Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2014) 20(3):289-297
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2014.14.9016 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

시간지연시스템의 안정성에 관한 연구동향

Stability on Time Delay Systems: A Survey

박 부 견*, 이 원 일, 이 석 영
(PooGyeon Park[1,*], Won Il Lee[1], and Seok Young Lee[2])
[1]Electrical Engineering, POSTECH
[2]Division of IT Convergence Engineering, POSTECH

Abstract: This article surveys the control theoretic study on time delay systems. Since time delay systems are infinite dimensional, there are not analytic but numerical solutions on almost analysis and synthesis problems, which implies that there are a tremendous number of approximated solutions. To show how to find such solutions, several results are summarized in terms of two different axes: 1) theoretic tools like integral inequality associated with the derivative of delay terms, Jensen inequality, lower bound lemma for reciprocal convexity, and Wirtinger-based inequality and 2) various candidates for Laypunov-Krasovskii functionals.

Keywords: time delay, integral inequality, Jensen inequality, lower bound lemma for reciprocal convexity, Wirtinger-based inequality, Lyapunov-Krasovskii functionals

I. 서론

시스템의 전송 속도, 계산 시간 등의 물리적인 제약으로 인해 발생하는 시간지연 현상은 네트워크 시스템, 원자로 시스템, 생물 · 화학 공정 시스템 등의 다양한 현실시스템에 필연적으로 존재한다. 이는 전체 시스템을 불안정하게 하거나 성능을 저하시키는 주요 요소 중 하나이기 때문에, 이러한 현상을 갖는 시간지연시스템의 안정성 해석 및 안정화에 대한 연구는 현실적으로나 이론적으로나 매우 중요하다. 하지만 시간지연시스템은 무한차원시스템이기 때문에 정확한 해가 존재하지 않으며 따라서 덜 보수적인(less conservative) 근사 해를 찾기 위한 여러 가지 방법들이 많은 연구자들에 의해 연구되고 있다.

이러한 시간지연시스템에 관한 연구의 목적은 시스템의 안정성을 보장하는 최대허용 시간지연을 밝혀내기 위한 조건을 가능한 가장 적은 변수들을 가지고 찾는 것이다. 이러한 조건들은 선형 행렬 부등식(LMI) 문제의 형태로 유도되는데, 그 이유는 LMI 문제를 해결하기 위한 많은 수치해석 알고리즘들이 현재 존재하며 이를 통해 비교적 쉽게 해를 구할 수 있기 때문이다. 시간지연시스템의 안정성 해석 및 안정화 조건은 크게 시간지연 독립조건과 시간지연 종속조건 두 가지로 분류될 수 있다. 시간지연 독립조건은 그 결과가 시간지연과 무관하기 때문에 시간지연 종속조건보다 더 보수적이며 상대적으로 단순하기 때문에 관련 연구 초기 단계에 많이 연구되었다. 하지만 시간지연 종속조건이 시간지연에 관한 정보를 포함하고 있기 때문에 시간지연 독립조건보다 훨씬 덜 보수적이라는 연구 결과가 발표된 이후 [2], 현재는 거의 모든 연구가 시간지연 종속조건을 찾는데 집중되고 있다.

본 논문의 목적은 현재까지 진행되어 온 시간지연시스템에 관한 연구 동향을 파악하고 나아가 관련 연구의 활성화를 위한 발판을 제공하는 것이다. 시간지연시스템의 안정성 해석을 위한 다양한 접근방법과 보다 덜 보수적인 조건을 구하기 위해 연구된 이론적 도구들이 소개 될 것이다. 또한 보수성(conservatism)을 판단하기 위해 공통된 하나의 시스템에 대해 서로 다른 조건들로부터 얻은 시스템의 안정성을 보장하는 최대허용 시간지연을 나열하여 비교할 것이다.

* Corresponding Author
Manuscript received January 24, 2014 / accepted February 3, 2014
박부견, 이원일: 포항공대 전자전기공학과
(ppg@postech.ac.kr/wilee@postech.ac.kr)
이석영: 포항공대 정보전자융합공학부(suk122@postech.ac.kr)

II. PRELIMINARY

시간지연은 크게 두 가지로 나눌 수 있으며, 상태변수 시간지연과 입력 시간지연이다. 상태변수 시간지연은 시스템의 상태변수에 시간지연이 포함되는 경우이며, 입력 시간지연은 제어기로부터 시스템에 들어오는 입력신호에 시간지연이 포함되는 경우이다. 또한 각각의 시간지연은 단일 시간지연, 다중 시간지연, 분산 시간지연, 이산 시간지연 등 다양한 형태로 시스템에 존재한다. 본 논문에서는 시간지연시스템 중에서도 현재까지 연구가 가장 활발한 다음의 단일 상태변수 시간지연시스템을 다루고자 한다.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), \quad t > 0. \\
&(\Sigma_1):\ 0 \le h(t) = h \le \bar{h}, \\
&\qquad x(t) = \phi(t),\ \ \forall t \in [-\bar{h}, 0], \\
&(\Sigma_2):\ 0 \le h(t) \le h_2, \\
&\qquad x(t) = \phi(t),\ \ \forall t \in [-h_2, 0], \\
&(\Sigma_3):\ 0 \le h_1 \le h(t) \le h_2, \\
&\qquad x(t) = \phi(t),\ \ \forall t \in [-h_2, 0].
\end{aligned}
$$

시스템 (Σ_1)은 상수 시간지연을 가지며, (Σ_2)는 상계를 가지는 시변 시간지연 그리고 (Σ_3)은 상계와 하계를 모두 가지는 시변 시간지연시스템이다.

시간지연시스템의 안정조건은 Lyapunov-Razumikhin 정리와 Lyapunov-Krasovskii 정리 크게 두 가지에 기반하여 얻어진다. 두 가지 정리를 소개하기 앞서 먼저 다음을 정의한다.

구간 $[-\bar{h},0]$ 을 $\mathcal{R}^n$ 으로 사상하는 연속함수의 Banach 공간을 $\mathcal{C}_{n,\bar{h}}$ 이라 정의한다면, 시간지연시스템은 초기조건 $x(t_0+\theta)=\phi(\theta),\ \theta\in[-\bar{h},0],\ \phi\in\mathcal{C}_{n,\bar{h}}$ 을 만족하는 미분방정식

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t),\quad t\ge t_0. \tag{1}$$

으로 표기될 수 있다. 여기서 $x(t)\in\mathcal{R}^n$, $f:\mathcal{R}\times\mathcal{C}\to\mathcal{R}^n$, $x_t=x(t+\theta),\ \theta\in[-\bar{h},0],\ \|\phi\|_c=\max_{-\bar{h}\le\theta\le0}\|\phi(\theta)\|$ 이고 $\|\phi(\theta)\|$ 는 시간 θ 에서의 Euclidean 벡터 노옴이다.

마지막으로 (1)의 자명한 해의 안정성 판별 충분조건을 구하기 위한 다음의 두 가지 정리를 소개한다.

정리 1: [1] (Lyapunov-Razumikhin 정리) 함수 $f:\mathcal{R}\times\mathcal{C}_{n,\bar{h}}\to\mathcal{R}^n$ 와 $u(0)=v(0)=0,\ s>0$ 일 때 $u(s)>0,\ v(s)>0$, 엄격히 증가하는 v, 세 조건을 만족하는 비감소 연속함수 $u,v,w:\mathcal{R}^+\to\mathcal{R}^+$ 를 가정한다. 만약 임의의 미분가능 연속함수 $V:\mathcal{R}\times\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$ 가 $t\in\mathcal{R},\ x\in\mathcal{R}^n$ 에 대하여 다음 조건

$$u(\|x\|)\le V(t,x)\le v(\|x\|)$$

을 만족하고 $\theta\in[-\bar{h},0]$ 에 대하여 $V(t+\theta,x(t+\theta))\le V(t,x(t))$ 일 때 (1)의 해를 따르는 V 의 도함수가 다음 조건

$$\dot{V}(t,x(t))\le -w(\|x(t)\|) \tag{2}$$

을 만족하면, (1)의 자명한 해는 균일하게 안정하다. 만약 $s>0$ 일 때 $w(s)>0$ 이고, $s>0$ 일 때 $p(s)>s$ 를 만족하는 비감소 연속함수 p 에 대해서 $V(t+\theta,x(t+\theta))\le p(V(t,x(t)))$ 일 때 (2)가 만족되면, 균일하게 점진적으로 안정하다. 또한 $\lim_{s\to\infty}u(s)=\infty$ 이면 전체적으로 균일하게 점진적으로 안정하다.

정리 2: [1] (Lyapunov-Krasovskii 정리) 함수 $f:\mathcal{R}\times\mathcal{C}_{n,\bar{h}}\to\mathcal{R}^n$ 와 $u(0)=v(0)=0$ 과 $s>0$ 일 때 $u(s)>0,\ \ v(s)>0$ 을 만족하는 비감소 연속함수 $u,v,w:\mathcal{R}^+\to\mathcal{R}^+$ 를 가정한다. 만약 임의의 미분가능 연속함수 $V:\mathcal{R}\times\mathcal{C}_{n,\bar{h}}\to\mathcal{R}$ 가 다음 두 조건

$$\begin{aligned}&(1)\ u(\|\phi(0)\|)\le V(t,\phi)\le v(\|\phi\|_c),\\&(2)\ \dot{V}(t,\phi)\le -w(\|\phi(0)\|)\end{aligned}$$

을 만족하면, (1)의 자명한 해는 균일하게 안정하다. 만약 $s>0$ 일 때 $w(s)>0$ 이면 균일하게 점진적으로 안정하며, $\lim_{s\to\infty}u(s)=\infty$ 이면 전체적으로 균일하게 점진적으로 안정하다.

시간지연시스템에 관한 연구 초기에는 정리 1이 주로 사용되었으나, 이는 보다 덜 보수적인 안정성 조건을 찾기 위한 Lyapunov functional V 를 설계하는데 있어서 정리 2보다 자유도가 현저히 낮다. 이러한 이유로 현재 대부분의 연구는 정리 2에 기반하고 있으며, 따라서 본 논문도 정리 2에 기반한 연구 결과를 위주로 소개하도록 한다.

III. THEORETIC TOOLS

정리 2를 사용하여 안정성 조건을 구할 때 효과적인 Lyapunov-Krasovskii functional (LKF)의 선정도 중요하지만, 같은 LKF에 대해서 그의 도함수의 상계를 얼마나 정확히 구하는가는 덜 보수적인 안정성 조건을 구하기 위한 매우 중요한 요소이다. 이 장에서는 LKF의 도함수 안에 존재하는 적분 항의 상계를 구하기 위한 여러 가지 이론적 도구들을 소개한다.

1. Integral inequality

연구 초기에는 LKF의 도함수 안에 존재하는 적분 항의 상계를 구하기 위해서 잘 알려진 다음의 부등식이 사용되었다.

$$-2a^Tb\le a^TXa+b^TX^{-1}b. \tag{3}$$

여기서 $a,b\in\mathcal{R}^n$ 는 주어진 벡터, $X>0$ 는 행렬이다. 하지만 (3)에는 큰 보수성이 존재하며, 보다 덜 보수적인 안정성 조건을 구하기 위해서 다음과 같은 새로운 보조 정리가 제안되었다[2].

보조정리 1: [2] 주어진 벡터 $a(s),\ b(s)\in\mathcal{R}^n,\ s\in\Omega$ 와 임의의 행렬 $X>0$ 그리고 M 에 대하여 다음이 성립한다.

$$-2\int_\Omega a^T(s)b(s)ds\le\int_\Omega\begin{bmatrix}a(s)\\b(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}X & XM\\(*) & (2,2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(s)\\b(s)\end{bmatrix}ds.$$

여기서 $(2,2)$는 $(M^TX+I)X^{-1}(XM+I)$ 이다.

또한 보조정리 1은 [3]에서 좀 더 일반적인 형태로 제안되었으며, 이를 Integral inequality 보조정리라고 한다.

보조정리 2: [3] (Integral inequality 보조정리) 벡터 $a(s),\ b(s)\in\mathcal{R}^n,\ s\in\Omega$ 와 행렬 $\mathcal{N}$ 이 주어졌을 때, 임의의 행렬 $X,\ Y$ 그리고 Z 에 대해 다음이 성립한다.

$$-2\int_\Omega a^T(s)\mathcal{N}b(s)ds\le\int_\Omega\begin{bmatrix}a(s)\\b(s)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}X & Y-\mathcal{N}\\(*) & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(s)\\b(s)\end{bmatrix}ds.$$

여기서 $\begin{bmatrix}X & Y\\(*) & Z\end{bmatrix}\ge0$ 이다.

보조정리 2는 (3)보다 훨씬 정확하고 일반화된 형태이며, 따라서 보조정리 2를 사용하여 얻은 안정조건들이 (3)을 사용하여 얻은 안정조건보다 덜 보수적이다. 이러한 이유로 보조정리 2는 시간지연시스템과 관련된 다양한 문제를 해결하기 위한 방안으로 널리 사용되어 왔다[2,3,12,14-26].

Integral inequality 보조정리는 상계를 구하기 위해서 LKF에 포함된 행렬 이외에 free-weighting 행렬이라 불리는 새로운 행렬을 도입한다. 따라서 이 보조정리를 사용하여 구해진 안정성 조건은 비교적 큰 최대허용 시간지연을 보장하지만, free-weighting 행렬 기법과 함께 사용되므로 구해야 하는 행렬 변수를 많이 포함하며 계산시간이 오래 걸리는 단점이 있다.

2. Jensen inequality

앞 절에서 설명한 Integral inequality 보조정리의 단점에 대한 대안으로 Jensen inequality라는 새로운 부등식이 LKF 도함수의 상계를 구하기 위해 새롭게 사용되었으며, 현재까지 발표되는 많은 연구결과들이 다음과 같은 Jensen inequality 보조

정리에 기반하고 있다.

보조정리 3: [1] (Jensen inequality 보조정리) 행렬 $R>0$ 과 상수 $b>a$ 가 주어졌을 때, 벡터 함수 $w:[a,b]\to\mathcal{R}^n$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$-(b-a)\int_a^b \dot{w}^T(s)R\dot{w}(s)ds \le -\begin{bmatrix} w(b) \\ w(a)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & -R \\ (*) & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(b) \\ w(a)\end{bmatrix}.$$

보조정리 3을 사용하면 적분 항의 상계를 구하는 과정에서 적분 항에 포함된 행렬 이외에 어떠한 행렬도 추가적으로 도입하지 않고 보조정리 2를 사용하는 것보다 비교적 쉽게 안정성 조건을 도출할 수 있기 때문에, 이 보조정리를 기반으로 구해진 안정성 조건은 적은 수의 행렬 변수를 포함하며 계산시간이 빠른 장점이 있다. 이러한 이유로 보조정리 3은 보조정리 2에 대한 대안으로 시간지연시스템과 관련된 다양한 문제를 해결하기 위한 방안으로 널리 사용되고 있다[4-6, 27-45].

3. Lower bound lemma for reciprocal convexity

Jensen inequality 보조정리는 free-weighting 행렬의 추가 없이 비교적 쉽게 LKF의 도함수의 상계를 구할 수 있게 했지만, 특별한 경우에는 Jensen inequality 보조정리를 사용함으로써 필연적으로 몇몇의 처리하기 어려운 항들이 도출되기도 하였다. 이를 처리하기 위해 안정성 조건의 도출 과정에서 보수적인 근사 과정이 도입되었으며, 이는 Jensen inequality 보조정리를 사용하여 구한 안정성 조건이 같은 LKF에 대하여 Integral inequality 보조정리를 사용하여 구한 안정성 조건보다 더 보수적이게 만들었다.

예를 들어 시간지연시스템 (Σ_3)에 대해서 다음과 같은 항이 LKF에 포함되어 있다고 가정한다.

$$V_1(t) = h_{12}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta,\ \ R>0. \tag{4}$$

여기서 $h_{12} \triangleq h_2 - h_1$ 이다.

(4)의 도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= h_{12}^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - h_{12}\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ &\quad - h_{12}\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned} \tag{5}$$

(5)에 보조정리 3을 적용하면 다음과 같은 상계가 도출된다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &\le h_{12}^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ &\quad -\frac{h_{12}}{h(t)-h_1}\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -\frac{h_{12}}{h_2-h(t)}\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right]\end{aligned} \tag{6}$$

저자가 아는 한, 시간지연 $h(t)$ 를 정확히 알지 못하기 때문에 이를 LMI 조건에 포함하는 것은 불가능하며, 따라서 (6)의 마지막 두 항은 직접적으로는 처리가 불가능하다. 이를 처리하기 위해서 시간지연이 $h(t)-h_1 \le h_{12},\ h_2-h(t)\le h_{12}$ 을 만족한다는 특성을 이용해 (6)의 상계가 다음과 같이 한번 더 근사 되었다[4,5].

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &\le h_{12}^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ &\quad -\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -\frac{h_2-h(t)}{h(t)-h_1}\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -\frac{h(t)-h_1}{h_2-h(t)}\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\le h_{12}^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ &\quad -\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -(1-\beta)\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)ds\right] \\ &\quad -\beta\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right]^T R\left[\int_{t-h_2}^{t-h(t)}\dot{x}(s)ds\right].\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\beta=(h(t)-h_1)/h_{12}$ 이다.

(7)의 마지막 두 항은 convex 성질에 의해 β 의 정점을 이용함으로써 처리가 가능하다. 하지만 이렇게 구해진 안정성 조건은 (7)에 포함된 가정의 영향으로 보수적이기 때문에, 이러한 보수성을 줄이기 위해서 [6]에서는 (6)의 마지막 두 항과 같은 형태의 식을 다음과 같이 새롭게 정의하였다.

정의 1: [6] $\mathcal{R}^m$ 의 열린 부분집합 $\mathcal{D}$ 에 대해서 양의 값을 가지는 함수들 $f_1, f_2, \ldots, f_N : \mathcal{R}^m \mapsto \mathcal{R}^n$ 이 있다. 이러한 함수들이 열린 부분집합 $\mathcal{D}$ 에 대해서 다음의 형태를 가질 때, 이를 Reciprocally convex combination이라 정의한다.

$$\frac{1}{\alpha_1}f_1 + \frac{1}{\alpha_2}f_2 + \cdots + \frac{1}{\alpha_N}f_N : \mathcal{D}\mapsto\mathcal{R}^n \tag{8}$$

여기서 실수 $\alpha_i>0$ 는 $\sum_i \alpha_i = 1$ 을 만족한다.

또한 Reciprocally convex combination의 하계를 구하는 보조정리를 다음과 같이 제안하였다.

보조정리 4: [6] (lower bound lemma for reciprocal convexity) Reciprocally convex combination (8)은 다음을 항상 만족한다.

$$\min_{\{\alpha_i|\alpha_i>0,\sum_i\alpha_i=1\}}\sum_i\frac{1}{\alpha_i}f_i(t) = \sum_i f_i(t) + \max_{g_{i,j}(t)}\sum_{i\ne j} g_{i,j}(t)$$

여기서 $\left\{g_{i,j}:\mathcal{R}^m\mapsto\mathcal{R}, g_{j,i}(t)\triangleq g_{i,j}(t), \begin{bmatrix} f_i(t) & g_{i,j}(t) \\ g_{i,j}(t) & f_j(t)\end{bmatrix}\ge 0\right\}$

이다.

보조정리 4는 LKF의 도함수 안에 음의 형태로 존재하는 Reciprocally convex combination의 상계를 효과적으로 구할 수 있게 한다. 그 결과 같은 LKF에 대하여 Jensen inequality 보조정리를 사용하여 얻은 안정성 조건이 Integral inequality 보조정리를 사용하여 얻은 안정성 조건보다 월등히 적은 수의 LMI 변수를 갖고도 동일한 최대허용 시간지연을 도출할 수

있게 되었다. 따라서 Jensen inequality 보조정리를 사용하는 많은 시간지연시스템 문제에 대해서 보조정리 4가 활용되고 있다[33-45].

4. Wirtinger-based Inequality

최근에 들어 Jensen inequality 보조정리 자체가 가지고 있는 보수성에 대해서 분석하려는 노력이 있었으며[7,8], 이러한 보수성을 줄이기 위해 Wirtinger inequality라고 불리는 다음의 새로운 보조정리가 LKF의 도함수의 상계를 구하기 위해 도입되었다.

보조정리 5: [8] (Wirtinger inequality 보조정리) $z(a)=z(b)=0$ 을 만족하는 $\mathcal{C}^1([a,b]\to\mathcal{R}^n)$ 안의 임의의 함수 z 와 행렬 $R>0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_a^b \dot{z}^T(s)R\dot{z}(s)ds \ge \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\int_a^b z^T(s)Rz(s)ds$$

보조정리 5를 기반으로 [9]에서는 Jensen inequality 보조정리보다 덜 보수적인 다음의 보조정리를 제안하였다.

보조정리 6: [9] 구간 $[a,b]\to\mathcal{R}^n$ 의 임의의 모든 연속 함수 w 와 행렬 $R>0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}-(b-a)\int_a^b \dot{w}^T(s)R\dot{w}(s)ds \le -\begin{bmatrix} w(b) \\ w(a)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} R & -R \\ (*) & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(b) \\ w(a)\end{bmatrix} \\ -\frac{\pi^2}{6(b-a)}\int_a^b \Omega^T(s)W_1(s)\Omega(s)ds.\end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$\Omega(s)=[w^T(b)\quad w^T(a)\quad w^T(s)],$$

$$W_1(s)=\begin{bmatrix} 2R & R & -6\dfrac{(s-a)}{(b-a)}R \\ (*) & 2R & -6\dfrac{(b-s)}{(b-a)}R \\ (*) & (*) & 6R\end{bmatrix}$$

이다.

(9)의 우변의 마지막 항은 항상 음수이므로[9], 보조정리 6의 상계가 보조정리 3의 상계보다 항상 더 정확함을 알 수 있다. 이와 같이 보조정리 5를 활용하여 Jensen inequality 보조정리가 자체적으로 가지고 있는 보수성을 줄일 수 있으며, 보다 덜 보수적인 새로운 대안을 찾기 위한 연구가 진행되고 있다[8,9,46-48].

IV. LYAPUNOV-KRASOVSKII FUNCTIONALS

앞 장에서는 덜 보수적인 안정성 조건을 구하기 위한 다양한 이론적 도구들을 소개했다. 이 장에서는 앞 장에서 소개한 도구들에 기반하여 다양한 LKF의 선정과 그로부터 얻어지는 안정성 조건들을 소개한다. 덜 보수적인 안정성 조건을 얻기 위한 LKF의 선정 방법은 크게 두 가지로 나뉜다. 첫 번째는 이미 알고 있는 시간지연의 정보를 최대한 활용하여 적분 구간을 설정하는 것, 그리고 두 번째는 적절한 고차 적분 항을 도입하는 것이다.

1차 적분 항이 포함된 간단한 LKF

$$V(t,x_t)=x^T(t)Px(t)+\int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds$$

에 대해서 다음과 같은 시간지연독립 안정조건을 구할 수 있다.

정리 3: [10] 시간지연시스템 (Σ_1)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0$ 그리고 $Q>0$ 이 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} PA+A^TP+Q & PA_d \\ (*) & -Q\end{bmatrix}<0.$$

하지만 정리 3의 안정조건은 시간지연에 독립이기 때문에 상당히 보수적이며, 덜 보수적인 안정조건을 얻기 위해서 [2]에서는 다음과 같이 2차 적분 항이 포함된 LKF

$$\begin{aligned}V(t,x_t) &= x^T(t)Px(t)+\int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds \\ &+\int_{-h}^0\int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)A_d^TXA_d\dot{x}(s)dsd\theta\end{aligned} \tag{10}$$

에 대해서 보조정리 1을 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다.

정리 4: [2] 시간지연시스템 (Σ_1)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ Q>0,\ V>0$ 그리고 W 이 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} (1,1) & -W^TA_d & A^TA_d^TV & \bar{h}(W^T+P) \\ (*) & -Q & A_d^TA_d^TV & 0 \\ (*) & (*) & -V & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -V\end{bmatrix}<0$$

여기서 (1, 1)은 $(A+A_d)^TP+P(A+A_d)+W^TA_d+A_d^TW+Q$ 이다.

또한 [3]에서는 같은 LKF (10)에 대해서 일반화 된 Integral inequality인 보조정리 2를 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다.

정리 5: [3] 시간지연시스템 (Σ_1)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ Q>0,\ X,\ Y$ 그리고 Z 가 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA+\bar{h}X+Y+Y^T+Q & -Y+PA_d & \bar{h}A^TZ \\ (*) & -Q & \bar{h}A_d^TZ \\ (*) & (*) & -\bar{h}Z\end{bmatrix}<0$$

여기서 $\begin{bmatrix} X & Y \\ (*) & Z\end{bmatrix}\ge 0$ 이다.

[11]에서는 LKF (10)의 좀 더 일반적인 형태인 다음 LKF

$$\begin{aligned}V(t,x_t) &= x^T(t)Px(t)+\int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds \\ &+\int_{-h}^0\int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)dsd\theta\end{aligned} \tag{11}$$

에 대하여 보조정리 2를 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다.

정리 6: [11] 시간지연시스템 (Σ_2)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ Q>0,\ S>0,\ Y_{11},\ Y_{12},\ Y_{22},\ Z_{11},\ Z_{12},\ Z_{22}$ 그리고 Σ가 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{aligned}
&\Sigma(Ae_1^T+A_de_2^T-e_4^T)+Y_{12}(e_1-e_2)^T+(e_1-e_2)Y_{12}^T\\
&+(e_1A^T+e_2A_d^T-e_4)\Sigma^T+Z_{12}(e_2-e_3)^T\\
&+(e_2-e_3)Z_{12}^T+h_2Y_{11}+e_4Pe_1^T+e_1Pe_4^T\\
&+h_2e_4Se_4^T+e_1Qe_1^T-e_3Qe_3^T<0,\\
&\Sigma(Ae_1^T+A_de_2^T-e_4^T)+Y_{12}(e_1-e_2)^T+(e_1-e_2)Y_{12}^T\\
&+(e_1A^T+e_2A_d^T-e_4)\Sigma^T+Z_{12}(e_2-e_3)^T\\
&+(e_2-e_3)Z_{12}^T+h_2Z_{11}+e_4Pe_1^T+e_1Pe_4^T\\
&+h_2e_4Se_4^T+e_1Qe_1^T-e_3Qe_3^T<0,\\
&\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12}\\ (*) & Y_{22}\end{bmatrix}\ge 0,\ \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12}\\ (*) & Z_{22}\end{bmatrix}\ge 0,\ S\ge Z_{22},\ S\ge Y_{22}.
\end{aligned}$$

여기서 $e_i\in\mathcal{R}^{4n\times n},\ i=1,\ldots,4$ 는 block entry 행렬로, 예를 들면 $e_3^T=[0\ 0\ I\ 0]$ 이다.

정리 6은 LKF (11)의 미분 과정에서 도출되는 적분 항 $-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds$ 의 상계를 바로 구하지 않고 적분 구간을 $-\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds$ 와 $-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds$ 로 분할하고 난 뒤 상계를 구함으로서, 덜 보수적인 안정조건을 구하였다.

또한 [12]에서는 새로운 삼중 적분 항이 포함된 다음 LKF

$$\begin{aligned}
V(t,x_t)&=x^T(t)Px(t)+\int_{t-h_1}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds\\
&+\int_{t-h_2}^{t-h_1}x^T(s)Q_2x(s)ds\\
&+\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta\\
&+\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta\\
&+\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^T(s)S_1x(s)dsd\theta\\
&+\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}x^T(s)S_2x(s)dsd\theta\\
&+\int_{-h_1}^{0}\int_{\eta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)T_1\dot{x}(s)dsd\theta d\eta\\
&+\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{\eta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)T_2\dot{x}(s)dsd\theta d\eta
\end{aligned}$$

에 대하여 보조정리 2와 free-weighting 행렬 기법을 확장하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다.

정리 7: [12] 시간지연시스템 (Σ_3)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ Q_j>0,\ R_j>0,\ S_j>0,\ T_j>0,\ X_i,\ Y_i,\ Z,$ U_j, W_j 그리고 $M_i(i=0,1,2,\ j=1,2)$ 가 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{aligned}
&\Psi_h+\Phi_h+h_{12}M_j+Sym(\Psi_c+\Phi_c+h_{12}Y_je_1^T)<0,\\
&\begin{bmatrix} M_0 & Y_0 & X_0 & h_1Y_0\\ (*) & S_1 & W_1 & 0\\ (*) & (*) & R_1 & h_1U_1\\ (*) & (*) & (*) & h_1T_1\end{bmatrix}\ge 0,\\
&\begin{bmatrix} M_j & Y_j & X_j & h_2Y_j\\ (*) & S_2 & W_2 & 0\\ (*) & (*) & R_2 & h_2U_2\\ (*) & (*) & (*) & h_2T_2\end{bmatrix}\ge 0,\\
&\forall j=1,2
\end{aligned}$$

여기서 $e_i\in\mathcal{R}^{5n\times n},\ i=1,\ldots,5$ 는 block entry 행렬로, 예를 들면 $e_3^T=[0\ 0\ I\ 0\ 0]$ 이고,

$$\begin{aligned}
\Psi_h&=e_1(Q_1+h_1S_1+h_{12}S_2)e_1^T-e_2(Q_1-Q_2)e_2^T\\
&\quad-e_4Q_2e_4^T+e_5\left(h_1R_1+h_{12}R_2+\frac{h_1^2}{2}T_1+h_ST_2\right)e_5^T,\\
\Psi_c&=e_5Pe_1^T+X_0(e_1^T-e_2^T)+X_1(e_2^T-e_3^T)\\
&\quad+X_2(e_3^T-e_4^T)+h_1Y_0e_1^T+Z(e_5^T-Ae_1^T-A_de_3^T)\\
\Phi_h&=h_1M_0+e_1(U_1+W_1)e_1^T+e_2(U_1-W_1-U_2+W_2)e_2^T\\
&\quad+e_4(U_2-W_2)e_4^T,\\
\Phi_c&=-e_2(U_1-U_2)e_1^T-e_4U_2e_1^T,\\
h_s&=(h_2^2-h_1^2)/2,\ h_{12}=h_2-h_1,
\end{aligned}$$

그리고 $Sym(M)=M+M^T$ 이다.

보조정리 2를 사용하여 덜 보수적인 안정조건을 구할 수 있지만 이렇게 구한 안정조건은 찾아야 하는 행렬 변수를 많이 포함한다는 단점이 있다. 그 대안으로 상계를 구할 때 적분 항에 포함된 행렬 이외에 다른 행렬을 추가로 도입하지 않는 보조정리 3이 시간지연시스템의 안정조건을 구하기 위해 사용되었다.

LKF (11)에 대하여 보조정리 3을 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구할 수 있다.

정리 8: [13] 시간지연시스템 (Σ_1)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ Q>0$ 그리고 $S>0$ 가 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} PA+A^TP+Q-\frac{1}{h}S & PA_d+\frac{1}{h}S & A^TS\\ (*) & -Q-\frac{1}{h}S & A_d^TS\\ (*) & (*) & -\frac{1}{h}S\end{bmatrix}<0.$$

[5]에서는 새로운 삼중 적분 항이 포함된 다음 LKF

$$V(t,x_t)=\zeta^T(t)P\zeta(t)+\int_{t-h_1}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds$$

$$+\int_{t-h_2}^{t-h_1} x^T(s)Q_2x(s)ds+\int_{t-h_1}^{t} \dot{x}^T(s)Q_3\dot{x}(s)ds$$
$$+\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)Q_4\dot{x}(s)ds$$
$$+h_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)dsd\theta$$
$$+h_{12}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)dsd\theta$$
$$+h_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x^T(s)Z_3x(s)dsd\theta$$
$$+h_{12}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} x^T(s)Z_4x(s)dsd\theta$$
$$+\frac{h_1^2}{2}\int_{-h_1}^{0}\int_{\eta}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta d\eta$$
$$+h_s\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{\eta}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta d\eta$$

에 대해서 보조정리 3을 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다. 여기서 $h_{12}=h_2-h_1$, $h_s=(h_2^2-h_1^2)/2$, 그리고 $\zeta(t)=col\{x(t),x(t-h_1),x(t-h_2),\ \int_{t-h_1}^{t}x(s)ds,\ \int_{t-h_1}^{t-h_2}x(s)ds\}$ 이다.

정리 9: [5] 시간지연시스템 (Σ_3)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P=[P_{ij}]_{5\times5}>0,\ Q_i>0,\ Z_i>0$ 그리고 $R_j>0$ $(i=1,\ldots,4,\ j=1,2)$ 이 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{aligned}&\Gamma P\Upsilon^T+\Upsilon P\Gamma^T+\Lambda+A_c^TYA_c-(e_1-e_3)Z_1(e_1^T-e_3^T)\\&\quad-2(e_2-e_4)Z_2(e_2^T-e_4^T)-(e_3-e_2)Z_2(e_3^T-e_2^T)\\&\quad-e_8Z_4e_8^T-2e_9Z_4e_9^T-(h_1e_1-e_7)R_1(h_1e_1^T-e_7^T)\\&\quad-(h_{12}e_1-e_8-e_9)R_2(h_{12}e_1^T-e_8^T-e_9^T)<0\\&\Gamma P\Upsilon^T+\Upsilon P\Gamma^T+\Lambda+A_c^TYA_c-(e_1-e_3)Z_1(e_1^T-e_3^T)\\&\quad-(e_2-e_4)Z_2(e_2^T-e_4^T)-2(e_3-e_2)Z_2(e_3^T-e_2^T)\\&\quad-2e_8Z_4e_8^T-e_9Z_4e_9^T-(h_1e_1-e_7)R_1(h_1e_1^T-e_7^T)\\&\quad-(h_{12}e_1-e_8-e_9)R_2(h_{12}e_1^T-e_8^T-e_9^T)<0\end{aligned}$$

여기서 $e_i\in\mathcal{R}^{9n\times n}$, $i=1,\ldots,9$ 는 block entry 행렬로, 예를 들면 $e_3^T=[0\ 0\ I\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ 이고

$$\begin{aligned}&\Gamma=[e_1\ \ e_3\ \ e_4\ \ e_7\ \ e_8+e_9]\\&\Upsilon=[A_c^T\ \ e_5\ \ e_6\ \ e_1-e_3\ \ e_3-e_4]\\&\Lambda=diag\{Q_1+h_1^2Z_3+h_{12}^2Z_4,0,-Q_1\\&\qquad+Q_2,-Q_2,-Q_3+Q_4,-Q_4,-Z_3,0,0\}\\&A_c=[A_1\ \ A_d\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\\&Y=Q_3+h_1^2Z_1+h_{12}^2Z_2+\frac{h_1^4}{4}R_1+h_s^2R_2\end{aligned}$$

이다.

[5]에서는 $\int_{t-h_2}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds$ 대신에 $\int_{t-h_2}^{t-h_1}x^T(s)Q_2x(s)ds$ 를 LKF에 포함하는 것이 덜 보수적임을 예제로 보였다. 이것은 LKF를 선정할 때 적분 구간에 시간지연 정보를 적절히 이용하는 것이 덜 보수적인 안정조건을 찾는 방법임을 보여주는 하나의 예이다.

앞 장의 3절에서 언급했듯이, 보조정리 3을 사용하면 안정조건을 구하는 데 처리하기 어려운 항들이 도출되기도 한다. 이는 같은 LKF에 대해서 보조정리 3을 사용하는 것이 보조정리 2를 사용하는 것보다 더 보수적인 안정조건을 도출하게 만들었고, [6]에서는 이를 해결하기 위해서 다음 LKF

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&=x^T(t)Px(t)+\int_{t-h_1}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds\\&\quad+\int_{t-h_2}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds+h_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta\\&\quad+h_{12}\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta\end{aligned}\tag{12}$$

에 대해서 보조정리 3과 보조정리 4를 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다. 여기서 $h_{12}=h_2-h_1$ 이다.

정리 10: [6] 시간지연시스템 (Σ_3)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ Q_j>0,\ R_j>0,\ (i=1,2)$ 그리고 $S_{1,2}$ 이 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{aligned}&e_5Pe_1^T+e_1Pe_5^T+e_1Q_1e_1^T-e_3Q_1e_3^T+e_1Q_2e_1^T\\&-e_4Q_2e_4^T+h_1^2e_5R_1e_5^T+h_{12}^2e_5R_2e_5^T-(e_1-e_3)R_1(e_1-e_3)^T\\&-\begin{bmatrix}e_3^T-e_2^T\\e_2^T-e_4^T\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}R_2&S_{1,2}\\(*)&R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_3^T-e_2^T\\e_2^T-e_4^T\end{bmatrix}<0\end{aligned}$$

여기서 $\begin{bmatrix}R_2&S_{1,2}\\(*)&R_2\end{bmatrix}\geq0$ 이다.

[6]에서 저자는 같은 LKF (12)에 대해서 보조정리 2를 사용하여 얻은 안정조건보다 정리 10이 훨씬 적은 수의 행렬 변수를 가지면서 같은 최대허용 시간지연을 도출하는 것을 예제로 보였다. 즉, 보조정리 4는 Jensen inequality 보조정리를 통해 얻은 안정조건이 Integral inequality 보조정리를 통해 얻은 안정조건보다 훨씬 적은 행렬 변수로 같은 성능을 내게 돕는다.

마지막으로 최근에 [9]에서는 새로운 형태의 LKF

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&=\begin{bmatrix}x(t)\\\int_{t-h_1}^{t}x(s)ds\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P&Q\\Q^T&Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\int_{t-h_1}^{t}x(s)ds\end{bmatrix}\\&\quad+\int_{t-h_1}^{t}x^T(s)Sx(s)ds+\int_{t-h}^{t}(h-t+s)\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned}$$

에 대해서 보조정리 5를 사용하여 다음과 같은 시간지연종속 안정조건을 구하였다.

정리 11: [9] 시간지연시스템 (Σ_1)은 다음의 조건을 만족하는 행렬 $P>0,\ S>0$ 그리고 $R>0$ 이 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix}P&Q\\(*)&Z+S/\bar{h}\end{bmatrix}>0,$$
$$\Pi(\bar{h})-\frac{1}{\bar{h}}W(R)<0.$$

여기서

$$\Pi(\bar{h}) = \begin{bmatrix} \Delta & PA_d - Q & \bar{h}A^TQ + \bar{h}Z \\ (*) & -S & \bar{h}A_d^TQ - \bar{h}Z \\ (*) & (*) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \\ 0 \end{bmatrix} \bar{h}R \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$W(R) = \begin{bmatrix} R & -R & 0 \\ (*) & R & 0 \\ (*) & (*) & 0 \end{bmatrix} + \frac{\pi^2}{4} \begin{bmatrix} R & R & -2R \\ (*) & R & -2R \\ (*) & (*) & 4R \end{bmatrix}$$

그리고 $\Delta = PA + A^TP + S + Q + Q^T$ 이다.

이 장에서 살펴 보았듯이 시간지연시스템의 안정성 판별 문제는 보다 적은 변수를 필요로 하면서 안정 조건을 도출하는데 적합한 이론적 도구를 연구하는 것과, 시간지연 정보를 최대한 활용하면서 또한 적절한 고차 적분 항을 포함하는 LKF를 선정하는 것, 두 가지를 바탕으로 연구되어 왔으며 현재까지도 관련 연구가 활발히 진행되고 있다.

V. 예제

예제 1: 안정조건의 보수성을 비교하는데 가장 많이 사용되는 다음의 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)),\ t > 0,$$
$$A = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 \end{bmatrix},\quad A_d = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

비교를 위해 4장에 소개된 안정조건들로 얻은 (13)의 최대 허용 시간지연과 각각의 안정조건이 포함하는 변수의 수를 표 1, 2에 나열하였다. 명확한 비교를 위해 시불변 시간지연 시스템(Σ_1)과 시변 시간지연시스템(Σ_2, Σ_3)에 대한 결과를 각각 Table 1, 2에 나누어서 기술하였다. 예제 1에서 n=2이다.

VI. 결론

본 논문에서는 시간지연시스템의 안정성 문제에 대한 연구결과를 이론적 도구와 LKF의 선정, 두 가지 관점으로 정리하였다. 먼저 시간지연시스템의 안정성 조건을 구하기 위해 제안된 다양한 이론적 도구들의 필요성 및 장단점을 분석하였고, 다음으로는 다양한 LKF의 선정과 그로부터 도출된 안정성 조건을 정리하고 공통된 예제를 통해 그 성능을 비교하였다. 이론적 도구는 적은 수의 변수를 요구하면서 적분항의 상계를 더 정확히 구해내는 방향으로 연구되어 왔으며, LKF는 일차 적분 항부터 현재는 사차 적분 항까지 고차 적분 항을 도입하는 방향으로, 그리고 시간지연의 정보를 더 많이 활용하는 방향으로 설계되어 왔다. 현재까지도 보다 덜 보수적인 안정성 조건을 찾기 위한 이론적 도구와 효율적인 LKF에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며, 이러한 연구는 신경 회로망, 퍼지 시스템, 상태변수 추정, 동기화 문제 등 넓은 분야에 걸쳐 응용되고 있기 때문에 아직도 관련 연구에 많은 가능성이 열려 있다고 할 수 있다.

표 1. 시불변 시간지연시스템의 최대허용 시간지연 $\bar{h}$.

Table 1. Maximum allowable time delay $\bar{h}$ for system with constant delay.

	$\bar{h}$	변수의 개수
정리 3	불안정	n^2+n
정리 4	4.358	$2.5n^2$+1.5n
정리 5	4.358	$3n^2$+2n
정리 8	4.472	$1.5n^2$+1.5n
정리 11	5.901	$3n^2$+2n

표 2. 시변 시간지연시스템의 최대허용 시간지연 h_2.

Table 2. Maximum allowable time delay h_2 for system with time-varying delay.

h_1	0	0.6	1.2	변수의 개수
정리 6	1.86	-	-	$9.5n^2$+3.5n
정리 7	1.95	2.08	2.25	$80n^2$+15n
정리 9	1.52	1.69	2.02	$17.5n^2$+7.5n
정리 10	1.86	1.92	2.15	$3.5n^2$+2.5n

REFERENCES

[1] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov, *Stability of Time-Delay Systems*, Springer, 2003.

[2] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 4, pp. 876-877, Apr. 1999.

[3] Y. S. Moon and P. Park, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 14, pp. 1447-1455, 2001.

[4] H. Shao, "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay," *Automatica*, vol. 45, no. 3, pp. 744-749, Mar. 2009.

[5] J. Sun, G. Liu, J. Chen, and D. Rees, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 46, no. 2, pp. 466-470, Feb. 2010.

[6] P. Park, J. W. Ko, and C. K. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 235-238, Jan. 2011.

[7] C. Briat, "Convergence and equivalence results for the Jensen's inequality," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56. no. 7, pp. 1660-1665, 2011.

[8] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Reducing the gap of the Jensen's inequality by using the Wirtinger's inequality," *submitted to Automatica*, 2012.

[9] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "On the use of the Wirtinger inequalities for time-delay systems," *Proc. of 10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 2012.

[10] E. I. Verriest, M. K. H. Fan, and J. Kullstam, "Frequency domain robust stability criteria for linear delay systems," *Proc. of 32nd IEEE Conf. Decision Control*, 1993.

[11] P. Park and J. W. Ko, "Stability and robust stability for systems with a time-varying delay," *Automatica*, vol. 43, no. 10, pp. 1855-1858, Oct. 2007.

[12] C. Jeong, P. G. Park, and S. H. Kim, "Improved approach to robust stability and $\mathcal{H}_\infty$ performance analysis for systems with an interval time-varying delay," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 21, pp. 10533-10541, Jul. 2012.

[13] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle, "Delay-dependent robust stability of time delay systems," *Proc. of 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2006a.

[14] J.-H. Park, "A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays," *Journal of Computational and*

Applied Mathematics, vol. 136, pp. 177-184, 2001.

[15] W.-H. Chen and W. X. Zheng, ''Delay-dependent robust stabilisation for uncertain neutral systems with distributed delays,'' *Automatica*, vol. 43, pp. 95-104, 2007.

[16] X. G. Liu, R. R. Martin, M. Wu, and M. L. Tang, "Delay-dependent robust stabilisation of discrete-time systems with time-varying delay,'' *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, vol. 153, pp. 689-702, 2006.

[17] X.-M. Zhang, M. Wu, J.-H. She, and Y. He, "Delay-dependent stabilisation of linear systems with time-varying state and input delays,'' *Automatica*, vol. 41, pp. 1405-1412, 2005.

[18] C.-L. Chen, G. Feng, and X.-P Guan, ''Delay-dependent stability analysis and controller synthesis for discrete time T-S fuzzy systems with time delays,'' *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, pp. 630-643, 2005.

[19] X. Lou and B. Cui, ''Delay-dependent stochastic stability of delayed Hopfield neural networks with Markovian Jump parameters,'' *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 328, pp. 316-326, 2007.

[20] C. Li, H. Wang and X. Liao, ''Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays,'' *IEE Proceedings of Control Theory and Applications*, vol. 151, pp. 417-421, 2004.

[21] H. R. Karimi and P. Maass, "Delay-range-dependent exponential synchronization of a class of delayed neural networks," *Chaos, Solitons & Fractals,* vol. 41, no. 3, pp. 1125-1135, Aug. 2009.

[22] M. Chen, G. Feng, H. B. Ma, and G. Chen, "Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ filter design for discrete-time fuzzy systems with time-varying delays," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vo. 17, no. 3, pp. 604-616, 2009.

[23] J. H. Park, "On global stability criterion of neural networks with continuously distributed delays," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 37, no. 2, pp. 444-449, Jul. 2008

[24] H. Li, B. Chen, Q. Zhou, and C. Lin, "Delay-dependent robust stability for stochastic time-delay systems with polytopic uncertainties," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, no. 15, pp. 1482-1492, 2008.

[25] L. Wu and Z. D. Wang, "Fuzzy filtering of nonlinear fuzzy stochastic systems with time-varying delay," *Signal Processing*, vol. 89, no. 9, pp. 1739-1753, Sep. 2009.

[26] W. Qian, S. Cong, Y. X. Sun, and S. M. Fei, "Novel robust stability criteria for uncertain systems with time-varying delay," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 215, no. 2, pp. 866-872, Sep. 2009.

[27] H. Shao and Q. Han, "New stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 3 pp. 619-625, Mar. 2011.

[28] H. Gao, Z. Fei, J. Lam, and B. Du, "Further results on exponential estimates of Markovian jump systems with mode-dependent time-varying delays," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 1, pp. 223-229, Jan. 2011.

[29] J. Fu, H. Zhang, T. Ma, and Q. Zhang, "On passivity analysis for stochastic neural networks with interval time-varying delay," *Neurocomputing*, vol. 73, no. 4-6, pp. 795-801, Jan. 2010.

[30] X.-L. Zhu, Y. Wang, and G.-H. Yang, "New stability criteria for continuous-time systems with interval time-varying delay," *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 6, pp. 1101-1107, Jun. 2010.

[31] T. Li, T. Wang, A. Song, and S. Fei, "Exponential synchronization for arrays of coupled neural networks with time-delay couplings," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 9, no. 1, pp. 187-196, Feb. 2011.

[32] H. G. Zhang and Z. W. Liu, "Stability analysis for linear delayed systems via an optimally dividing delay interval approach," *Automatica*, vol. 47, no. 9, pp. 2126-2129, Sep. 2011.

[33] W. I. Lee and P. G. Park, "Second-order reciprocally convex approach to stability of systems with interval time-varying delays," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 229, pp. 245-253, Feb. 2014.

[34] Z. G. Wu, J. Lam, H. Su, and J. Chu, "Stability and dissipativity analysis of static neural networks with time delay," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 23, no. 2, pp. 199-210, Feb. 2012.

[35] J. Liu and J. Zhang, "Note on stability of discrete-time time-varying delay systems," *IET Control Theory Appl*, vol. 6, no. 2, pp. 335-339, Jan. 2012.

[36] J. K. Tian and S. M. Zhong, "Improved delay-dependent stability criteria for neural networks with two additive time-varying delay components," *Neurocomputing*, vol. 77, no. 1, pp. 114-119, Feb. 2012.

[37] Z. Feng and J. Lam, "Robust reliable dissipative filtering for discrete delay singular systems," *Signal Process*, vol. 92, no. 12, pp. 3010 -3025, Dec. 2012.

[38] T. Wang, T. Li, X. Yang, and S. Fei, "Cluster synchronization for delayed Lur'e dynamical networks based on pinning control," *Neurocomputing*, vol. 83, pp. 72-82, Apr. 2012.

[39] S. Lakshmanan, J. H. Park, D. H. Ji, H. Y. Jung, and G. Nagamani, "State estimation of neural networks with time-varying delays and Markovian jumping parameter based on passivity theory," *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, no. 2, pp. 1421-1434, Oct. 2012.

[40] X.-M. Zhang and Q.-L. Han, "Novel delay-derivative-dependent stability criteria using new bounding techniques," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 23, no. 13, pp. 1419-1432, Sep. 2013.

[41] J. Feng and S. Q. Wang, "Reliable fuzzy control for a class of nonlinear networked control systems with time delay," *Acta Automatica Sinica*, vol. 38, no. 7, pp. 1091-1099, Jul. 2012.

[42] F. Yang, H. G. Zhang, G. Hui, and S. Wang, "Mode-independent fuzzy fault-tolerant variable sampling stabilization of nonlinear networked systems with both time-varying and random delays," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 207, no. 16, pp. 45-63, Nov. 2012.

[43] Q. Duan, H. Su, and Z.-G. Wu, "$\mathcal{H}_\infty$ state estimation of static neural networks with time-varying delay," *Neurocomputing*, vol. 97, no. 15, pp. 16-21, Nov. 2012.

[44] T. Li, X. Yang, P. Yang, and S. Fei, "New delay-variation-dependent stability for neural networks with time-varying delay," *Neurocomputing*, vol. 101, pp. 361-369, Feb. 2013.

[45] M. J. Park, O. M. Kwon, S. M. Lee, Ju H. Park, and E. J. Cha, "Consensus control for switched multi-agent systems with interval time-varying delays," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 5, pp. 401-406, May 2012.

[46] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Jensen's and Wirtinger's inequalities for time-delay systems," *Proc. of the 11th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 2013.
[47] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems," *Automatica*, vol. 49, no. 9, pp. 2860-2866, Sep. 2013.
[48] K. Liu and E. Fridman, "Wirtinger's inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization," *Automatica*, vol. 48, no. 1, pp. 102-108, Jan. 2012.

박 부 견

1988년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사). 1995년 Stanford University 전기공학과(공학박사). 1995년~1996년 Stanford University 연구원. 1996년~현재 포항공과대학교 전자전기공학과 교수. 관심분야는 시간지연시스템, LPV, 신호처리.

이 원 일

2010년 경북대학교 전자전기컴퓨터학부(공학사). 2010년~현재 포항공과대학교 전자전기공학과 통합과정. 관심분야는 시간지연시스템, LPV, 신경 회로망, 퍼지 시스템.

이 석 영

2011년 포항공과대학교 전자전기공학과(공학사). 2011년~현재 포항공과대학교 정보전자융합공학부 통합과정. 관심분야는 시간지연시스템, LPV, 신경 회로망, 퍼지 시스템.