

# Steiner Ring Star 문제를 해결하기 위한 새로운 Mixed-Integer Programming Modeling\*

유준상<sup>1</sup> · 이영호<sup>1†</sup> · 박기경<sup>1</sup>

<sup>1</sup>고려대학교 산업경영공학부

## A New Mixed-Integer Programming Modeling for the Steiner Ring Star Problem

Junsang Yuh<sup>1</sup> · Youngho Lee<sup>1†</sup> · Gigyong Park<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Division of Industrial Management Engineering, Korea University

### ■ Abstract ■

In this paper, we deal with a Steiner Ring Star (SRS) problem arising from the design of survivable telecommunication networks. We develop two mixed integer programming formulations for the SRS problem by implementing Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) and Sarin-Sherali-Bhootha (SSB) subtour elimination constraints, and then apply the reformulation-linearization technique (RLT) to enhance the lower bound obtained by the LP relaxation. By exploiting the ring-star structure of underlying network, we devise some valid inequalities that tighten the LP relaxation. Computational results demonstrate the effectiveness of the proposed solution procedure.

Keyword : Steiner Ring Star Problem, Mixed Integer Programming, Reformulation-Linearization Technique

논문접수일 : 2013년 09월 06일 논문게재확정일 : 2013년 10월 31일

논문수정일(1차) : 2013년 10월 20일

\* 이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2012R1A1A2006847, NRF-2012H1A2A1005160).

이 논문은 고려대학교 특별연구비(2012년) 지원을 받아 수행된 연구임.

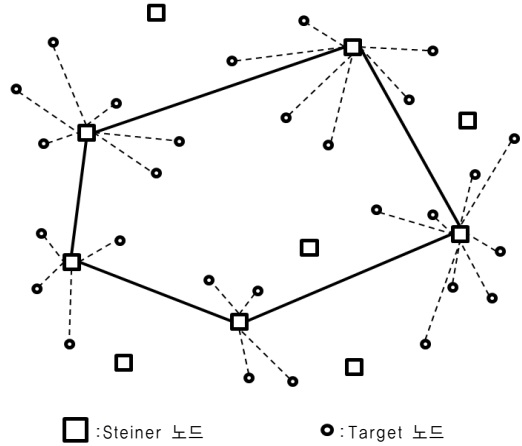
† 교신저자 yhlee@korea.ac.kr

# 1. 서 론

이 논문은 슈타이너-링-스타(Steiner Ring Star, SRS) 문제를 다룬다. SRS 문제는 주어진 그래프에서 링-스타 토폴로지 구성 비용을 최소화하는 문제이다. 그래프  $G=(V, E)$ 에서 노드(Node) 집합,  $V=M \cup N$ ,  $M \cap N = \phi$ 이며  $M$ 은 Target 노드(Target Node) 집합,  $N$ 은 Steiner 노드(Steiner Node) 집합을 나타낸다. 에지(Edge) 집합  $E = E_S \cup E_T$ 이며,  $E_S = \{(j, k) : j \in N, k(>j) \in N\}$ 으로 Steiner 노드 사이 에지 집합이고,  $E_T = \{(i, j) : i \in M, j \in N\}$ 으로 Steiner 노드와 Target 노드 사이 에지 집합이다. SRS 문제 목적은 Steiner 노드를 연결하여 단일 링 구조를 형성하고 모든 Target 노드가 가장 가까운 Steiner 노드에 연결된 스타 구조를 이루는 토폴로지 구성 비용의 최소화이다. SRS 문제에서 발생하는 비용은 세 종류이며, Steiner 노드와 Steiner 노드 사이 연결과 Target 노드와 Steiner 노드 사이에 연결에서 거리에 따른 비용이 발생한다. 그리고 링 구조를 형성하는 데 선택된 Steiner 노드인 활성 Steiner 노드(Active Steiner Node)에서 설치 비용이 발생한다. SRS 문제에서 활성 Steiner 노드가 정해지면 Steiner 노드 설치 비용과 스타 구조를 이루는 연결 비용 최소값은 쉽게 결정된다. 반면 활성 Steiner 노드로 최소 비용인 단일 링 구조를 형성하는 문제는 외판원 문제(Traveling Salesman Problem, TSP)와 같다. 따라서 TSP는 SRS 문제의 하위 문제이며, SRS 문제는 NP-난해(NP-hard)로 분류된다.

[그림 1]은 SRS 문제의 가능해를 나타낸다. Steiner 노드를 연결하는 실선이 링 구조를 나타내며 Target 노드와 Steiner 노드를 연결하는 점선이 스타 구조를 나타낸다. 링 구조에 포함된 Steiner 노드가 활성 Steiner 노드이다. 활성 Steiner 노드 설치 비용과 링 연결 비용, 그리고 Target 노드와 Steiner 노드 연결 비용은 상충 관계(trade-off)를 보인다. 활성 Steiner 노드 개수가 증가하면 Target 노드와 Steiner 노드 연결 비용은 감소하지만, 활성 Steiner 노드 설치 비용과 링 연결 비용이 증가한다. 반대로 활성 Steiner 노드 개수가 감소하면 활성 Steiner

노드 설치 비용과 링 연결 비용은 감소하지만 Target 노드와 Steiner 노드 연결 비용이 증가한다.



[그림 1] SRS 문제 예제

SRS 문제는 생존성 망 설계(Survivable Network Design) 기술에 응용된다. 트리(Tree) 구조나 버스(Bus) 구조 망에서 에지 장애가 발생하는 경우 통신이 모두 두절된다. 반면에 링-스타 구조를 이용한 망 구조는 링을 구성하는 에지에 장애가 발생하여도 반대 방향으로 경로를 선회하여 통신을 유지한다.

이 논문에서 다루는 SRS 문제와 유사한 문제로 링-스타 문제(Ring Star Problem, RSP)가 있다. RSP는 SRS 문제와 달리 Steiner 노드와 Target 노드 구분이 없으며, 노드를 연결하는 단일 링 구조를 형성하고 링에 포함되지 않은 모든 노드를 링 구조를 형성한 노드에 연결하는 그래프 구성 비용을 최소화하는 문제이다. RSP를 다룬 기존 연구로는 Labbé et al.[1]과 Simonetti et al.[9]가 있다. Labbé et al.[1]은 RSP 수리 모형과 유효 부등식을 제시하고 수리 모형을 대수학적으로 분석하며, RSP 해결을 위한 분지절단법(Branch and Cut)을 개발한다. Simonetti et al.[9]는 계층 구조 그래프(Layered Graph)를 이용한 RSP 수리 모형과 분지절단법을 개발하고 Labbé et al.[1]이 제안한 분지절단법과 비교한다. 슈타이너-트리-스타(Steiner

Tree Star, STS) 문제는 SRS 문제와 매우 유사한 문제이며 활성 Steiner 노드가 트리 구조를 이루는 토폴로지를 구성한다. Lee et al.[2]는 STS 문제에 대해 선형 완화 최적해를 잘라내는 Separation Procedure를 이용한 분지절단법을 개발한다. STS 문제는 슈타이너-트리 문제와 밀접하게 관련된다. Myung[4]는 슈타이너-트리 문제를 일반화한 그룹-슈타이너-트리 문제에 대한 새로운 수리 모형을 제시하며, 기존 수리 모형과 갖는 관계를 분석한다. 이 논문에서 다루는 SRS 문제와 같은 문제를 다룬 기존 연구로 Lee et al.[3]이 있다. Lee et al.[3]은 SRS 문제를 표현한 혼합 정수 계획법(Mixed Integer Programming)을 제시하고 휴리스틱 알고리즘과 분지절단법을 개발한다. 그러나 Lee et al.[3]이 제안한 수리 모형은 제약식이 문제 규모에 따라 기하급수적으로 증가한다. 따라서 Lee et al.[3]은 선형 완화한 최적해가 위반한 제약식을 선별하여 추가하는 Separation Procedure를 개발하여 분지절단법 효율성을 높인다.

SRS 문제는 TSP 문제와 같이 부분경로 방지 제약으로 인해 문제 복잡도가 증가한다. 부분경로 방지 제약을 다루는 방법으로 Separation Procedure 외에, 선형 완화 해공간을 축소하기 위한 방법이 있다. Reformulation-Linearization Technique(RLT)은 수리 모형을 변형하여 선형 완화 문제에 대한 최적해를 개선하는 계층적 방법론이며, 이론적으로 RLT를 이용하여 정수계획법 문제에 대한 컨벡스 헐(Convex Hull)을 구할 수 있다. Sherali et al.[7]은 비대칭 외판원문제(Asymmetric TSP, ATSP)를 해결하기 위해 Miller-Tucker-Zemlin(MTZ) 부분경로 방지 제약식(Subtour Elimination Constraint)을 이용한 TSP 수리 모형에 RLT를 적용하여 선형 완화 문제에 대한 최적해를 개선하였다. Sarin et al.[5]은 TSP 해결을 위한 Sarin-Sherali-Bhootra(SSB) 부분경로 방지 제약을 개발하여 새로운 수리 모형을 제시한다. Sherali et al.[8]은 SSB 부분경로 방지 제약식을 이용한 TSP 수리 모형에 RLT를 적용하여 효과적인 선형 완화 공간을 개발하였다. Sherali et al.[6]

은 S-factor를 이용한 RLT 모형과 Bound factor를 이용한 RLT 모형의 선형 완화 해공간을 비교하며, 변수 사이 논리적 관계를 이용하여 해공간을 줄이는 방법을 소개한다.

이 논문은 MTZ 부분경로 방지 제약식과 SSB 부분경로 방지 제약식을 이용하여 제약식 수가 다항 규모인 새로운 SRS 수리 모형을 제시하고, RLT와 유효부등식을 이용하여 선형 완화 공간을 축소한다. 이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장은 SRS 문제를 표현한 최적화 모형을 제시한다. 제 3장은 혼합 정수 계획법을 선형 완화한 최적해를 개선하기 위한 유효부등식과 RLT 적용 방법을 개발한다. 제 4장은 최적화 모형 실험 결과를 비교한다. 제 5장은 결론과 향후 연구과제를 제시한다.

## 2. 수리 모형

이 장은 SRS 수리 모형에 사용하는 집합, 모수, 그리고 결정 변수를 정의하고 수리 모형을 설명한다. 제 2.1절은 Lee et al.[3]이 제시한 기존 모형을 소개하며, 제 2.2절은 더미 노드(Dummy Node)를 이용한 최적화 모형을 개발한다. 제 2.3절은 Target 노드 기반 수리 모형을 제시한다.

### 2.1 기존 SRS 수리 모형

SRS 수리 모형에서 사용하는 집합과 모수를 다음과 같이 정의한다.

$M$  : Target 노드 집합,  $|M| = m$ ,

$N$  : Steiner 노드 집합,  $|N| = n$ ,

$c_{ij}$  : Target 노드  $i \in M$ 와 Steiner 노드  $j \in N$  연결 비용,

$d_{jk}$  : Steiner 노드  $j \in N$ 와 Steiner 노드  $k \in N$  연결 비용,

$b_j$  : Steiner 노드  $j \in N$  설치 비용.

SRS 수리 모형에서 사용하는 결정변수를 다음과

같이 정의한다.

- $x_{ij}$  : Target 노드  $i \in M$ 가 Steiner 노드  $j \in N$ 에 연결되면 1, 그렇지 않으면 0,
- $y_{jk}$  : Steiner 노드  $j \in N$ 와 Steiner 노드  $k \in N$ 가 연결되면 1, 그렇지 않으면 0,
- $z_j$  : Steiner 노드  $j \in N$ 가 설치되면 1, 그렇지 않으면 0.

Lee et al.[3]이 제시한 혼합 정수 계획법 모형은 다음과 같다.

SRS :

$$\text{Minimize } \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{j < k, k \in N} d_{jk} y_{jk} + \sum_{j \in N} b_j z_j$$

Subject to

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad i \in M, \quad (1)$$

$$x_{ij} \leq z_j, \quad i \in M, j \in N, \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} y_{(jk)} = 2z_j, \quad j \in N, \quad (3)$$

$$y_{(jk)} \leq (z_j + z_k)/2, \quad j \in N, k (\neq j) \in N, \quad (4)$$

$$\sum_{j,k \in H} y_{(jk)} \leq \sum_{j \in H - \{l\}} z_j + 1 - z_l, l \in H, t \in N - H, H \subseteq N, |H| \geq 3, \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, j \in N,$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k (> j) \in N,$$

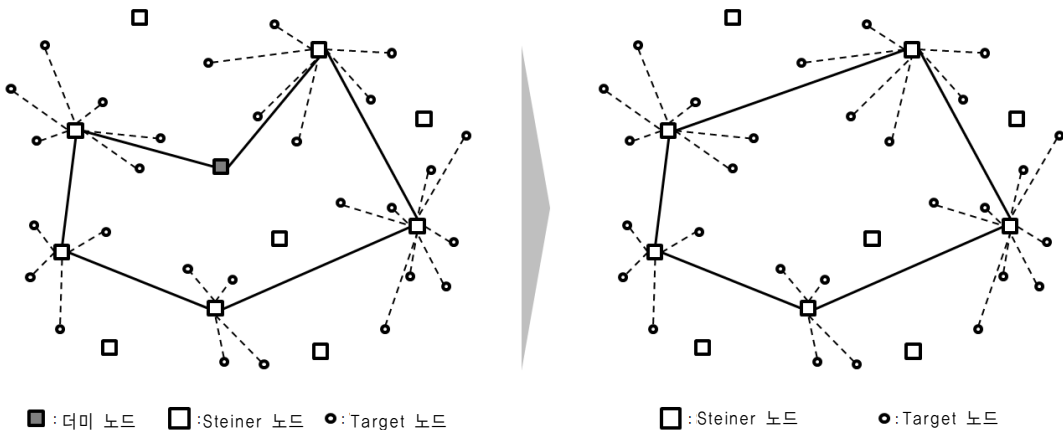
$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N.$$

$y_{(jk)}$ 는  $k > j$  이면  $y_{jk}$ , 그렇지 않으면  $y_{kj}$ 이다. 제약식 (1)은 Target 노드가 반드시 한 Steiner 노드에 할당됨을 나타낸다. 제약식 (2)는 Target 노드가 활성 Steiner 노드에 할당됨을 나타낸다. 제약식 (3)은 활성 Steiner 노드가 링 구조를 형성하기 위해 다른 두 Steiner 노드와 연결됨을 나타낸다. 제약식 (4)는 활성 Steiner 노드 사이에서 연결이 발생함을 나타낸다. 제약식 (5)는 부분경로 방지 제약식이다.

### 2.2 더미 노드를 이용한 SRS 모형

제약식 (5)는 문제 규모에 따라 기하급수로 수가 증가한다. 이 논문에서는 MTZ와 SSB 부분경로 방지 제약식을 사용한다. MTZ와 SSB 제약식을 적용하기 위해 그래프에서 방향성이 없는 에지를 방향성이 있는 아크(Arc)로 대체하며, 인덱스가 0인 더미 노드를 생성하여 링 구조를 구성하는 첫 번째 노드로 지정한다. 더미 노드와 모든 Steiner 노드  $j \in N$  연결 비용은 0이다. [그림 2(a)]는 더미 노드를 추가한 모형이 나타내는 가능해를 나타내며, [그림 2(b)]는 [그림 2(a)]가 의미하는 실제 SRS 가능해를 나타낸다.

MTZ 제약식을 이용한 SRS-MTZ 수리 모형에서 사용하는 새로운 변수는 다음과 같다.



[그림 2] 더미 노드를 포함한 해가 표현하는 실제 SRS 가능해

$u_j$  : Steiner 노드  $j \in N$ 가 터미 노드에 연결된 순서를 나타내는 정수 변수로, 터미 노드 다음 방문 노드  $j \in N$ 은  $u_j = 1$ 이며,  $j \in N$  다음 방문 노드  $k \in N$ 은  $u_k = 2$ 와 같이 결정,  
 $w_{jk}$  : Steiner 노드  $j \in N$ 와 Steiner 노드  $k \in N$ 가 터미 노드와 연결되면 1, 그렇지 않으면 0인 변수로, 터미노드를 제거했을 때 실제 가능해에서 나타나는 Steiner 노드  $j \in N$ 과  $k \in N$  사이 연결을 나타냄.

SRS-MTZ 수리 모형을 혼합 정수 계획법으로 표현하면 다음과 같다.

SRS-MTZ :

Minimize

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{k(\neq j) \in N} d_{jk} (y_{jk} + w_{jk}) + \sum_{j \in N} b_j z_j$$

Subject to

(1), (2),

$$\sum_{k(\neq j) \in N \cup \{0\}} y_{jk} = z_j, \quad j \in N \cup \{0\}, \quad (6)$$

$$\sum_{j(\neq k) \in N \cup \{0\}} y_{jk} = z_k, \quad k \in N \cup \{0\}, \quad (7)$$

$$y_{jk} \leq (z_j + z_k)/2, \quad j \in N \cup \{0\}, k(\neq j) \in N \cup \{0\}, \quad (8)$$

$$y_{jk} + y_{kj} \leq z_j, \quad j \in N \cup \{0\}, k(\neq j) \in N \cup \{0\}, \quad (9)$$

$$y_{j0} + y_{0k} \leq 1 + w_{jk}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (10)$$

$$u_0 = 0, \quad (11)$$

$$u_j - u_k + 1 \leq n(1 - y_{jk}), j \in N \cup \{0\}, k(\neq j) \in N, \quad (12)$$

$$z_0 = 1, \quad (13)$$

$$\sum_{j \in N} z_j \geq 3, \quad (14)$$

$$0 \leq u_j \leq \sum_{k \in N} z_k, \quad j \in N, \quad (15)$$

$$u_j \leq n z_j, \quad j \in N, \quad (16)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, j \in N,$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N,$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in N \cup \{0\}, k(\neq j) \in N \cup \{0\},$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \cup \{0\}.$$

제약식 (6)과 제약식 (7)은 제약식 (3)을 아크로 대체한 식이다. 제약식 (8)은 제약식 (4)와 같다. 제약식 (9)는 Steiner 노드  $j \in N \cup \{0\}$ 와  $k(\neq j) \in N \cup \{0\}$  사이를 연결하는 아크가 하나 이하로 선택됨을 나타낸다.

제약식 (10)은 터미 노드와 연결된 두 Steiner 노드를 연결하는 비용을 목적함수에 포함하도록 제약한다.  $y_{j0}$ ,  $y_{0k}$ , 그리고  $w_{jk}$ 는 모두 이진변수이며  $w_{jk}$  목적함수 계수는  $c_{jk} > 0$  이므로  $w_{jk}$ 는  $y_{j0} = y_{0k} = 1$ 일 때 1이다. 따라서  $w_{jk}$ 는 실제 SRS 문제 가능해에서 터미노드를 제거했을 때 터미노드와 연결된 Steiner 노드  $j \in N$ 와  $k \in N$  사이 연결을 나타낸다. 제약식 (11)과 제약식 (12)는 MTZ 부분경로 방지 제약식과 같다. 제약식 (13)은 터미 노드를 활성 Steiner 노드로 고정한다. 제약식 (14)는 Steiner 노드  $j \in N$  가운데 3개 이상이 활성 Steiner 노드가 되도록 제약한다. 제약식 (15)는 변수  $u_j$ 에 대한 하한과 상한을 나타낸다. 제약식 (16)은 Steiner 노드  $j \in N$ 가 비활성이면 변수  $u_j$ 가 0이 되도록 제약한다.

SSB 제약식은 방문 노드 사이 선행 관계를 나타내는 변수를 이용하여 부분경로를 방지한다. SSB 제약식을 이용한 SRS-SSB 수리 모형에서 사용하는 변수는 다음과 같다.

$v_{jk}$  : Steiner 노드  $j \in N$ 를 Steiner 노드  $k \in N$ 보다 먼저 방문하면 1, 그렇지 않으면 0.

SRS-SSB 수리 모형을 혼합 정수 계획법으로 표현하면 다음과 같다.

SRS-SSB :

Minimize

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{k(\neq j) \in N} d_{jk} (y_{jk} + w_{jk}) + \sum_{j \in N} b_j z_j$$

Subject to

(1), (2), (6)~(10), (13), (14)

$$v_{jk} \geq y_{jk}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (17)$$

$$v_{jk} \leq z_j, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (18)$$

$$v_{jk} \leq z_k, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (19)$$

$$v_{jk} + v_{kl} + v_{lj} \leq 2, \quad j, k, l \in N, j \neq k, k \neq l, l \neq j, \quad (20)$$

$$v_{jk} + v_{kj} \geq z_j + z_k - 1, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (21)$$

$$v_{jk} \geq y_{0j} + z_k - 1, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (22)$$

$$v_{kj} \geq y_{j0} + z_k - 1, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (23)$$

$$-(1 - y_{jl}) \leq v_{jk} - v_{lk} \leq 1 - y_{jl}, \quad j, k, l \in N, j \neq k, k \neq l, l \neq j, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
v_{jk} + v_{kj} &\leq z_j, & j \in N, k(\neq j) \in N, & (25) \\
x_{ij} &\geq 0, & i \in M, j \in N, \\
v_{jk} &\geq 0, & j \in N, k(\neq j) \in N, \\
w_{jk} &\in \{0, 1\}, & j \in N, k(\neq j) \in N, \\
y_{jk} &\in \{0, 1\}, & j \in N \cup \{0\}, k(\neq j) \in N \cup \{0\}, \\
z_j &\in \{0, 1\} & j \in N \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

제약식 (17)은 Steiner 노드  $j \in N$ 에서 Steiner 노드  $k \in N$ 로 아크가 선택되면 Steiner 노드  $j \in N$ 를 Steiner 노드  $j \in k$ 보다 먼저 방문하는 관계를 나타낸다. 제약식 (18)과 제약식 (19)는 Steiner 노드  $j \in N$ 가 비활성이면 변수  $v_{jk}$ 와  $v_{kj}$ 가 0임을 나타낸다. 제약식 (20)은 부분경로를 방지한다. 제약식 (21)은 Steiner 노드  $j \in N$ 와 Steiner 노드  $k \in N$ 가 활성 Steiner 노드인 경우 둘 사이에 선행 관계가 있음을 나타낸다. 제약식 (22)와 제약식 (23)은 더미 노드와 연결된 활성 Steiner 노드  $j \in N$ 와 다른 활성 Steiner 노드  $k \in N$  사이 선행 관계를 나타낸다. 제약식 (24)는 Steiner 노드  $j \in N$ 와 Steiner 노드  $k \in N$ 을 연결하는 아크가 선택된 경우 Steiner 노드  $j \in N, k \in N, l \in N$  사이 선행 관계를 나타낸다.

### 2.3 Target 노드를 이용한 수리 모형

더미 노드를 이용한 수리 모형 이외에 특정 Target 노드가 할당된 Steiner 노드를 시작 노드로 하여 MTZ 제약식과 SSB 제약식을 적용할 수 있다. 여기서 인덱스가 1인 Target 노드가 할당된 Steiner 노드를 시작 노드로 지정한다. Target 노드를 이용한 SRS-MTZ2 모형은 다음과 같다.

SRS-MTZ2 :

Minimize

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{k(\neq j) \in N} d_{jk} y_{jk} + \sum_{j \in N} b_j z_j$$

Subject to

$$(1), (2), (15), (16)$$

$$\sum_{k(\neq j) \in N} y_{jk} = z_j \quad j \in N, \quad (26)$$

$$\sum_{j(\neq k) \in N} y_{jk} = z_k, \quad k \in N, \quad (27)$$

$$y_{jk} \leq (z_j + z_k)/2, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (28)$$

$$y_{jk} + y_{kj} \leq z_j, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (29)$$

$$x_{1j} \leq u_j, \quad j \in N \quad (30)$$

$$u_j - u_k + 1 \leq n(1 - y_{jk} + x_{1k}), j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (31)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i(\neq 1) \in M, j \in N,$$

$$x_{1j} \in \{0, 1\}, \quad j \in N,$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N,$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N.$$

제약식 (26)~제약식 (29)는 제약식 (6)~제약식 (9)에서 더미 노드를 제거한 형태이다. 제약식 (30)은 인덱스가 1인 Target 노드가 할당된 Steiner 노드가 첫 번째 방문 노드임을 나타낸다. 제약식 (31)은 제약식 (12)를 Target 노드를 이용한 모형에 적합하도록 변형한 형태이다.

Target 노드를 이용한 SRS-SSB2 수리 모형을 혼합 정수 계획법으로 표현하면 다음과 같다.

SRS-SSB2 :

Minimize

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{k(\neq j) \in N} d_{jk} y_{jk} + \sum_{j \in N} b_j z_j$$

Subject to

$$(1), (2), (18) \sim (21), (25) \sim (29),$$

$$v_{jk} \geq y_{jk} - x_{1k}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (32)$$

$$v_{jk} \geq x_{1j} + z_k - 1, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (33)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i(\neq 1) \in M, j \in N,$$

$$v_{jk} \geq 0, \quad j \in N, k(\neq j) \in N,$$

$$x_{1j} \in \{0, 1\}, \quad j \in N,$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N,$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N.$$

제약식 (32)와 제약식 (33)은 제약식 (17)과 제약식 (22)를 Target 노드를 이용한 모형에 적합하도록 변형한 형태이다.

**Proposition 1** : SRS-MTZ2 수리 모형은 SRS 문제 해 집합을 표현한다.

증명) SRS 문제 해는 그래프  $G = ((V_S, V_T), (E_S, E_T))$ 에 대한 부분그래프  $\bar{G} = ((\bar{V}_S, V_T), (\bar{E}_S, \bar{E}_T))$ 로 나타난다. 여기서  $V_S (= N)$ 는 Steiner 노드 집합,  $V_T (= M)$ 는 Target 노드 집합이며  $E_S$ 는 Steiner 노드 사이 에지 집합,  $E_T$ 는 Steiner 노드와 Target 노드 사이 에지 집합이다.

주어진 부분그래프에 대한 SRS-MTZ2 수리 모형 가능해가 존재함을 보이기 위해  $\bar{V}_S$ 에서 1번 Target 노드가 할당된 노드를 선택해  $v_1$ 이라 하고,  $v_1$ 과 연결된 두 Steiner 노드 가운데 임의의 노드를 선택해  $v_2$ 라 한다.  $v_2$ 와 연결된 두 Steiner 노드 가운데  $v_1$ 이 아닌 노드를  $v_3$ 라 하고, 마찬가지로  $v_4, \dots, v_{|\bar{V}_S|}$ 를 정의한다. 따라서  $\bar{V}_S = \{v_1, v_2, \dots, v_{|\bar{V}_S|}\}$ 이다. 또한  $\bar{E}_S$ 를 아크로 대체하여  $\bar{A}_S = \{(v_i, v_{i+1}), i = 1, \dots, |\bar{V}_S| - 1, (v_{|\bar{V}_S|}, v_1)\}$ 로 정의한다. 이 때 SRS-MTZ2 수리 모형 변수 값을 다음과 같이 정한다.

$$x_{v_j} = 1, \forall (i, v_j) \in \bar{E}_T, y_{v_j v_k} = 1, \forall (v_j, v_k) \in \bar{A}_S, z_{v_j} = 1, \forall v_j \in \bar{V}_S, u_{v_j} = j, \forall v_j \in \bar{V}_S,$$

나머지 변수는 0.  $(x, y, z, u)$ 는 위에서와 같이 제약식 (1)과 제약식 (2)를 만족한다. 아크  $a \in \bar{A}_S$ 는 링을 구성하는 Steiner 노드 사이 연결을 나타내며,  $\bar{A}_S$  정의에 따라  $(x, y, z, u)$ 는 제약식 (26)~제약식 (29)를 만족한다. 부분그래프 정의에 따라  $(1, v_1) \in \bar{E}_T$ 이며, 변수  $u_1$ 은 1값을 갖기 때문에  $(x, y, z, u)$ 는 제약식 (30)을 만족한다.  $\bar{V}_S$  정의와  $u_j$  정의에 따라  $(x, y, z, u)$ 는 제약식 (15), 제약식 (16)과 제약식 (31)을 만족한다. 따라서 SRS 문제 해는 SRS-MTZ2 수리 모형에서 가능해로 나타난다.

다음으로, SRS-MTZ2 수리 모형 최적해에 대해 SRS 문제 해인 부분그래프가 존재함을 보인다. SRS-MTZ2 수리 모형 최적해를  $(x, y, z, u)$ 라 하자. 이 때  $z_j \in \{0, 1\}, \forall j \in N$  이므로 SRS 수리 모형 목적함수에 따라  $i \in M$ 에 대해  $j_i = \operatorname{argmin}_{j \in N} \{c_{ij} : z_j = 1\}$  이면  $x_{j_i} = 1$ 이며,  $x_{ij} = 0, \forall j (\neq j_i) \in N$ 이다. 따라서  $x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in M, j \in N$ 이다. 부분그래프  $\bar{G} = ((\bar{V}_S, V_T), (\bar{E}_S, \bar{E}_T))$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{V}_S (\subseteq V_S) &= \{j : z_j = 1\}, \bar{E}_S (\subseteq E_S) \\ &= \{(j, k) : y_{jk} + y_{kj} = 1\}, \bar{E}_T (\subseteq E_T) = \{(i, j) : x_{ij} = 1\}. \end{aligned}$$

$(x, y, z, u)$ 가 제약식 (1)과 제약식 (2)를 만족하기 때문에  $\bar{G}$ 에서 Target 노드가 반드시 한 활성 Steiner 노드에 할당된다.  $(x, y, z, u)$ 가 제약식 (26)~제약식 (29)를 만족하기 때문에  $\bar{G}$ 에서 활성 Steiner 노드는 다른 두 활성 Steiner 노드와 연결된다. 마지막으로  $(x, y, z, u)$ 가 제약식 (15), 제약식 (16), 제약식 (30), 그리고 제약식 (31)을 만족하기 때문에 활성 Steiner 노드는 부분경로를 형성하지 않는다. 따라서 SRS-MTZ2 수리 모형 최적해는 SRS 문제 해로 나타난다.  $\square$

**Proposition 2 :** SRS-SSB2 수리 모형은 SRS 문제 해 집합을 표현한다.

증명) Proposition 1 증명과 같이, SRS 문제 해를 표현하는 부분그래프는 SRS-SSB2 수리 모형에서 가능해로 나타남을 보이고, SRS-SSB2 수리 모형 최적해는 SRS 문제 해를 표현하는 부분그래프로 나타남을 보임으로써 증명된다.  $\square$

**Proposition 3 :** SRS-MTZ 수리 모형의 선형 완화 최적해 목적함수 값을  $\nu(\text{MTZ})$ , SRS-MTZ2 수리 모형의 선형 완화 최적해 목적함수 값을  $\nu(\text{MTZ2})$ 라 하면  $\nu(\text{MTZ}) \leq \nu(\text{MTZ2})$ 이다.

증명) 선형 완화한 SRS-MTZ2 수리 모형에서 임의의 가능해를  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ 라 하자. Steiner 노드 집합  $N_{0k}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$N_{0k} = \{k \in N : \bar{x}_{1k} > 0\}.$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ 는 제약식 (1)을 만족하기 때문에  $N_{0k} \neq \emptyset$ 이다. 다음으로 Steiner 노드 집합  $N_{j0}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$N_{j0} = \{j \in N : \bar{y}_{jk} > 0, k \in N_{0k}\}.$$

제약식 (1), (2), 그리고 제약식 (27)에서  $N_{j_0} \neq \phi$  이며  $\sum_{j \in N_{j_0}} \sum_{k \in N_{0k}} \bar{y}_{jk} \geq 1$ 이다.  $\sum_{j \in N_{j_0}} \sum_{k \in N_{0k}} \bar{y}_{jk} \geq 1$  이기 때문에 다음과 같은  $\hat{y}$ 이 존재한다.

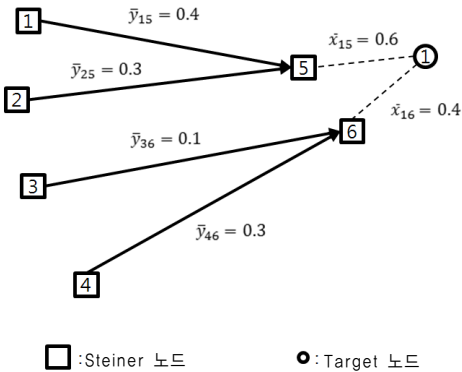
$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_{j_0}} \hat{y}_{j_0} &= 1, \\ \sum_{j \in N_{0k}} \hat{y}_{0k} &= 1, \\ \sum_{k(\neq j) \in N_{0k}} \hat{y}_{jk} &= \sum_{k(\neq j) \in N_{0k}} \bar{y}_{jk} - \hat{y}_{j_0}, \quad \forall j \in N_{j_0}, \\ \sum_{j(\neq j) \in N_{j_0}} \hat{y}_{jk} &= \sum_{j(\neq k) \in N_{j_0}} \bar{y}_{jk} - \hat{y}_{0k}, \quad \forall k \in N_{0k}, \\ \bar{y}_{jk} &\geq \hat{y}_{jk}, \quad \forall j \in N_{j_0}, \forall k \in N_{0k}, \\ \hat{y}_{jk} &= \bar{y}_{jk}, \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

다음으로,  $\hat{x}_{ij}$ ,  $\hat{z}_j$ ,  $\hat{u}_j$ , 그리고  $\hat{w}_{jk}$ 를 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ij} &= \bar{x}_{ij}, \quad \forall i \in M, \quad \forall j \in N, \quad \hat{z}_j = \bar{z}_j, \quad \forall j \in N, \quad \hat{z}_0 = 1, \\ \hat{u}_j &= \bar{u}_j, \quad \forall j \in N, \quad \hat{u}_0 = 0, \quad \hat{w}_{jk} = \max\{0, \hat{y}_{j_0} + \hat{y}_{0k} - 1\}, \\ &\quad \forall j, k \in N. \end{aligned}$$

$j \in N_{j_0}$ 와  $k \in N_{0k}$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k(\neq j) \in N \cup \{0\}} \hat{y}_{jk} &= \sum_{k(\neq j) \in N \setminus N_{0k}} \bar{y}_{jk} + \sum_{k(\neq j) \in N_{0k}} \hat{y}_{jk}, \\ \hat{y}_{jk} + \hat{y}_{j_0} &= \sum_{k(\neq j) \in N} \bar{y}_{jk}, \quad \forall j \in N_{j_0}, \end{aligned}$$



(a) SRS-MTZ2 수리 모형 해

$$\begin{aligned} \sum_{j(\neq k) \in N \cup \{0\}} \hat{y}_{jk} &= \sum_{j(\neq k) \in N \setminus N_{j_0}} \bar{y}_{jk} + \sum_{j(\neq k) \in N_{j_0}} \hat{y}_{jk}, \\ \hat{y}_{jk} + \hat{y}_{0k} &= \sum_{j(\neq k) \in N} \bar{y}_{jk}, \quad \forall k \in N_{0k}, \end{aligned}$$

또한  $k \in N_{0k}$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

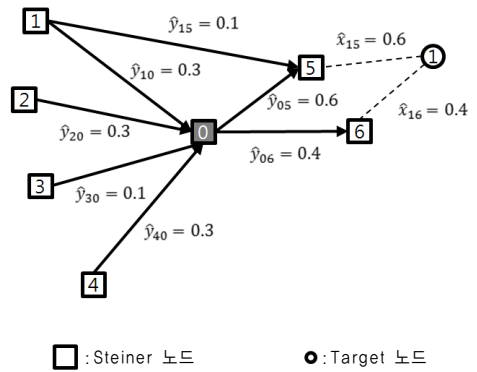
$$\begin{aligned} \hat{u}_j - \hat{u}_k + 1 &\leq n(1 - \bar{y}_{jk} + \bar{x}_{1k}) \leq n(1 - \hat{y}_{jk} + \hat{x}_{1k}), \\ &\quad \forall j \in N_{j_0}, \quad (\because \hat{y}_{jk} \leq \bar{y}_{jk}) \\ \hat{u}_0 - \hat{u}_k + 1 &\leq n(1 - \hat{y}_{jk} + \hat{x}_{1k}), \quad (\because \hat{u}_0 = 0) \end{aligned}$$

따라서  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{u})$ 은 선형 완화한 SRS-MTZ 수리 모형 제약식을 모두 만족한다. 이 때  $\forall j \in N_{j_0}$ ,  $\forall k \in N_{0k}$ 에 대해  $\tilde{y}_{jk} = \bar{y}_{jk} - \hat{y}_{jk}$ 이라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_{j_0}} \sum_{k \in N_{0k}} \tilde{y}_{jk} &= 1, \\ \sum_{k \in N_{0k}} \tilde{y}_{jk} &= \hat{y}_{j_0}, \quad \forall j \in N_{j_0}, \\ \sum_{j \in N_{j_0}} \tilde{y}_{jk} &= \hat{y}_{0k}, \quad \forall k \in N_{0k}, \end{aligned}$$

이 때 어떤  $j \in N_{j_0}$ 와  $k \in N_{0k}$ 에 대해  $\hat{w}_{jk} = \hat{y}_{j_0} + \hat{y}_{0k} - 1 > 0$ 이면 다음 식이 성립한다.

$$\hat{w}_{jk} = \hat{y}_{j_0} + \hat{y}_{0k} - 1 = \sum_{k \in N_{0k}} \tilde{y}_{jk} + \sum_{j \in N_{j_0}} \tilde{y}_{jk} - 1$$



(b) SRS-MTZ 수리 모형 해

[그림 3] SRS-MTZ2 수리 모형과 SRS-MTZ 수리 모형 해 치환 과정 예제



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in N_{0k}} \tilde{y}_{jk} + \sum_{j \in N_{j0}} \tilde{y}_{jk} \\
&- \sum_{j \in N_{j0}} \sum_{k \in N_{0k}} \tilde{y}_{jk} \\
&= \tilde{y}_{jk} - \sum_{j'(\neq j) \in N_{j0}} \sum_{k'(\neq k) \in N_{0k}} \tilde{y}_{j'k'}
\end{aligned}$$

그러므로  $\tilde{y}_{jk} \geq \hat{w}_{jk}$ ,  $\forall j \in N_{j0}$ ,  $\forall k \in N_{0k}$  이며  $\bar{y}_{jk} = \hat{y}_{jk} + \tilde{y}_{jk} \geq \hat{y}_{jk} + \hat{w}_{jk}$  이다. 따라서  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{u})$  목적함수 값은  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$  목적함수 값보다 작거나 같다. 선형 완화한 SRS-MTZ2 수리 모형에서 임의의 가능해  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ 에 대해 목적함수 값이 작거나 같은 선형 완화한 SRS-MTZ 수리 모형 가능해가 항상 존재하므로,  $\nu(\text{MTZ}) \leq \nu(\text{MTZ2})$ 이다.  $\square$

[그림 3]은 Proposition 3 증명에서 사용한  $y$  변수 치환 과정 예제를 나타낸다. [그림 3(a)]는 SRS-MTZ2 수리 모형 해를 나타내며, [그림 3(b)]는 SRS-MTZ2 수리 모형 해를 SRS-MTZ 수리 모형으로 치환한 해를 나타낸다. [그림 3(b)]와 같은 경우  $\hat{w}_{jk}$ 를 모두 0으로 정해도 제약식을 위배하지 않으며, [그림 3(a)] 목적함수 값보다 작은 목적함수 값을 갖는다.

**Proposition 4** : SRS-SSB 수리 모형의 선형 완화 최적해 목적함수 값을  $\nu(\text{SSB})$ , SRS-SSB2 수리 모형의 선형 완화 최적해 목적함수 값을  $\nu(\text{SSB2})$ 라 하면  $\nu(\text{SSB}) \leq \nu(\text{SSB2})$ 이다.

증명) 선형 완화한 SRS-SSB2 수리 모형 가능해  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{v})$ 를 Proposition 3 증명 과정과 같이 변형하여 더미 노드를 포함한 해  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{v})$ 를 구하고, SRS-SSB 수리 모형 제약율 모두 만족함을 보임으로써 증명된다.  $\square$

### 3. 하한 개선

이 장은 개발한 수리 모형에 대한 선형 완화 최적해를 개선하기 위한 방법을 제시한다. 제 3.1절은 SRS 문제 구조를 이용한 유효 부등식을 개발

하여 하한을 개선한다. 제 3.2절은 SRS 수리 모형에 RLT를 적용하여 하한을 개선한다.

#### 3.1 유효 부등식(Valid Inequality)

유클리드 공간에서 정의된 SRS 문제 구조를 이용하여 Steiner 노드  $j \in N$ 와 Steiner 노드  $k \in N$  사이 비용 구조에 따른 유효 부등식을 생성한다. Steiner 노드  $k \in N$ 를 링 구조에 포함하면 Steiner 노드  $k \in N$  설치 비용이 발생하며 Target 노드 연결 비용은 변하지 않거나 감소한다. 링 연결 비용은 변하지 않거나 증가한다.  $\delta_k$ 는 Steiner 노드  $k \in N$ 를 설치할 때 비용 변화량이며,  $\delta_k > 0$ 이면 Steiner 노드  $k \in N$ 는 설치되지 않는다. Steiner 노드  $j \in N$ 가 활성 Steiner 노드라면,  $\delta_k \geq b_k - \sum_{i \in M: c_{ij} > c_{ik}} (c_{ij} - c_{ik})$ 이며,  $\delta_k$ 가 0보다 크면  $z_k \leq 1 - z_j$ 가 성립한다. 따라서  $b_k - \sum_{i \in M: c_{ij} > c_{ik}} (c_{ij} - c_{ik}) > 0$ 인  $j \in N, k(\neq j) \in N$ 에 대해 제약식  $z_k + z_j \leq 1$ 이 성립한다. 또한 제약식 (8), 제약식 (28)과  $y_{jk} \in \{0, 1\}$ ,  $j \in N, k(\neq j) \in N$ 에 따라  $z_k + z_j < 1$ 인  $j \in N, k(\neq j) \in N$ 에 대해  $y_{jk} = y_{kj} = 0$ 이다. 따라서 여기서 개발한 유효 부등식은 전처리 효과도 갖는다.

이 절에서 개발한 유효 부등식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
z_j + z_k &\leq 1, \quad j \in N, k \in N: b_k - \sum_{i \in M: c_{ij} > c_{ik}} (c_{ij} - c_{ik}) > 0. \\
y_{jk} = y_{kj} &= 0, \quad j \in N, k \in N: b_k - \sum_{i \in M: c_{ij} > c_{ik}} (c_{ij} - c_{ik}) > 0.
\end{aligned}$$

#### 3.2 RLT 적용

RLT는 Reformulation 과정과 Linearization 과정으로 구성된다. Reformulation 과정에서는 이진 변수에 대한 상한과 하한을 이용한 요소나, 제약식을 이용한 요소를 서로 곱하여 새로운 제약식을 생성하며, 이진 변수인  $x_j$ 에 대해  $x_j = x_j^2$ 을 적용한다. Linearization 과정에서는 변수 사이 곱으로 나타난 비선형 항을 선형 변수로 치환한다. RLT 기법을 통해 실수 해공간을 줄여 선형 완화한 문제에 대한 최적해 값을 개선할 수 있다.

Proposition 3과 4에 따라 Target 노드를 이용

한 수리 모형이 더미 노드를 이용한 수리 모형보다 하한이 우수하다. 따라서 SRS-MTZ2 수리 모형과 SRS-SSB2 수리 모형에 RLT를 적용하여 하한을 개선한다.

### 3.2.1 SRS-MTZ2 수리 모형에 RLT 적용

(a1) Reformulation : 제약식 (26)과  $x_{1j} \geq 0, j \in N$ 를 곱하고 제약식 (27)과  $x_{1k} \geq 0, k \in N$ 를 곱하여 다음 등식을 얻는다.

$$\sum_{k(\neq j) \in N} x_{1j} y_{jk} = x_{1j} z_j, \quad j \in N, \quad (34)$$

$$\sum_{j(\neq k) \in N} x_{1k} y_{jk} = x_{1k} z_k, \quad k \in N \quad (35)$$

제약식 (26)과  $u_j \geq 0, j \in N$ 를 곱하고 제약식 (27)과  $u_k \geq 0, k \in N$ 를 곱하여 다음 등식을 얻는다.

$$\sum_{k(\neq j) \in N} u_j y_{jk} = u_j z_j, \quad j \in N, \quad (36)$$

$$\sum_{j(\neq k) \in N} u_k y_{jk} = u_k z_k, \quad k \in N. \quad (37)$$

제약식 (29)에  $u_j \geq 0, j \in N$ 과  $n-1-u_j \geq 0, j \in N$ , 그리고  $x_{1j} \geq 0, j \in N$ 을 곱하여 다음 세 식을 얻는다.

$$u_j z_j - u_j y_{jk} - u_j y_{kj} \geq 0, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (38)$$

$$(z_j - y_{jk} - y_{kj})(n-1-u_j) \geq 0, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (39)$$

$$x_{1j} z_j - x_{1j} y_{jk} - x_{1j} y_{kj} \geq 0, \quad j \in N, k(\neq j) \in N. \quad (40)$$

제약식 (31)에  $y_{jk} \geq 0, j \in N, k(\neq j) \in N$ 을 곱하여 다음 식을 얻는다.

$$u_j y_{jk} - u_k y_{jk} + y_{jk} \leq n(y_{jk} - y_{jk}^2 + x_{1k} y_{jk}) \quad (41)$$

$$j \in N, k(\neq j) \in N$$

(b1) Linearization : (a1)에서 생성한 식 (34)~식 (41)에 나타나는 비선형 항을 다음과 같은 변수를 이용하여 선형화한다.

$$f_{jk} = x_{1j} y_{jk}, g_{jk} = x_{1k} y_{jk}, t_{jk} = u_j y_{jk}, s_{jk} = u_k y_{jk},$$

$$y_{jk}^2 = y_{jk}, j \in N, k(\neq j) \in N.$$

이 때  $u_j z_j = u_j$ 이고  $x_{1j} z_j = x_{1j}$ 이므로  $u_j z_j$ 와  $x_{1j} z_j$ 에 대한 치환 변수는 필요하지 않다.

(a1)과 (b1)에서 생성된 RLT 제약식은 다음과 같다.

$$x_{1j} = \sum_{k(\neq j) \in N} f_{jk}, \quad j \in N, \quad (42)$$

$$x_{1k} = \sum_{j(\neq k) \in N} g_{jk}, \quad k \in N, \quad (43)$$

$$u_j = \sum_{k(\neq j) \in N} t_{jk}, \quad j \in N, \quad (44)$$

$$u_k = \sum_{j(\neq k) \in N} s_{jk}, \quad k \in N, \quad (45)$$

$$x_{1j} - f_{jk} - g_{kj} \geq 0, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (46)$$

$$u_j - t_{jk} - s_{kj} \geq 0, \quad j \in N, k(\neq j) \in N. \quad (47)$$

$$(n-1)(z_j - y_{jk} - y_{kj}) - u_j + t_{jk} + s_{kj} \geq 0, \quad (48)$$

$$j \in N, k(\neq j) \in N.$$

$$t_{jk} - s_{jk} + y_{jk} \leq n g_{jk}, \quad (49)$$

### 3.2.2 SRS-SSB2 수리 모형에 RLT 적용

Steiner 노드  $j \in N$ 와  $k(\neq j) \in N$ 에 대해 제약식 (21)과 제약식 (25)는 다음과 같다.

$$v_{jk} + v_{kj} \geq z_j + z_k - 1,$$

$$v_{jk} + v_{kj} \leq z_j,$$

$$v_{jk} + v_{kj} \leq z_k.$$

$v_{jk}$ ,  $z_j$ , 그리고  $z_k$ 는 모두 이진변수이므로, 위 식은 다음과 같은 관계를 의미한다.

$$z_j z_k = v_{jk} + v_{kj}. \quad (50)$$

SSB 제약에 RLT를 적용하면 다음과 같다.

(a2) Reformulation : 식 (29)에  $z_k \geq 0, k \in N$ 을 곱하고 식 (33)에  $z_j \geq 0, j \in N$ 을 곱하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$z_k y_{jk} + z_k y_{kj} \leq z_k z_j, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (51)$$

$$z_j v_{jk} \geq z_j x_{1j} + z_j z_k - z_j, \quad j \in N, k(\neq j) \in N. \quad (52)$$

(b2) Linearization : (a1)에서 생성한 식 (44)와

식 (45)에 나타나는 다차항을 다음과 같은 관계와 식 (43)를 이용하여 치환한다.

$$z_k y_{jk} = z_j y_{jk} = y_{jk}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N,$$

$$z_j v_{jk} = z_k v_{jk} = v_{jk}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N,$$

$$z_j x_{1j} = x_{1j}, \quad j \in N.$$

(a2)와 (b2)에서 생성된 RLT 제약식은 다음과 같다.

$$y_{jk} + y_{kj} \leq v_{jk} + v_{kj}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N, \quad (53)$$

$$z_j - x_{1j} \geq v_{kj}, \quad j \in N, k(\neq j) \in N. \quad (54)$$

SRS-MTZ2-RLT는 SRS-MTZ2 수리 모형에 식 (42)~식 (49)를 추가한 수리 모형을 나타내며, SRS-SSB2-RLT는 SRS-SSB2 수리 모형에 식 (53)과 식 (54)를 추가한 수리 모형을 나타낸다.

**Remark 5 :** SRS-MTZ2 수리 모형과  $(x, y, z, u)$  공간으로 사영한 SRS-MTZ2-RLT 수리 모형은 같은 정수 해공간을 갖는다. 또한 SRS-MTZ2-RLT 수리 모형은 SRS-MTZ2 수리 모형 제약식을 모두 포함한다. 따라서 SRS-MTZ2 수리 모형을 선형 완화한 해공간을  $P_{MTZ}$ , SRS-MTZ2-RLT 수리 모형을 선형 완화하여  $(x, y, z, u)$  영역으로 사영한 해공간을  $P_{RMTZ}$ 라 하면  $P_{RMTZ} \subseteq P_{MTZ}$ 이다. 마찬가지로, SRS-SSB2 수리 모형과  $(x, y, z, v)$  공간으로 사영한 SRS-SSB2-RLT 수리 모형은 같은 정수 해공간을 갖는다. 또한 SRS-SSB2 수리 모형을 선형 완화한 해공간을  $P_{SSB}$ , SRS-SSB2-RLT 수리 모형을 선형 완화하여  $(x, y, z, v)$  영역으로 사영한 해공간을  $P_{RSSB}$ 라 하면  $P_{RSSB} \subseteq P_{SSB}$ 이다.

## 4. 실험 결과

이 장은 최적화 모형 실험 결과를 분석한다. 실험 예제는 두 가지 방법으로 구성한다. 유형 A 문제는 1차원 공간에서 균등 분포인  $[0,1000]$  범위 좌표를 생

성하여 각 노드 위치로 설정한다. 유형 B 문제는 2차원 공간에서 균등 분포인  $[0,1000] \times [0,1000]$  좌표를 생성하여 각 노드 위치로 설정하고, 노드 사이 유클리드 거리를 정수로 반올림하여  $c_{ij}$ 와  $d_{jk}$ 로 사용한다. 두 문제 유형 모두 Steiner 노드  $j \in N$  설치 비용  $b_j$ 는 1 이상 1000 이하로 균등 분포하도록 설정한다. 실험 예제는 A\_m50n10\_1과 같이 표기하며, 이는 문제가 유형 A인 Target 노드 50개, Steiner 노드 10개인 예제 가운데 첫 번째 예제임을 나타낸다. 알고리즘 구현에는 C언어와 CPLEX 버전 12.1을 사용하였으며, 모든 실험은 Intel Core2 Quad 2.33GHz CPU 이고 RAM이 2.0GB인 컴퓨터에서 실시하였다. <표 1>은 유형 A 예제에 대해 수리 모형 실험 결과를 나타내며 <표 2>는 유형 B 예제에 대한 수리 모형 실험 결과를 나타낸다. <표 3>과 <표 4>는 유효 부등식을 포함한 실험 결과를 나타내며, <표 5>는 RLT를 적용한 수리 모형 실험 결과를 나타낸다. 실험 결과에서 사용하는 용어는 다음과 같다.

VI : 제 3.1절에서 다룬 유효 부등식을 포함한 최적화 모형

RLT : SRS-MTZ2 모형과 SRS-SSB2 모형에 대해 제 3.2절에서 생성한 RLT 제약식을 포함한 최적화 모형

Z\_IP : 정수 최적해 목적함수 값

T\_IP : CPLEX를 이용하여 'Z\_IP'를 구하는데 걸린 시간(단위 : 초)

Z\_LP : 선형완화 최적화 모형의 최적해 목적함수 값

GAP : 유효 부등식과 RLT 제약식이 갖는 최적화 모형 하한(Z\_LP) 개선 효과를 살펴보기 위한 평가 기준이며  $GAP = (Z_{IP} - Z_{LP}) / Z_{IP}$ .

<표 1>과 <표 2>에서 더미 노드를 이용한 수리 모형과 Target 노드를 이용한 수리 모형 효과를 확인할 수 있다. <표 1>과 <표 2>에서 SRS-MTZ 수리 모형과 SRS-SSB 수리 모형은 GAP이 동일하게 나타나며, SRS-MTZ2 모형과 SRS-SSB2 모형 또한 GAP이 동일하다. 그러나 <표 1>에서 더미 노

드 기반 모형에서 GAP은 평균 15.5%이며 Target 노드 기반 모형 GAP은 평균 9.0%로 Target 노드 기반 모형이 평균 6.5% 우수한 하한을 갖는다. 따라서 더미 노드 기반 모형보다 Target 노드 기반 모형이 선형완화 모형 하한이 우수함을 알 수 있다. Target 노드 기반 모형을 사용하여 얻는 하한 개선 효과는 분지절단법 알고리즘 성능 향상에도 기여한다. <표 1>에서 T\_IP는 SRS-MTZ 수리 모형에서 평균 20.1초, SRS-MTZ2 수리 모형에서 3.3초로 Target 노드 기반 모형에서 16.8초 개선되며, SRS-SSB 수리 모형에서 285.2초, SRS-SSB2 수리 모형에서 2.8초로 Target 노드 기반 모형에서 282.4초 개선된다. 유형 B 문제 실험 결과인 <표 2>에서도 유사한 경향이 나타난다. 특히 유형 A와 유형 B 문제 모두에서 SSB 부분경로 방지 제약식을 이용한 모형은 SRS-SSB 보다 SRS-SSB2에서 T\_IP 개선 효과가 뚜렷하다. <표 2>에서 T\_IP는 SRS\_SSB 수리 모형에서 평균 155.3초, SRS\_SSB2 수리 모형에서 평균 1.2초로 Target 노드 기반 모형에서 154.1초 개선된다.

<표 3>과 <표 4>에서 SRS-MTZ2 수리 모형과 SRS-SSB2 수리 모형은 GAP이 동일하게 나타나며, SRS-MTZ2-VI와 SRS-SSB2-VI 또한 GAP이 동일하다. 모든 예제에서 MTZ 부분경로

방지 제약식을 이용한 수리 모형과 SSB 부분경로 방지 제약식을 이용한 수리 모형이 동일한 GAP을 갖기 때문에, MTZ 부분경로 방지 제약식과 SSB 부분경로 방지 제약식은 선형 완화 해공간을 축소하는 효과가 없음을 유추할 수 있다. <표 3>에서 유효부등식은 유형 A 예제에 대해 평균 GAP을 9.0%에서 6.0%로 3.0%만큼 개선하며, <표 4>에서 유효부등식은 유형 B 예제에 대해 평균 GAP을 1.9%에서 1.7%로 0.2%만큼 개선한다. 특히 예제 A\_m50n10\_3과 B\_m50n10\_2에서 유효부등식을 추가하여 정수 최적해와 같은 하한을 얻는다. 실험 결과를 보면, 유효부등식은 2차원 공간 예제보다 1차원 공간 예제에서 효과가 우수하다. 그러나 유형 B 예제는 유형 A 예제보다 평균 GAP 이 낮게 나타나기 때문에, 유효부등식을 이용한 효과가 비교적 적다고 유추할 수 있다. <표 3>에서 유효부등식은 T\_IP를 SRS\_MTZ2에 대해 3.3초에서 1.8초로 1.5초 개선하며, SRS\_SSB2에 대해 2.8초에서 1.7초로 개선한다. <표 4>에서는 SRS\_MTZ2에 대해 T\_IP가 0.5초 내외로 짧게 나타나므로 유효부등식을 통한 개선 효과를 관찰하기 어렵다. 그러나 SRS\_SSB2에 대해서는 1.2초에서 0.8초로 0.4초 개선한다. <표 3>과 <표 4> 모두 T\_IP가 0.2초 내외로 짧게 나타나는  $n=10$  예제보다, T\_IP가

<표 1>

Problem instance	Z_IP	SRS-MTZ			SRS-SSB			SRS-MTZ2			SRS-SSB2		
		Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP
A_m50n10_1	6299	5469.0	13.2%	0.7	5469.0	13.2%	1.7	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1
A_m50n10_2	6145	5377.0	12.5%	1.3	5377.0	12.5%	2.3	5732.7	6.7%	0.3	5732.7	6.7%	0.3
A_m50n10_3	6108	5582.7	8.6%	0.9	5582.7	8.6%	1.6	5863.0	4.0%	0.3	5863.0	4.0%	0.3
A_m50n10_4	6337	5488.0	13.4%	0.9	5488.0	13.4%	2.7	6041.8	4.7%	0.2	6041.8	4.7%	0.3
A_m50n10_5	7335	6466.5	11.8%	1.0	6466.5	11.8%	1.6	6866.5	6.4%	0.3	6866.5	6.4%	0.3
A_m50n20_1	4776	3898.5	18.4%	24.5	3898.5	18.4%	205.3	4149.0	13.1%	4.8	4149.0	13.1%	4.0
A_m50n20_2	5895	5085.5	13.7%	28.2	5085.5	13.7%	644.6	5406.5	8.3%	4.1	5406.5	8.3%	7.9
A_m50n20_3	5102	4033.3	20.9%	44.0	4033.3	20.9%	366.7	4348.0	14.8%	16.9	4348.0	14.8%	6.0
A_m50n20_4	4916	3871.8	21.2%	80.4	3871.8	21.2%	1058.9	4123.7	16.1%	5.7	4123.7	16.1%	5.7
A_m50n20_5	4523	3564.5	21.2%	18.8	3564.5	21.2%	566.5	3796.8	16.1%	0.8	3796.8	16.1%	3.3

〈표 2〉

Problem instance	Z_IP	SRS-MTZ			SRS-SSB			SRS-MTZ2			SRS-SSB2		
		Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP
B_m50n10_1	14364	13323.5	7.2%	1.0	13323.5	7.2%	2.2	14034.5	2.3%	0.2	14034.5	2.3%	0.2
B_m50n10_2	14051	13232.0	5.8%	1.0	13232.0	5.8%	2.1	13985.0	0.5%	0.2	13985.0	0.5%	0.2
B_m50n10_3	13719	12997.0	5.3%	1.2	12997.0	5.3%	2.5	13710.0	0.1%	0.1	13710.0	0.1%	0.1
B_m50n10_4	14465	13711.5	5.2%	1.3	13711.5	5.2%	2.2	14213.0	1.7%	0.2	14213.0	1.7%	0.3
B_m50n10_5	14415	13494.5	6.4%	2.4	13494.5	6.4%	2.4	14061.5	2.5%	0.3	14061.5	2.5%	0.3
B_m50n20_1	13415	12438.3	7.3%	8.0	12438.3	7.3%	359.7	13011.0	3.0%	0.6	13011.0	3.0%	2.2
B_m50n20_2	13465	12662.5	6.0%	7.8	12662.5	6.0%	29.9	13230.6	1.7%	0.6	13230.6	1.7%	1.7
B_m50n20_3	11985	11157.1	6.9%	7.5	11157.1	6.9%	155.7	11839.5	1.2%	0.6	11839.5	1.2%	1.8
B_m50n20_4	12203	11349.5	7.0%	12.1	11349.5	7.0%	368.8	11859.5	2.8%	0.8	11859.5	2.8%	3.8
B_m50n20_5	12555	11646.6	7.2%	11.0	11646.6	7.2%	627.7	12097.4	3.6%	0.6	12097.4	3.6%	1.5

〈표 3〉

Problem instance	Z_IP	SRS-MTZ2			SRS-SSB2			SRS-MTZ2-VI			SRS-SSB2-VI		
		Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP
A_m50n10_1	6299	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1
A_m50n10_2	6145	5732.7	6.7%	0.3	5732.7	6.7%	0.3	5739.0	6.6%	0.3	5739.0	6.6%	0.4
A_m50n10_3	6108	5863.0	4.0%	0.3	5863.0	4.0%	0.3	6108.0	0.0%	0.0	6108.0	0.0%	0.1
A_m50n10_4	6337	6041.8	4.7%	0.2	6041.8	4.7%	0.3	6330.3	0.1%	0.1	6330.3	0.1%	0.2
A_m50n10_5	7335	6866.5	6.4%	0.3	6866.5	6.4%	0.3	7161.5	2.4%	0.1	7161.5	2.4%	0.2
A_m50n20_1	4776	4149.0	13.1%	4.8	4149.0	13.1%	4.0	4296.5	10.0%	1.1	4296.5	10.0%	2.1
A_m50n20_2	5895	5406.5	8.3%	4.1	5406.5	8.3%	7.9	5431.0	7.9%	3.7	5431.0	7.9%	4.8
A_m50n20_3	5102	4348.0	14.8%	16.9	4348.0	14.8%	6.0	4348.0	14.8%	7.7	4348.0	14.8%	3.7
A_m50n20_4	4916	4123.7	16.1%	5.7	4123.7	16.1%	5.7	4241.0	13.7%	3.9	4241.0	13.7%	4.2
A_m50n20_5	4523	3796.8	16.1%	0.8	3796.8	16.1%	3.3	4322.0	4.4%	0.8	4322.0	4.4%	1.7

〈표 4〉

Problem instance	Z_IP	SRS-MTZ2			SRS-SSB2			SRS-MTZ2-VI			SRS-SSB2-VI		
		Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP
B_m50n10_1	14364	14034.5	2.3%	0.2	14034.5	2.3%	0.2	14034.5	2.3%	0.2	14034.5	2.3%	0.2
B_m50n10_2	14051	13985.0	0.5%	0.2	13985.0	0.5%	0.2	14051.0	0.0%	0.0	14051.0	0.0%	0.1
B_m50n10_3	13719	13710.0	0.1%	0.1	13710.0	0.1%	0.1	13710.0	0.1%	0.1	13710.0	0.1%	0.1
B_m50n10_4	14465	14213.0	1.7%	0.2	14213.0	1.7%	0.3	14213.0	1.7%	0.2	14213.0	1.7%	0.3
B_m50n10_5	14415	14061.5	2.5%	0.3	14061.5	2.5%	0.3	14061.5	2.5%	0.3	14061.5	2.5%	0.3
B_m50n20_1	13415	13011.0	3.0%	0.6	13011.0	3.0%	2.2	13064.6	2.6%	0.7	13064.6	2.6%	2.1
B_m50n20_2	13465	13230.6	1.7%	0.6	13230.6	1.7%	1.7	13343.0	0.9%	0.5	13343.0	0.9%	1.1
B_m50n20_3	11985	11839.5	1.2%	0.6	11839.5	1.2%	1.8	11922.0	0.5%	0.6	11922.0	0.5%	0.5
B_m50n20_4	12203	11859.5	2.8%	0.8	11859.5	2.8%	3.8	11859.5	2.8%	0.7	11859.5	2.8%	1.9
B_m50n20_5	12555	12097.4	3.6%	0.6	12097.4	3.6%	1.5	12119.9	3.5%	0.6	12119.9	3.5%	1.3

〈표 5〉

Problem instance	Z_IP	SRS-MTZ2			SRS-MTZ2-RLT			SRS-SSB2			SRS-SSB2-RLT		
		Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP	Z_LP	GAP	T_IP
A_m50n10_1	6299	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1	6299.0	0.0%	0.1
A_m50n10_2	6145	5732.7	6.7%	0.3	*5734.9	6.7%	0.8	5732.7	6.7%	0.3	*5739.0	6.6%	0.4
A_m50n10_3	6108	5863.0	4.0%	0.3	5863.0	4.0%	0.6	5863.0	4.0%	0.3	*5881.3	3.7%	0.4
A_m50n10_4	6337	6041.8	4.7%	0.2	6041.8	4.7%	0.7	6041.8	4.7%	0.3	*6065.0	4.3%	0.3
A_m50n10_5	7335	6866.5	6.4%	0.3	6866.5	6.4%	0.7	6866.5	6.4%	0.3	*6988.3	4.7%	0.3
A_m50n20_1	4776	4149.0	13.1%	4.8	4149.0	13.1%	9.5	4149.0	13.1%	4.0	4149.0	13.1%	3.9
A_m50n20_2	5895	5406.5	8.3%	4.1	5406.5	8.3%	15.8	5406.5	8.3%	7.9	5406.5	8.3%	8.3
A_m50n20_3	5102	4348.0	14.8%	16.9	*4352.7	14.7%	33.0	4348.0	14.8%	6.0	4348.0	14.8%	6.8
A_m50n20_4	4916	4123.7	16.1%	5.7	4123.7	16.1%	15.1	4123.7	16.1%	5.7	4123.7	16.1%	4.8
A_m50n20_5	4523	3796.8	16.1%	0.8	*3797.5	16.0%	2.0	3796.8	16.1%	3.3	*3810.8	15.7%	2.6
B_m50n10_1	14364	14034.5	2.3%	0.2	14034.5	2.3%	0.3	14034.5	2.3%	0.2	14034.5	2.3%	0.2
B_m50n10_2	14051	13985.0	0.5%	0.2	13985.0	0.5%	0.3	13985.0	0.5%	0.2	13985.0	0.5%	0.3
B_m50n10_3	13719	13710.0	0.1%	0.1	13710.0	0.1%	0.1	13710.0	0.1%	0.1	*13719.0	0.0%	0.1
B_m50n10_4	14465	14213.0	1.7%	0.2	14213.0	1.7%	0.4	14213.0	1.7%	0.3	14213.0	1.7%	0.2
B_m50n10_5	14415	14061.5	2.5%	0.3	*14067.5	2.4%	0.5	14061.5	2.5%	0.3	*14071.5	2.4%	0.4
B_m50n20_1	13415	13011.0	3.0%	0.6	*13011.1	3.0%	1.1	13011.0	3.0%	2.2	*13081.3	2.5%	1.8
B_m50n20_2	13465	13230.6	1.7%	0.6	13230.6	1.7%	1.1	13230.6	1.7%	1.7	13230.6	1.7%	1.2
B_m50n20_3	11985	11839.5	1.2%	0.6	11839.5	1.2%	1.5	11839.5	1.2%	1.8	*11874.5	0.9%	1.2
B_m50n20_4	12203	11859.5	2.8%	0.8	*11861.7	2.8%	1.7	11859.5	2.8%	3.8	11859.5	2.8%	4.1
B_m50n20_5	12555	12097.4	3.6%	0.6	12097.4	3.6%	1.3	12097.4	3.6%	1.5	*12120.9	3.5%	1.6

비교적 길게 나타나는  $n=20$  예제에서 유효부등식을 통한 개선 효과가 두드러진다. 특히 <표 3>에서  $n=20$  예제의 경우, SRS\_MTZ2 모형은 6.5초에서 3.4초로 3.1초 개선되며 SRS\_SSB2 모형은 5.4초에서 3.3초로 2.1초 개선된다.

<표 5>에서 RLT를 적용한 수리 모형은 MTZ 부분경로 방지 제약식을 이용할 때 6개 예제에서 개선 효과를 보이며, SSB 부분경로 방지 제약식을 이용할 때 10개 예제에서 개선 효과를 보인다. 개선된 예제는 Z\_LP 열에서 \*표시로 나타낸다. 대체로 SSB 부분경로 방지 제약식이 MTZ 부분경로 방지 제약식보다 RLT 적용 효과가 뛰어나지만, 예제 A\_m50n20\_3과 B\_m50n20\_4는 RLT를 적용할 때 SSB 모형에서는 개선이 없고 MTZ 모형에서만 개선된다. 따라서 RLT를 적용하기 전 선형 완화 모형에서 구한 하한이 같더라도, 사용하는 부분경로 방지 제약이 다르다면 RLT를 적용한 후 서로 다른

선형 완화 해공간을 표현함을 알 수 있다. MTZ 부분경로 방지 제약식에 RLT를 적용한 경우 식 (42)~식 (49)가 생성되며, SSB 부분경로 방지 제약식에 RLT를 적용한 경우 식 (53)과 식 (54)가 생성된다. 따라서 SRS\_MTZ2 모형이 SRS\_SSB2 모형보다 RLT 적용으로 인한 제약식 수가 크게 증가한다. 제약식 증가로 인한 계산 복잡도는 T\_IP에서 확인할 수 있다. SRS\_MTZ2 모형은 RLT를 적용하면 T\_IP가 1.9에서 4.3으로 2.4초 증가한다. 반면에 SRS\_SSB2 모형은 RLT를 적용한 경우 T\_IP가 2.0초에서 1.9초로 0.1초 감소한다. 0.1초 감소는 RLT 적용에 따른 하한 개선 효과로 해석하기보다, 컴퓨터 환경에 따른 오차로 볼 수 있다.

## 5. 결 론

이 연구는 SRS 문제에 대한 새로운 최적화 모

형을 제시하고 유효 부등식과 RLT 적용 방법을 개발하였다. 실험 결과에서 Target 노드를 이용한 수리 모형이 더미 노드를 이용한 수리 모형보다 우수하다. 특히 Target 노드를 이용한 수리 모형은 선형 완화 최적해가 정수 최적해와 같은 예제도 있으며, Target 노드 기반 수리 모형이 갖는 하한 개선 효과가 우수함을 나타낸다. Target 노드를 이용한 수리 모형은 유형 A 예제에서 평균 9.0% GAP을 도출하며, 유형 B 예제에서 평균 1.9% GAP을 도출한다. 유효부등식이 GAP을 개선하는 정도는 유형 A 예제에서 평균 3.0%로 유형 B 예제에서 평균 0.2%보다 개선 효과가 우수해 보인다. 그러나 유형 B 예제에서 유효부등식을 포함하지 않은 수리 모형이 유형 A 예제보다 평균 7.1% 우수하기 때문에, 유효부등식이 하한을 개선하는 효과가 유형 B 예제에서 비교적 적게 나타난다. 두 가지 예제에 대하여 유효부등식을 통해 정수 최적해와 같은 하한을 얻는다. 일반적으로 0-1 혼합정수계획법 모형에 RLT를 적용하면 하한 개선 효과가 매우 우수하다. 그러나 이 논문에서는 MTZ 부분경로 방지 제약식과 SSB 부분경로 방지 제약식이 선형 완화 해공간을 축소하는 효과가 없기 때문에, 각 제약식에 RLT를 적용하여도 하한을 개선하는 정도가 적다. 따라서 추후 연구 과제는 SRS 문제에서 하한 개선 효과가 우수한 부분경로 방지 제약식 개발과 효과가 우수한 RLT 적용 모형 도출이다.

## 참 고 문 헌

- [1] Labbé, M., G. Laporte, I.R. Martín, and J.J.S. González, "The Ring Star Problem : Polyhedral Analysis and Exact Algorithm," *Networks*, Vol.43(2004), pp.177-189.
- [2] Lee, Y., S.Y. Chiu, and J. Ryan, "A Branch and Cut Algorithm for a Steiner Tree-Star Problem," *INFORMS Journal on Computing*, Vol.8(1996), pp.194-201.
- [3] Lee, Y., S.Y. Chiu, and J. Sanchez, "A Branch and Cut Algorithm for the Steiner Ring Star Problem," *International Journal of Management Science*, Vol.4(1998), pp.21-34.
- [4] Myung, Y., "A Comparison of Group Steiner Tree Formulations," *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol.37(2011), pp.191-197.
- [5] Sarin, S.C., H.D. Sherali, and A. Bhootra, "New Tighter Polynomial Length Formulations for the Asymmetric Traveling Salesman Problem with and without Precedence Constraints," *Operations Research Letters*, Vol.33, No.1(2005), pp.62-70.
- [6] Sherali, H.D., W.P. Adams, and P.J. Driscoll, "Exploiting Special Structures in Constructing a Hierarchy of Relaxations for 0-1 Mixed Integer Problem," *Operations Research*, Vol.46(1998), pp.396-405.
- [7] Sherali, H.D. and P.J. Driscoll, "On Tightening the Relaxations of Miller-Tucker-Zemlin Formulations for Asymmetric Traveling Salesman Problems," *Operations Research*, Vol.50, No.4(2002), pp.656-669.
- [8] Sherali, H.D., S.C. Sarin, and P.-F. Tsai, "A Class of Lifted Path and Flow-Based Formulations for the Asymmetric Traveling Salesman Problem with and without Precedence Constraints," *Discrete Optimization*, Vol.6(2006), pp.20-32.
- [9] Simonetti, L., Y. Frota, and C.C. de Souza, "The Ring-Star Problem : A New Integer Programming Formulation and a Branch-and-Cut Algorithm," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.159, No.16(2011), pp.1901-1914.