{12} - G_{12}^2 G_{21} G_{22} - G_{11} G_{22}^2 G_{12} - G_{11} G_{22}^2 G_{22}) \end{bmatrix} \\ &> \frac{4G_{01}}{U(F_1, F_2)} \begin{bmatrix} G_{11} G_{12} G_{21} (G_{11} - G_{12})(1-F_1)^2 + \\ G_{11} G_{11} G_{22} (G_{21} - G_{22})(1-F_1)^2 + \\ G_{11} G_{22}^2 (G_{21} - G_{22})(1-F_2)^2 + \\ G_{12} G_{21} G_{22} (G_{11} - G_{12})(1-F_2)^2 \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

따라서 헤시안 행렬은 positive definite이고, 결론적으로 목적함수는 F 들에 대해서 볼록함수임을 알 수 있다.

C.2 라그랑지 승수에 대한 고찰

식 (12)로부터 $\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = \frac{\partial \Gamma}{\partial F_1} = \frac{\partial \Gamma}{\partial F_2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} = 0$ 의 조건을 만족시키는 라그랑지 승수를 구하면

$$\lambda = \frac{2(G_{22}G_{11} - G_{12}G_{21})T + G_{11}G_{23} - G_{13}G_{21}}{G_{11} + G_{21}}$$

이다. 본 연구에서는 다양한 수치적 예제에서 라그랑지 승수가 음수임을 확인하였으나, 분석적으로 라그랑지 승수가 음수임을 보이는 것은 무척 힘든 작업을 인식했다. 따라서 본 논문은 다양한 수치적 실험에 근거하여 라그랑지 승수가 음수임을 유추하는 한계가 있다.

예를 들면, 제 6장에서 사용한 3-품목 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 라그랑지 승수는 다음의 연립방정식으로부터 계산할 수 있다.

$$\frac{2G'_{12}T + G'_{13}\lambda_1}{2G'_{11}T} = \frac{2G'_{22}T + G'_{23} - \lambda_1 + \lambda_2}{2G'_{21}T}$$

$$\frac{2G'_{22}T + G'_{23} - \lambda_1 + \lambda_2}{2G'_{21}T} = \frac{2G'_{32}T + G'_{33} - \lambda_2}{2G'_{31}T}$$

여기서

$$G'_{11} = \frac{C_{h1}D_1 + \beta_1 C_{b1}D_1 + (1 - \beta_{22})C_{h2}D_2 + (1 - \beta_{33})C_{h3}D_3}{2}$$

$$G'_{12} = \frac{\beta_1 C_{b1}D_1}{2}$$

$$G'_{13} = C_{h1}D_1(1 - \beta_1) + C_{h2}D_2(1 - \beta_{22}) + C_{h3}D_3(1 - \beta_{33})$$

$$G'_{21} = \frac{\beta_1 C_{b2}D_2 + \beta_{22} C_{h2}D_2 + (\beta_{33} - \beta_{32})C_{h3}D_3}{2}$$

$$G'_{22} = \frac{\beta_1 C_{b2}D_2}{2}$$

$$G'_{23} = C_{h2}D_2(\beta_{22} - \beta_1) + C_{h3}D_3(\beta_{33} - \beta_{32})$$

$$G'_{31} = \frac{\beta_1 C_{b3}D_3 + \beta_{32} C_{h3}D_3}{2}$$

$$G'_{32} = \frac{\beta_1 C_{b3}D_3}{2}$$

$$G'_{33} = C_{h3}D_3(\beta_{32} - \beta_1)$$

<표 5>는 제 6장에서 사용한 수리적 예제에 대한 라그랑지 승수값을 부재고율에 따라 보여주고 있다. <표 5>로부터 모든 라그랑지 승수값이 음수임을 알 수 있다.

<표 5> 부재고율에 따른 라그랑지 승수값

부재고율	라그랑지 승수	
	λ_1	λ_2
0.6	-7413.09	-2034.67
0.7	-6592.76	-1796.25
0.8	-5171.71	-1405.43
0.9	-3373.90	-907.60