

NURBS 제어점의 위치 및 가중치를 설계변수로 하는 스플라인 유한 요소법 기반 형상최적설계 연구

송여울* · 허준영* · 윤성기*†

* KAIST 기계공학부

Study of the Shape Optimization in Spline FEM Considering both NURBS Control Point Positions and Weights as Design Variables

Yeo-Ui Song*, Jun Young Hur*, and Sung-Kie Youn*†

* School of Mechanical, Aerospace and Systems Engineering, Division of Mechanical Engineering, KAIST

(Received October 14, 2013 ; Revised January 24, 2014 ; Accepted January 27, 2014)

Key Words: Spline Finite Element Method(스플라인 유한요소법), Shape Optimization(형상최적화), Non-Uniform Rational B-Spline(비균일 유리 B 스플라인), Control Point(제어점), Weight(가중치)

초록: 본 연구에서는 NURBS(Non-Uniform Rational B-spline)를 이용한 형상최적화 방법을 제안한다. 대부분 NURBS 기반 형상 최적화 방법은 NURBS의 제어점 위치 좌표 값만을 설계변수로 택하고 있다. 이러한 경우, 형상최적화 과정에서 종종 제어점들이 서로 가까워져 메쉬 품질을 악화시키고 수렴이 되지 않는 등의 문제를 야기시킨다. 본 연구에서는 형상최적화에서 NURBS 제어점의 좌표뿐 아니라 가중치를 추가적으로 설계 변수로 고려하여 세밀한 형상 변화를 가능하게 하고, 제어점 위치 좌표 최적화 과정과 제어점 가중치 최적화 과정을 분리하여 단계적으로 효율적인 형상 최적화를 수행하였다. 제안한 형상최적화 방법을 예제에 적용하여 제안된 방법의 효율성을 검증하였다.

Abstract: A new NURBS-based shape optimization method is proposed. Most shape optimization studies consider only control point positions as design variables. Some shape optimization processes present problems with mesh quality and convergence when control points are constrained to a limited space. If the weights of the control points are regarded as additional design variables, it should be possible to attain a better degree of shape control. In this study, positions and weights of NURBS control points are used as design variables, and a shape optimization algorithm incorporates position optimization and weight optimization steps. This method is applied to shape optimization benchmarking problems to verify its advantages.

1. 서론

최근 기계, 전자 제품에 대한 소비자의 수준 향상과 빠른 트렌드 변화로 인하여 섬세한 제품 디자인이 요구되고, 제품 생산 주기가 짧아지고 있다. 제품 생산 과정에서 핵심적인 역할을 수행하는 CAD(Computer Aided Design)와 CAE(Computer Aided Engineering)의 효율적인 소통은 제품의 생산성 향상에 직접적인 영향을 끼치며 이에 대한 연구가 활발

이 진행되고 있다.⁽¹⁻³⁾ 먼저 CAD를 이용하여 제품을 모델링하고, CAE 과정을 통해 제품이 사용되는 환경에 대응되는 경계조건을 부여하여 해석을 수행한다. CAE 해석 결과를 바탕으로 모델링을 개선하고, 다시 해석을 하는 반복적인 최적화 과정을 통해 최적화된 제품설계가 이루어진다. 이처럼 최종 제품을 생산하기 위해서는 무수한 개선과정이 필요하며, 이에 따라 CAD와 CAE 간의 정보 교환이 반복적으로 수행된다. 그러나 CAD에서는 스플라인 기저로 모델을 표현하는 반면 CAE는 다항식 기저로 유한요소 모델을 표현하기 때문에 모델을 공유하는 과정에서 형상 근사 오차가 발생하는 문제점이 있다. 최

† Corresponding Author, skyoun@kaist.ac.kr

근 제안된 스플라인 유한요소법(Spline Finite Element Method)은 CAD의 NURBS 기저를 CAE에서 형상함수로 사용하는 방법으로, 유한요소 해석 전처리 작업인 유한요소 생성과정과 해석한 결과를 다시 CAD로 전환하는 과정이 제거된다. 이후 CAD의 스플라인 정보를 직접 해석에 적용하는 방법이 제안되고 이를 등기하 해석(Isogeometric analysis)이라 명명하였다. 이러한 CAD와 CAE의 통합⁽⁴⁾은 전, 후처리 과정 동안의 시간과 노력을 획기적으로 감소시켜 실제 산업의 생산성에 엄청난 발전을 기대할 수 있으며, 이에 따른 스플라인 유한요소법 기반 형상 최적화 방법에 대해 많은 연구가 진행되고 있다.⁽⁵⁾ 스플라인 유한요소법 기반 형상최적화 방법은 NURBS 제어점 위치 좌표를 설계변수로 하며, 기존의 유한요소 기반의 형상최적화와 비교하였을 때 비교적 적은 수의 설계변수를 이용하여 복잡한 최적형상을 도출할 수 있다. 현재 대부분의 NURBS를 이용한 형상 최적 설계 연구에서는 제어점의 위치만을 설계변수로 하여 최적화^(5,6)를 진행하였다. 그러나 NURBS에서의 제어점은 위치 변수뿐 아니라 추가적으로 해당 제어점의 가중치 변수를 포함한다. 이러한 가중치는 B-스플라인으로 표현하지 못하는 원뿔곡선을 표현을 가능하게 하며, 세밀한 곡선 표현이 가능한 특성을 가진다.

최근 Qian은 Full Analytical Sensitivity라는 개념을 소개하여 제어점의 위치 좌표와 가중치를 설계변수로 설정하여 최적화를 수행하였다. 그러나 제어점과 가중치는 서로 상호 보완적 관계를 가지는 것에서 발생할 수 있는 문제점이나 비효율적인 면에 대한 언급이나 고찰이 결여되어 있다.

본 논문에서는 스플라인 유한요소법을 이용한 2차원 형상최적설계 시, 제어점의 위치 좌표 값과 가중치를 모두 설계 변수로 설정하고, 적절한 도입 및 적용을 통해 효율적인 최적 설계를 구현하는 방법에 대한 연구를 제시한다.

2. B-스플라인과 NURBS

2.1 B-스플라인(B-spline)

B-스플라인은 아래와 같이 매듭 벡터(Knot vector) 내부에 포함되어있는 매듭(Knot)들로 정의되는 기저함수이다.

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_{n+p+1}] \quad (1)$$

수식 (1)에서 n 은 제어점의 개수, p 는 B-스플라인 기저함수의 차수를 나타낸다. 하나의 매듭벡터 \mathbf{s} 는 1차원에서의 하나의 패치를 나타내며, 2차원

에서는 두 개의 매듭벡터의 텐서 곱(Tensor product)으로 2차원 패치를 구성한다. 매듭벡터에서 매듭을 추가 또는 제거하여 요소 분할을 조절할 수 있으며, 매듭 사이의 간격을 나타내는 매듭 거리(Knot span)는 각 요소의 크기와 관련이 있다. 이러한 매듭벡터 정보를 바탕으로 아래와 같이 재귀적 방식으로 B-스플라인을 정의한다.

$$N_{i,0}(s) = \begin{cases} 1, & s_i \leq s < s_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(s) = \frac{s-s_i}{s_{i+p}-s_i} N_{i,p-1}(s) + \frac{s_{i+p+1}-s}{s_{i+p+1}-s_{i+1}} N_{i+1,p-1}(s)$$

$$\mathbf{C}(s) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(s) \mathbf{P}_i \quad (3)$$

수식 (2)은 p 차 B-스플라인의 i 번째 기저함수, 수식 (3)은 제어점의 좌표 \mathbf{P}_i 와 수식 (2)에서 구한 p 차 B-스플라인 기저함수의 선형결합으로 구성된 B-스플라인 곡선을 나타낸다. B-스플라인 기저함수는 음이 아닌 값을 나타내며, 단위분할(Partition of unity) 특성을 가진다. 또한 $s \notin [s_i, s_{i+p+1}]$ 의 경우, 해당 기저함수 $N_{i,p}(s)$ 함수 값은 0이 되어 원하는 국소영역 변형이 가능한 특성을 가지며 이를 콤팩트 서포트(Compact support)라 한다. 그리고 B-스플라인은 2차 이상의 기저함수를 가질 때, 요소 경계에서 C^1 이상의 연속성을 보장하여 응력이나 곡률계산에 용이하다.

2.2 NURBS (Non-uniform Rational B-spline)

NURBS는 B-스플라인의 일반화된 형식으로 유리함수 형태이며, B-스플라인에서 가중치 변수 w 가 추가된다. 1차원에서 p 차의 NURBS 곡선은 다음과 같이 정의 된다.⁽⁴⁾

$$\mathbf{C}(s) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(s)}{\sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(s)} \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(s) \mathbf{P}_i \quad (4)$$

\mathbf{P}_i 는 제어점의 좌표를 나타내고, w_i 는 \mathbf{P}_i 에 대응되는 가중치, $N_{i,p}(s)$ 는 p 차 B-스플라인의 기저함수이며 $R_{i,p}(s)$ 는 가중치를 포함하는 p 차 NURBS 기저함수이다. NURBS에서 모든 제어점에 해당되는 가중치의 값을 1로 설정하면 그 식은 앞서 B-스플라인 곡선 수식 (3)과 정확히 동일하다. NURBS는 B-스플라인에서 가중치 변수 추가로 인해 자유도(Degree of freedom)의 수가 하나 증가하여, B-스플라인보다 더욱 넓은 범위의 유연한

곡선 표현이 가능하다.

NURBS 특징 중 하나로, 가중치 변화로 인한 스플라인 곡선의 변화는 컨벡스 헐(Convex hull)의 특징을 만족한다. 컨벡스 헐은 구간별 2 차 기저함수의 경우 3 개의 인접한 제어점을 연결한 도형으로, 3 차 기저함수의 경우는 4 개의 인접한 제어점을 연결한 다각형을 뜻한다. Fig. 1 은 컨벡스 헐과 가중치 값 변화에 따른 NURBS 곡선의 변화를 나타낸다. 가중치의 값이 클수록 NURBS 곡선은 해당 제어점에 가까워지는 것을 확인할 수 있다. 또한 해당 곡선은 3 차 곡선이므로 컨벡스 헐은 4 개의 제어점을 연결하여 구성된 사각형이고 해당 곡선은 가중치 값이 변하더라도 컨벡스 헐 내부에 존재하는 것을 확인할 수 있다. 이처럼 가중치를 변화시킬 때에 스플라인은 해당되는 컨벡스 헐 내부에서만 이동하므로 진동이나 이탈을 방지할 수 있다. 또한 NURBS 곡선 표현에 있어서 가중치 변화는 제어점의 위치를 변화시켰을 때보다 더 부드럽고 유연한 스플라인 형상을 표현하는데 이점이 있다. NURBS 곡선을 인접한 제어점 3 개에 대해 2 차 기저함수를 이용하여 수식 (5)와 같이 유리함수 형태의 식으로 표현할 수 있으며, 적절한 가중치 값을 부여하였을 때, NURBS 곡선은 원뿔곡선에 해당되는 원, 타원, 포물선 등을 정확하게 표현한다.

$$C(s) = \frac{(1-s^2)w_0P_0 + 2s(1-s)w_1P_1 + s^2w_2P_2}{(1-s^2)w_0 + 2s(1-s)w_1 + s^2w_2} \quad (5)$$

Fig. 2 는 2 차 B-스플라인과 NURBS 를 이용하여 3 개의 제어점으로 사분의 일 원 형상을 표현한 것을 비교하여 나타낸 그림이다. NURBS 에서 제어점 P 에 대응되는 가중치를 약 $1/\sqrt{2}$ 으로 설정하면 NURBS 곡선은 원 곡선과 정확히 일치하는 반면 B-스플라인은 사분의 일 원 형상을 정확히 표현하지 못하는 것을 확인할 수 있다.

3. 스플라인 유한요소법 기반 형상최적설계

3.1 스플라인 유한요소법

스플라인 기반 형상최적화는 CAD 에서 사용되는 NURBS 형상함수를 유한요소 해석에서 기저함수로 사용하는 방법으로, 메쉬 생성 등 별도의 전처리 과정 없이 CAD 모델의 형상정보 그대로 CAE 에서 해석할 수 있는 방법이다. 이로 인해 형상 근사과정이 사라지면서 형상오차를 제거할 수 있으며, 요소분할에 따른 요소 재생성 과정 대신에 CAE 과정에서 매듭추가를 통한 전역적인 세분화 과정을 수행함으로써 정확도와 효율성이 향상된다.

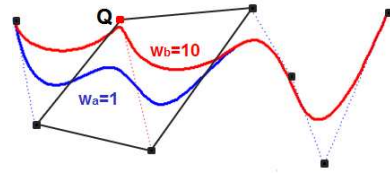


Fig. 1 Weight change and Convex hull property example

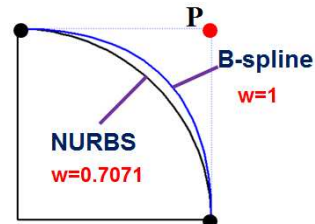


Fig. 2 Comparison of NURBS and B-spline: A quarter circle

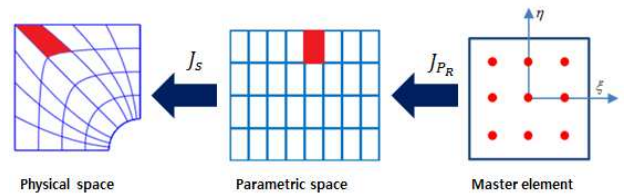


Fig. 3 Linear transformations in Spline FEM

스플라인 유한요소법에서는 Fig. 3 과 같이 물리적 영역에서 파라미터 영역으로, 파라미터 영역에서 적분요소로의 선형 변환 과정을 거친다. 이에 해당되는 자코비안은 각각 J_s 와 J_{P_r} 으로 표현하며, 수식 (6)과 같이 전체 자코비안 J 는 J_s 와 J_{P_r} 의 행렬 곱으로 구해진다. $R_i(s,t)$ 는 NURBS 평면의 i 번째 기저함수, x, y 는 물리적 영역에서 해당 제어점의 좌표를 나타낸다.⁽¹⁾

$$J = J_{P_r} J_s$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(s_{\max} - s_{\min}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(t_{\max} - t_{\min}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_i^n \frac{\partial R_i}{\partial s} x_i & \sum_i^n \frac{\partial R_i}{\partial s} y_i \\ \sum_i^n \frac{\partial R_i}{\partial t} x_i & \sum_i^n \frac{\partial R_i}{\partial t} y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

이를 바탕으로 스플라인 유한요소법에서 요소 강성행렬을 구하는 식은 아래와 같다.⁽¹⁾

$$K_e = \int B^T D B d\Omega$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} B^T D B |J_s| ds dt \quad (7)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J_s| |J_{P_r}| d\xi d\eta$$

$$= \sum_{k=1}^{NINT} B_k^T D B_k |J_k| W_k$$

수식 (7)에서 \mathbf{B} 는 변형률-변위 행렬, \mathbf{D} 는 재료 상수 행렬, W_k 는 가우스 구적분에서 적분점의 가중치를 나타낸다. 이 때 \mathbf{B} 는 수식 (8)과 같이 세 개의 행렬의 곱으로 구해진다.⁽¹⁾

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{G} \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_t^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_{1,s} & 0 & \dots & R_{n,s} & 0 \\ R_{1,t} & 0 & \dots & R_{n,t} & 0 \\ 0 & R_{1,s} & \dots & 0 & R_{n,s} \\ 0 & R_{1,t} & \dots & 0 & R_{n,t} \end{bmatrix}$$

\mathbf{M} 은 상수변환 행렬을 나타내고, $R_{n,s}, R_{n,t}$ 은 NURBS 기저함수를 각각 파라미터 s 와 t 로 미분한 값을 나타낸다. 앞서의 수식 (6), (7), (8) 과정을 통해 강성행렬을 구성할 수 있으며, 스플라인 유한요소법에서는 기존의 유한요소법과 동일한 방법으로 균일 변위 경계조건과 분포하중 적용하여 해를 구할 수 있다.

스플라인 유한요소법은 기존의 유한요소법에 사용되는 절점의 개수보다 현저히 적은 제어점을 이용하여 동일한 정확도 수준의 해석을 수행할 수 있다. 또한 기존의 유한요소법은 요소 경계에서 C^0 연속성을 가지므로 응력계산에서 별도의 처리 과정이 필요하지만, 스플라인 유한요소법은 2차 이상의 기저함수를 사용하는 경우에 C^1 연속성을 보장하여 응력계산에 용이한 특징이 있다.

3.2 형상최적설계

3.2.1 형상최적화 흐름도

일반적인 형상최적화는 CAD에서 초기 2차원

모델을 생성하고, CAD에서 모델에 대응되는 제어점 좌표, 가중치, 매듭벡터, 차수 등의 형상정보를 얻는다. 형상 정보를 바탕으로 원하는 수준의 정확도를 만족하기 위한 요소 세분화, 문제에 대응되는 경계조건 부여를 통해 구조 해석을 수행한다. 형상최적화를 수행하기에 앞서 형상최적화 문제에 따라 목적함수, 제한조건, 설계변수를 설정하고, 설계변수의 변화에 따른 구조해석 결과를 이용하여 해당 설계변수에 대한 형상민감도를 계산한다. 이후, 미분기반 최적화 알고리즘 MMA(Method of Moving Asymptotes)는 앞서 구한 형상민감도를 입력 받아 개선된 설계 변수의 값을 출력하게 된다. 이러한 한번의 형상최적화 과정을 반복적으로 수행하여 수렴조건을 만족 할 때의 최적의 설계변수 값을 얻는다.

일반적인 스플라인 유한요소법 기반 형상최적화는 제어점의 좌표 값을 설계변수로 설정하여 형상최적화를 수행한다. 그러나 앞서 언급한 바와 같이, NURBS의 제어점 좌표 값뿐 아니라 가중치 값 역시 형상을 표현하는 변수이므로 본 연구에서는 제어점의 좌표 값과 가중치를 모두 설계변수로 하여 형상최적화를 수행하였다. Fig. 4는 본 연구에서 수행한 형상최적화 과정 흐름도를 나타내고 있다.

본 형상최적화 과정에서는 제어점 위치 최적화와 가중치 최적화를 분리하여 단계적으로 진행하였다. 제어점 위치좌표 값만을 설계변수로 하여 형상최적화를 수행하는 경우에 최적화가 진행됨에 따라 매우 좁은 영역에서 제어점들이 밀집하는 경우가 발생하는데, 이는 메쉬를 구성하는데 어려움이 있고, 부정확한 해석결과를 초래⁽⁷⁾할 수 있다. 또한 수식 (4)에서 알 수 있듯이 NURBS 평면을 표현하는데 있어 제어점의 위치와 가중치는 서로 상관 관계를 가진다. 예를 들어 동일한 NURBS 평면을 구성할 때에 제어점의 위치 좌표를 새롭게 설정하면 이에 대응하여 가중치 값도 새롭게 정의 되어야 한다. 그러므로, 두 가지의 변수를 동시에 설계변수로 설정하는 경우에 수렴이 불가능한 문제가 발생할 수 있고, 특정 문제에서 제어점의 위치 좌표와 가중치 변수를 분리하여 단계적으로 진행하는 방식이 더 효율적일 수 있다. 그리하여 본 연구에서는 우선적으로 설계영역의 범위가 비교적 넓은 제어점 위치 최적화를 우선적으로 수행한 다음 제어점 간의 거리가 일정 수준이상 가까워지면, 비교적 설계 영역이 작아서 섬세한 곡선 변형이 가능한 가중치 최적화

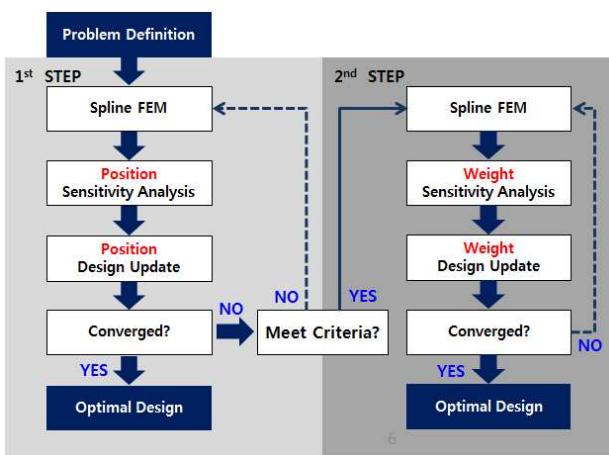


Fig. 4 Flow chart for weight adapted 2D shape optimization

를 수행하였다.

3.2.2 형상 민감도 수식화

미분기반 최적화 알고리즘 MMA 를 사용하기 위해서 설계변수에 대한 목적함수와 제한조건의 형상 민감도 계산이 우선적으로 수행되어야 한다. 수식 (9)는 일반적인 최적화 문제 정의를 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \Psi(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b})) \\ & \text{subject to } \mathbf{g}(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b})) \leq 0 \\ & \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i \quad i=1, \dots, \text{Number of design variables} \end{aligned} \quad (9)$$

수식 (9)에서 Ψ 는 목적함수, \mathbf{g} 는 제한조건, \mathbf{b} 는 설계변수, \mathbf{u} 는 상태변수, $\underline{b}_i, \bar{b}_i$ 는 각각 설계변수의 하한, 상한을 나타낸다. 설계변수에 대한 목적함수 민감도는 수식 (10)을 통해 구할 수 있다.

$$\frac{d\Psi(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b}))}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{b}} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{b}} - \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{u} \right) \quad (10)$$

수식 (10)에서 연쇄법칙(Chain rule)을 이용하여 설계변수에 대한 목적함수의 미분 값을 구한다. 목적함수의 민감도를 구하기 위해서는 우선적으로 강성행렬 민감도가 필요하며 이는 수식 (11)에 나타나 있다.

$$\frac{\partial\mathbf{K}_e}{\partial\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^{NINT} \left[\frac{\partial\mathbf{B}_k^T}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{D}\mathbf{B}_k |J^k| + \mathbf{B}_k^T \mathbf{D} \frac{\partial\mathbf{B}_k}{\partial\mathbf{b}} |J^k| + \mathbf{B}_k^T \mathbf{D}\mathbf{B}_k \frac{\partial|J^k|}{\partial\mathbf{b}} \right] w^k \quad (11)$$

수식 (11)에서 설계변수를 제어점의 좌표 값 또는 가중치로 설정하면 각각 제어점의 좌표 값과 가중치에 대한 강성행렬을 민감도를 구할 수 있다. 수식 (11)에서 알 수 있듯이, 강성행렬의 민감도를 구하기 위해서는 우선적으로 변형률-변위 행렬 \mathbf{B} 의 민감도 값이 필요하다. 제어점의 위치 좌표, 가중치 값에 대한 변형률-변위 행렬 민감도는 각각 수식 (12)와 수식 (13)으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{x}} &= \mathbf{M} \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{x}} \mathbf{G} : \\ \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{J}_s^{-1}}{\partial\mathbf{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\mathbf{J}_s^{-1}}{\partial\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\mathbf{J}_s^{-1}}{\partial\mathbf{x}} = -\mathbf{J}_s^{-1} \frac{\partial\mathbf{J}_s}{\partial\mathbf{x}} \mathbf{J}_s^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial w_A} &= \mathbf{M} \frac{\partial\Gamma}{\partial w_A} \mathbf{G} + \mathbf{M}\Gamma \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial w_A} : \\ \frac{\partial\Gamma}{\partial w_A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{J}_s^{-1}}{\partial w_A} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\mathbf{J}_s^{-1}}{\partial w_A} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial\mathbf{J}_s^{-1}}{\partial w_A} &= -\mathbf{J}_s^{-1} \frac{\partial\mathbf{J}_s}{\partial w_A} \mathbf{J}_s^{-1}, \\ \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial w_A} &= \begin{bmatrix} R_{1,sw} & 0 & \dots & R_{n,sw} & 0 \\ R_{1,tw} & 0 & \dots & R_{n,tw} & 0 \\ 0 & R_{1,tw} & \dots & 0 & R_{n,tw} \\ 0 & R_{1,tw} & \dots & 0 & R_{n,tw} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$R_{n,sw}, R_{n,tw}$ 은 n 번째 NURBS 기저함수를 각각 파라미터 s 와 가중치, 파라미터 t 와 가중치로 두 번 미분한 함수를 뜻한다. 제어점 위치 좌표에 대한 민감도 계산과 달리 \mathbf{G} 행렬이 가중치에 대한 함수이므로, 가중치로 미분하는 항이 추가된 것을 확인할 수 있다. 앞서 식들을 바탕으로, 수식 (14)는 목적함수를 변위(Displacement)로 설정하였을 때의 민감도 계산식, 수식 (15)는 목적함수를 컴플라이언스(Compliance)로 설정하였을 때 민감도 계산 식을 나타내며 설계 변수 \mathbf{b} 에 따라 해당 강성행렬 민감도를 대입하여 각각 변위, 컴플라이언스의 민감도를 구할 수 있다.

$$\Psi(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b})) = \mathbf{u} \quad (14)$$

$$\frac{d\Psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{b}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{u}$$

$$\Psi(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b})) = \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (15)$$

$$\frac{d\Psi}{d\mathbf{b}} = \mathbf{F}^T \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{b}} = -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{u} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{b}} \mathbf{u}$$

4. 형상최적설계 예제

4.1 평판의 내부 경계 형상최적화

평판의 내부 경계 형상 최적화 문제이다. 형상 최적화가 적합하게 수행되는지 확인 하기 위하여 Fig. 5에 나타난 정해가 존재하는 평판 내부 경계 형상최적화 문제에 대하여 최적화를 진행하였다. 이 때 정해는, 설계 영역인 오른쪽 아래 대각선 영역은 정확히 사분의 일 원 형상을 나타낸다. 재료상수는 $E = 210GPa, \nu = 0.3$ 이며, 경계조건으로 오른쪽과 아랫면에 대칭조건을 적용하였다. 그런 다음, 윗면과 왼쪽 면에 동일한 크기의 하중을 가

하였다. 최적화 문제 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ & \text{subject to } V \leq 0.9907V_0 \end{aligned} \quad (20)$$

주어진 부피 제한 조건하에 목적함수인 컴플라이언스를 최소화하는 최적화를 수행하였다. V_0 는 초기 평판의 부피, V 는 최적화 수행 후의 부피를 나타낸다. 부피 제한 조건의 기준은 문헌에서 참조하였다.⁽⁸⁾ Fig. 6은 요소와 제어점을 나타내며, 오른쪽 아래의 대각변에 위치한 제어점을 설계 변수로 설정한다.

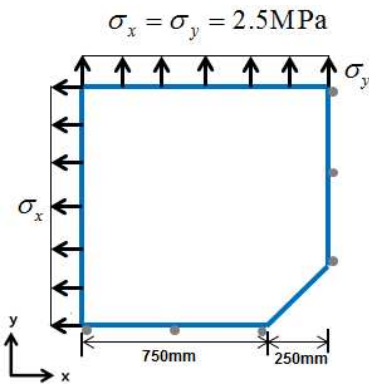


Fig. 5 Problem definition: Plate with a hole

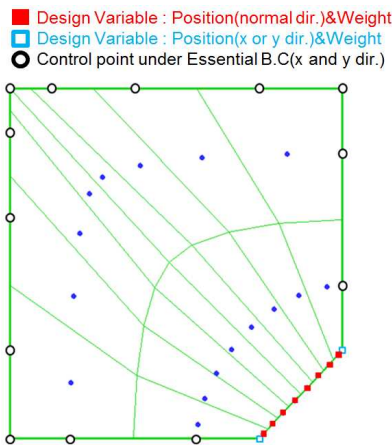


Fig. 6 Definition of design variables: Plate with a hole

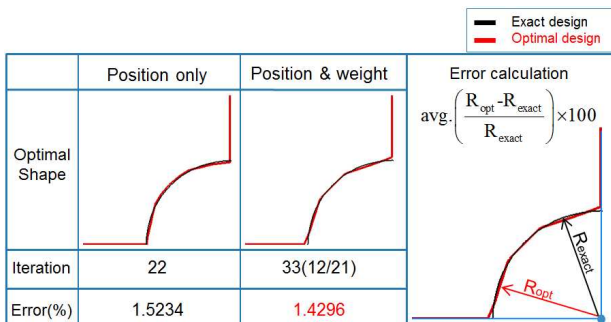


Fig. 7 Optimization results: Plate with a hole

먼저 설계 영역이 큰 제어점의 위치 최적화를 수행하고, 최적화 과정 동안 제어점간 거리가 일정수준 이상 가까워 지면, 제어점의 이동을 멈추고 가중치 최적화를 수행한다. Fig.7은 설계 영역에서의 최적형상과 정해와의 오차계산 방법, Fig.8은 최적화 진행에 따른 목적함수와 제한 조건의 변화를 나타낸다. Fig.7에서 제어점 위치만을 설계 변수로 하는 경우 22 번의 최적화를 반복하고 수렴하고, 제어점의 위치-가중치 최적화에서는 우선 제어점 위치 최적화가 12 번 가중치 최적화가 21 번으로 총 33 번의 최적화가 수행된다. 정해인 사분의 일 원과 최적해 결과를 비교해 보면, 제어점의 위치만을 설계변수로 택하는 경우 오차가 1.52%이고 위치-가중치 최적화에서는 1.43%의 오차를 얻음으로써 가중치를 추가적으로 설계 변수로 택하였을 때 오차가 더 작은 것을 확인할 수 있다.

또한 위치와 가중치에 대한 민감도는 서로 다른 유형의 변수에 대한 민감도 값이므로 정확한 비교는 할 수 없지만, 예를 들어 위치-가중치 최적화에서 마지막 최적화 수행 할 때의 특정 설계변수에서의 x 변위, y 변위, 가중치에 대한 면적 민감도는 각각 0.01, 0.14, 3.010 으로 제어점간의 거리가 작을 경우, 가중치 값을 변화할 때 면적의 변화가 더 큰 경우가 발생할 수 있음을 알 수 있다. Fig.8에서 최적화 과정 동안의 정규화된 목적함수와 제한조건의 변화를 살펴보면, 초기 부피보다 더 작은 부피 제한 조건을 가하였기 때문에 모든 최적화 과정에서 목적함수가 기존의 목적함수보다 증가한 값을 나타낸다. 최적화 결과를 비교하면, 가중치를 설계변수로 택할 경우, 목적함수에도 이점이 있음을 확인할 수 있다.

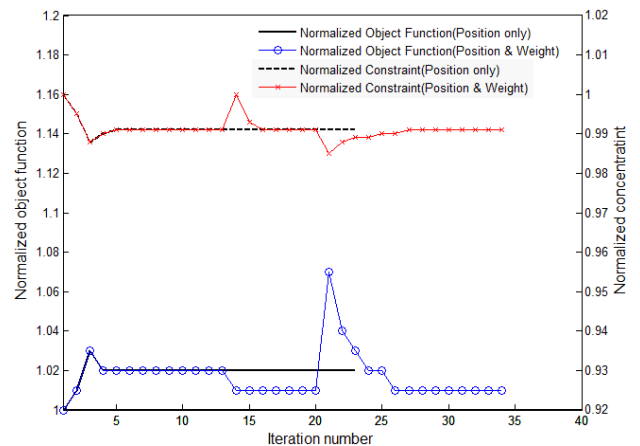


Fig. 8 Histories of normalized objective function and constraint: Plate with a hole

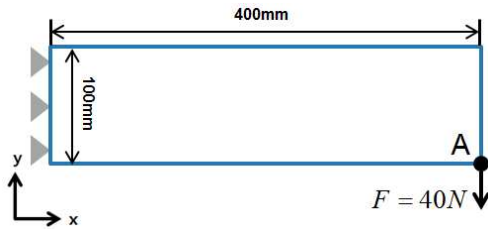


Fig. 9 Problem definition: Beam

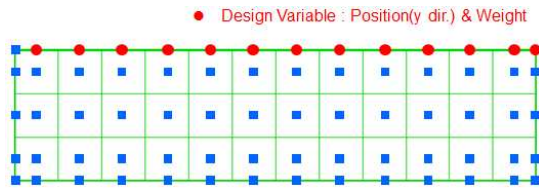


Fig. 10 Definition of design variables: Beam

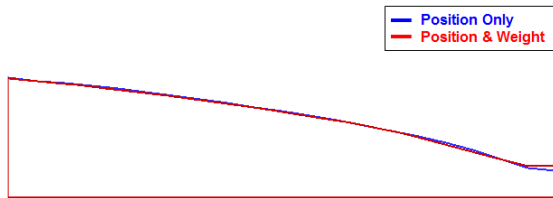


Fig. 11 Optimization results: Beam

4.2 빔 형상최적화

본 예제는 하중조건 하에 빔의 변위 최소화를 위한 빔의 형상최적설계 문제이다. 재료상수는 $E = 210GPa$, $\nu = 0.3$ 이며, 문제 정의는 Fig. 9 에 나타나 있으며, 점 A 에 집중 하중을 가하였다. 최적화 문제 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } u_{A_y} \\ & \text{subject to } V \leq 0.6V_0 \end{aligned} \quad (21)$$

주어진 부피 제한 조건하에 점 A 에서 y 축 변위를 최소화하는 최적화를 수행하였다. 대부분 빔 형상최적화 시, 빔의 오른쪽 끝부분이 좁아지면서 불안정한 결과 값을 유발 시킴으로 인해 빔의 두께가 일정 수준 이상, 이하가 되지 않도록 추가적으로 제약 조건⁽⁸⁾을 가한다. Fig. 10 은 요소와 제어점, 최적화를 수행하는 설계변수 정의를 나타낸다. 본 문제에서는 빔의 윗면에 위치한 제어점의 y 좌표값과 가중치를 설계변수로 설정하여 형상최적화를 수행한다.

먼저 제어점의 위치 최적화를 수행하고, 최적화 과정 동안 제어점간 거리가 일정수준 이상 가까워지면, 제어점의 이동을 멈추고 가중치 최적화를 수행한다. Fig. 11 는 위치 최적화와 위치-가중치 최적화를 수행한 최적형상을 나타낸다. 형상최적

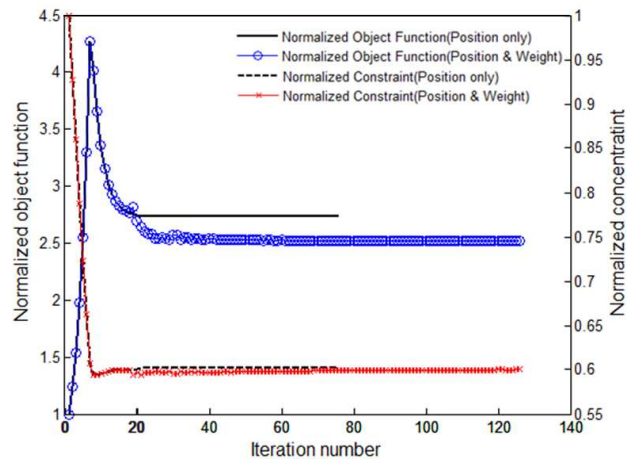


Fig. 12 Histories of normalized objective function and constraint: Plate with a hole

화 과정 동안 빔의 오른쪽 변에 위치한 제어점들이 서로 가까워 지는 경향을 보이는데, 위치-가중치 최적화 과정 동안에 제어점이 일정 수준이상 가까워지면 제어점의 이동을 멈추고 가중치 최적화를 수행하기 때문에 오른쪽 변이 위치 최적화를 수행하였을 때보다 더 길다. Fig. 12 는 최적화 진행에 따른 목적함수와 제한 조건의 변화를 나타낸다. Fig. 12 에서 나타난 것과 같이 제어점 위치만을 설계변수로 하는 경우, 제어점의 위치-가중치 최적화보다 더 빨리 수렴한다. 정규화된 목적함수 값을 비교하여 보면, 제어점의 위치만을 설계변수로 택하는 경우 2.74, 위치-가중치 최적화에서는 2.52 로 가중치를 추가적으로 설계 변수로 택하였을 때 더 낮은 목적함수를 가지는 것을 확인함으로써 더 나은 최적 결과를 얻은 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 스플라인 유한요소법을 이용한 2 차원 형상최적화 시, NURBS 형상표현에 영향을 미치는 제어점의 위치 좌표와 해당 제어점의 가중치를 모두 설계변수로 고려하는 방법을 제시하였다. 기존의 제어점 위치좌표만을 설계변수로 하는 형상최적화 방법 대신에 가중치를 추가적으로 설계 변수로 설정함으로써 비교적 세밀한 NURBS 형상의 변화가 가능하며, 원뿔곡선 표현이 가능한 이점을 가진다. 또한 형상최적화 과정 동안 제어점이 서로 가까워져 메쉬 구성이 어려운 경우가 종종 발생하는데 본 연구에서는 제어점이 일정 수준이상 가까워지면 제어점의 이동을 멈추고, 설계 영역 비교적 작은 가중치 최적화를 수행함으로써 이러한 문제를 방지하도록 하였다.

본 연구에서 제안한 방법을 평판 내부 경계 설

계 문제와 빔 경계 최적화를 수행하여, 위치-가중치 최적화를 수행할 경우 더욱 부드러운 경계를 표현할 수 있으며, 최적화 결과의 목적함수를 비교하였을 때에도 이점을 가지는 것을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국연구재단의 ‘스플라인 기반 차세대 위상최적설계 기술 개발(NRF-2011-0015469)’에 의하여 지원되었음.

참고문헌

(References)

- (1) Kim, H. J., Seo, Y. D. and Youn, S. K., 2009, “Isogeometric Analysis for Trimmed CAD Surfaces,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2982~2995.
- (2) Roh, H. Y. and Cho, M., 2005, “Integration of Geometric Design and Mechanical Analysis Using B-Spline Functions on Surface,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 62, pp. 1927~1949.
- (3) Uhm, T. K., Kim, Y. D., Seo, Y. D., Youn, S. K., 2008, “A Locally Refinable T-Spline Finite Element Method for CAD/CAE Integration,” *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 30, pp. 225~245.
- (4) Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y., 2005, “Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp 4135~4195.
- (5) Cho, S. and Ha, S. H., 2009, “Isogeometric Shape Design Optimization: Exact Geometry and Enhanced Sensitivity,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 38, pp 53~70.
- (6) Wall, W. A., Frenzel, M. A., and Cyron, c., 2008, “Isogeometric Structural Shape Optimization,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 2976~2988.
- (7) Kallinderis, Y., Kontzialis, C., 2009, “A Priori Mesh Quality Estimation via Direct Relation Between Truncation Error and Mesh Distortion,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, pp. 881~902.
- (8) Qian, X., 2010, “Full Analytical Sensitivities in NURBS Based Isogeometric Shape Optimization,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 2059~2071.