Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2014) 20(3):277-288
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2014.14.9015 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

# 비선형 시스템의 상태변수 추정기법 동향

# A Survey on State Estimation of Nonlinear Systems

장 홍, 최 수 항, 이 재 형*
(Hong Jang[1], Su-hang Choi[1], and Jay Hyung Lee[1,*])
[1]Chemical & Biomolecular Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology

**Abstract:** This article reviews various state estimation methods for nonlinear systems, particularly with a perspective of a process control engineer. Nonlinear state estimation methods can be classified into the following two categories: stochastic approaches and deterministic approaches. The current review compares the Bayesian approach, which is mainly a stochastic approach, and the MHE (Moving Horizon Estimation) approach, which is mainly a deterministic approach. Though both methods are reviewed, emphasis is given to the latter as it is particularly well-suited to highly nonlinear systems with slow sampling rates, which are common in chemical process applications. Recent developments in underlying theories and supporting numerical algorithms for MHE are reviewed. Thanks to these developments, applications to large-scale and complex chemical processes are beginning to show up but they are still limited at this point owing to the high numerical complexity of the method.

**Keywords:** review, state estimation method, nonlinear system, optimization approach, bayesian approach

## I. 서론

### 1. 상태 추정(State estimation)

상태 또는 상태 변수(state)는 시스템(system)의 특성과 동적(dynamic) 거동을 설명하기 위해 필요한 과거 또는 현재 정보를 말한다. 동적 시스템을 상태 변수로 해석하면 해당 공정을 정확하고 간편하게 관찰(monitoring)할 수 있고, 효과적으로 제어(control)할 수 있다.

동적 시스템은 상태 변수로 이루어진 모델(model)로 표현 가능하며, 이는 물리적 법칙에 따르는 모델 혹은 실험적인 모델일 수 있다. 물리적 모델에서 상태 변수는 원론적인(first-principle) 물리 현상을 나타내는 미분방정식(differential equation) 또는 차분방정식(difference equation)의 종속 변수(dependent variable)이며, 실험적 모델에서 상태 변수는 일차 또는 이차 이상의 경험식(empirical equation)의 종속 변수이다.

하지만 방정식으로 이루어진 모델만으로는 완벽하게 시스템을 설명할 수 없으며, 밝혀지지 않았거나 예상할 수 없는 부분은 외란(disturbance)이나 잡음(noise)으로 정의하여 상태 변수에 추가 할 수 있다. 외란은 갑자기 변하거나 서서히 변하는 특성을 가질 수 있어 모델화 되기도 하며, 잡음은 보통 확률 분포(probability distribution)로 표현한다.

상태 추정 기법(state estimation method)은 제공되는 시스템 정보를 조합하여, 측정 잡음을 제거하거나 측정이 불가능한 상태 변수를 추정하고, 시스템의 미래 거동을 예측할 수 있는 수학적 기법을 말한다. 사용 가능한 시스템 정보는, 시스템 모델(system model)과 측정 모델(observation model) 그리고 측정치(measurement data)이다.

제어의 관점에서 볼 때 정확하고 효율적인 상태 추정 기법을 설계하여 시스템에 도입할 경우 제어의 성능을 개선할 수 있으며, 특히 상태 변수 기반의 피드백 제어(state-feedback control)에서 정확한 상태 추정 기법은 필수라고 할 수 있다. 즉, 제어하고자 하는 시스템으로부터 측정된 데이터(data)의 불필요한 잡음을 최소화하고, 실제 거동을 대표할 수 있는 상태 변수를 추정하여 피드백 제어에 적용할 수 있다.

예를 들어, 화학공정에서는 물질의 물성(physical property), 농도, 온도, 압력 등 다양한 변수가 존재하지만 물성과 같은 변수는 직접적인 실시간(real-time) 측정이 어렵다. 또한 반응기(reactor)나 증류탑(distillation column)과 같은 분산 시스템(distributed system)에서는 실시간 측정이 비교적 쉬운 온도, 압력 등만 한정된 위치에서 측정이 가능하다. 하지만 실제 화학공정의 제어 목적은 생산품의 품질 유지이고 이를 달성하기 위해서는 측정이 되지 않은 부분까지 물질의 농도와 온도 분포를 정확하게 파악하여야 한다. 결국, 화학공정의 제어에서는 측정된 공정 정보로부터 측정이 불가능한 정보를 추정하여 재구성하는 상태 추정 기법이 필수적이라 할 수 있다.

상태 추정 기법은 크게 확률론적(stochastic) 접근법과 결정론적(deterministic) 접근 방법으로 나눈다. 대표적인 확률론적 접근법으로 상태 변수에 대한 조건부 확률밀도함수(conditional probability-density-function)를 회귀적(recursive)으로 계산하는 방법인 베이지안(Bayesian) 접근법이 있다. 결정론적 접근법의 대표적인 예로는 측정치와 예측치(prediction data)의 오차(error)를 최소화(minimization)하는 문제를 정의하여 푸는 최적화(optimization) 기반의 접근법이 있다.

### 2. 상태 추정 기법의 이해: 칼만 필터(Kalman filter)

상태 추정 기법을 쉽게 이해하기 위해, 가장 기본적인 추정 기법인 칼만 필터를 소개한다. 칼만 필터는 선형(linear)이면서 정규분포(normal distribution) 확률 프로세스를 가정하는

* Corresponding Author
Manuscript received January 24, 2014 / accepted February 3, 2014
장홍, 최수항, 이재형: 한국과학기술원 생명화학공학과
(crimson1001@kaist.ac.kr/suhang_choi@kaist.ac.kr/jayhlee@kaist.ac.kr)
※ 이 논문은 2014년 정부(미래창조과학부)의 재원으로 (재)차세대 바이오매스 연구단(글로벌프론티어연구개발사업)의 지원을 받아 수행된 연구임 ((재)차세대바이오매스연구단-2011-0031354). 또한 2014년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2011-0006839).

시스템에 대한 최적의 상태 추정 기법이다[1,2]. 칼만 필터는 1960년 Kalman에 의해 발표되었으며, 칼만 필터가 실린 논문은 현재까지 15,000회가 넘는 인용수를 기록하고 있다. 칼만 필터를 응용하는 분야는 항공우주(aerospace), 전자(electronics), 기계(mechanics), 화공(chemical engineering), 경제(economics) 등으로 다양하며, 각 분야에서 성공적으로 적용하고 있다.

우선, 칼만 필터에서 대상으로 하는 선형 시스템은 간단히 다음과 같이 정의된다.

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k$$
$$y_k = G_k x_k + v_k$$

$x_k$는 시간 $k$에서의 상태 변수, $y_k$는 시간 $k$에서의 측정치를 나타낸다. 보편적으로 초기 상태 변수 $x_0$는 평균(mean)과 공분산(covariance)으로 표현되는 정규 분포(또는 가우시안(Gaussian) 분포)를 갖는다고 가정한다. $F_k$는 시스템 행렬, $G_k$는 측정 행렬을 나타낸다. $w_k$는 시스템 외란 또는 잡음, $v_k$는 측정 잡음을 나타내며 잡음은 보통 상호독립적이고 동일한 분포 (independent identically distributed (i.i.d))를 가지며, 아래와 같이 평균이 0인 정규분포를 따른다고 가정한다.

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$$
$$v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$$

$Q$와 $R$은 각각 시스템 잡음과 측정 잡음의 공분산이다.

칼만 필터는 조건부 확률(conditional probability) 기반의 상태 추정기(estimator)라 해석할 수 있다. 즉, 시간이 지나면서 새롭게 더해지는 측정치 정보를 이용하여 상태 변수의 조건부 확률밀도함수를 갱신하고, 조건부 확률의 평균을 상태 변수 추정치로 도출한다.

칼만 필터는 시스템 예측(prediction 또는 propagation) 단계와 측정치 갱신(update 또는 correction) 단계로 나뉘어 수행된다. 앞으로 $\{\cdot\}_{l|k}$ 는 시간 $k$까지의 정보를 기반으로 추정하는 시간 $l$에서의 추정치(estimate)를 나타내며, 추정치를 구하는 각 단계는 아래와 같다.

시스템 예측 단계는 시스템 모델 정보를 사용하여 시간 $k-1$에서의 상태 변수 정보를 바탕으로 $k$에서의 상태 변수를 예측하는 단계이다.

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1}$$
$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k$$

$\hat{x}_{k|k-1}$와 $P_{k|k-1}$는 각각 사전(prior) 추정치 및 사전 오차 공분산(error covariance) 행렬이다. 측정치 갱신 단계에서는 시스템 예측 단계에서 예측한 시간 $k$에서의 상태 변수, $\hat{x}_{k|k-1}$에 새롭게 시간 $k$에서의 측정치 정보, $y_k$를 추가하여 시간 $k$의 상태 변수를 갱신한다. 새로운 정보가 추가되었으므로, 상태 변수에 대한 불확실성이 줄어드는 단계이다.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k\left(y_k - G_k \hat{x}_{k|k-1}\right)$$
$$P_{k|k} = (I - K_k G_k) P_{k|k-1}$$
$$K_k = P_{k|k-1} G_k^T \left[G_k P_{k|k-1} G_k^T + R_k\right]^{-1}$$

$\hat{x}_{k|k}$와 $P_{k|k}$는 각각 사후(posterior) 추정치 및 사후 오차 공분산 행렬이며, $K_k$는 시간에 따라 갱신되는 칼만 이득 값(Kalman gain)을 나타낸다.

이렇게 칼만 필터는 간단한 형태를 가지며, 쉽게 코드(code)화 하여 시스템에 적용할 수 있다. 하지만 이를 실제에 응용하는 부분에서 칼만 필터의 성능(performance)이 상당히 떨어지는 현상이 일어날 수 있다. 여러 가지 이유가 있을 수 있으나, 가장 대표적인 이유는 칼만 필터를 적용하는 시스템 중 비선형성(non-linearity)을 가지는 시스템이 많다는 점이다. 시스템이 비선형성을 갖게 되는 경우는 두 가지로 분류할 수 있다. 시스템의 동적 거동이 복잡하여 선형 모델로 표현이 불가능하거나, 모델을 이루는 상태 변수와 파라미터(parameter)를 동시에 추정해야 할 경우이다.

### 3. 비선형 시스템(Nonlinear system)

비선형 시스템은 상태 변수의 시간에 따른 동적 거동 특성을 나타내는 공정 모델, 또는 측정치와 시스템과의 관계를 나타내는 측정 모델이 비선형 방정식으로 정의되는 시스템을 말한다. 일반적으로 비선형 시스템은 미분방정식으로 이루어지며, 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t), w(t)\big)$$
$$y(t) = g\big(x(t)\big) + v(t)$$

$x(t)$는 연속(continuous)인 시간 $t$에서의 상태 변수이고, $y(t)$는 시간 $t$에서의 측정치이다. $w(t)$는 시스템 잡음, $v(t)$는 측정 잡음이다. $f(\cdot)$, $g(\cdot)$는 $x(t)$에 대해 비선형일 수 있다.

사실, 수치해석적 편의를 위해 많은 시스템의 동적 거동을 미분방정식보다는 차분방정식으로 표현하는 경우가 많다. 또한 시스템의 거동은 일정한 샘플 시간(sampling time)을 갖는 계측장치 또는 센서(sensor)로부터 측정되기 때문에 시스템 모델은 연속시간 변수보다는 이산시간(discrete-time) 변수로 표현하는 경우가 많다. 추가되는 공정 및 측정 잡음이 상호 독립적이고 동일하다(i.i.d)고 가정할 때, 이산 차분방정식으로 표현되는 비선형 시스템은 아래와 같다.

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k$$
$$y_k = g(x_k) + v_k$$

여기서 $f_k(x_k)$는 명시적(explicit)으로 정의되는 경우도 있으나 상미분방정식(ordinary differential equation) 으로부터 아래와 같이 $x_k$를 시작으로 하여 샘플 기간 동안 적분한 결과를 표현하기도 한다.

$$x_{k+1} = x_k + \int_k^{k+1} f\big(x(t)\big)\, dt + w_k$$

그 외에도 미분방정식을 이산화(discretization)하기 위해 룬게-쿠타(Runge-Kutta) 또는 직교 배열(orthogonal collocation)과 같은 방법을 적용할 수 있다.

비선형 상태 추정 기법은 위와 같은 비선형 모델로 표현되는 동적 시스템 내에서 상태 변수를 추정하는 방법이다. 비선형 상태 추정 기법은 선형 상태 추정 기법과 비교했을 때 상대적으로 기법의 설계가 어렵다. 그 대표적인 이유는 상태 추정 기법의 확률론적 해석에서 찾아볼 수 있는데, 비선형 상태 추정 기법에서는 상태 변수에 대한 조건부 확률 밀도

함수를 정의하는 것이 어렵기 때문이다. 초기 상태 변수 $x_0$의 확률 분포를 정규 분포로 규정하였다 하더라도, 비선형 모델에 의해 전파된 상태 변수의 확률 분포는 더 이상 정규 분포를 따르지 않게 된다[3]. 즉, 확률 분포를 평균과 공분산으로 간단하게 표현할 수 없다. 이러한 확률 분포의 완전 해(exact solution)를 표현하기 위해서는 무한 차원(infinite dimension)을 사용해야 하는데, 실제 응용에서는 이러한 개념을 쓸 수 없다.

위와 같은 이유로, 많은 비선형 상태 추정 기법에서는 완전 해를 구하기보다는 상태 변수에 대한 조건부 확률 밀도 함수를 근사화(approximation)하는 방법에 기반하여 해를 구한다. 예를 들어, 실제로는 그렇지 않은 확률 분포를 정규 분포로, 즉 평균과 공분산만으로 표현할 수 있도록 근사하거나 그 외 추가적인 파라미터를 사용하여 다루기 쉬운 정보의 형태로 근사하는 방법을 사용한다.

4. 비선형 상태 추정 기법에 대한 리뷰

현재까지 발표된 비선형 상태 추정 기법에 대한 대표적인 리뷰(review) 논문을 살펴보면, 대부분 그 초점이 베이지안 접근법에 맞추어져 있음을 알 수 있다. 이는 베이지안 접근법이 확률론적 해석과 안정성 분석(stability analysis) 등 이론적인 면과, 계산 속도(computational cost) 등 실용적인 면에서 상대적으로 그 가능성을 많이 증명했기 때문이다. 이러한 내용을 잘 정리하고 있는 대표적인 리뷰 논문을 아래에 소개한다.

Daum (2005) [4]은 비선형 시스템에 대해 사용이 가능한 베이지안 기반의 상태 추정 기법인 확장 칼만 필터(extended Kalman filter)에서부터 언센티드 칼만 필터(uncented Kalman filter), 그리고 최근 주목을 받고 있는 파티클 필터(particle filter)를 비교하고 그 장단점을 분석하였다. 특히 파티클 필터가 높은 차원의 상태 변수를 가진 시스템에서 가질 수 있는 문제점인 "차원의 저주(the curse of dimensionality)"에 대해 지적하고 무작위 샘플링(random sampling)에서 새로운 접근 방식의 필요성을 제시 하였다.

Rawlings & Bakshi (2006) [5]는 확장 칼만 필터, 언센티드 칼만 필터, 파티클 필터에 이동 수평 추정(moving horizon estimation)을 포함하여 비선형 상태 추정 기법을 개관적으로 설명하였다. 특히 파티클 필터와 이동 수평 추정 기법을 중심으로 그 장단점을 비교 분석하였으며, 비선형 시스템에서 나타나는 확률 분포의 비대칭(asymmetric) 또는 다중 모드(multiple mode) 성질을 효과적으로 다룰 수 있는 파티클 필터를 더 높이 평가하였다.

가장 최근 리뷰 논문인, Patwardhan et al. (2012) [6]은 베이지안 접근법과 최적화 접근법을 혼합한 회귀적 비선형 동적 데이터 조정(recursive nonlinear dynamic data reconciliation)을 포함한 여러 추정 기법을 심층적으로 비교 분석하였다. 특히, 제약 조건이 있는 시스템(constrained system), 다중속도(multi-rate) 또는 지연(delay)을 포함하는 측정치, 파라미터 추정(parameter estimation)을 동시에 다루는 문제 등 현실적인 문제에 대한 추정 기법의 적용 가능성을 고찰하였다. 그리고 베이지안 접근법의 안정성 분석(stability analysis) 연구에 대해 요약하여 설명하였고, 이동 수평 추정 기법에 대해서는 간략히 언급하였다.

최적화 접근법에 대해서는 최근 5년간, 이동 수평 추정 기법과 관련하여 이론적, 실용적으로 접근하는 논문이 많이 발표되었다[7-23]. 또한, 실제 산업 속 복잡하고 큰 스케일(large scale)의 화학 공정에 대한 상태 추정 문제에 이동 수평 추정 기법의 적용을 시도하고 베이지안 기반 추정기와 성능을 비교하는 논문도 늘어나고 있다[12,19,24-27]. 따라서 본 리뷰 논문은 베이지안 접근법과 최적화 접근법을 함께 리뷰하되, 최적화 접근법의 발전에 더 비중을 두고 서술할 것이다.

## II. 베이지안 접근법 (또는 확률론적 접근법)

1. 확장 칼만 필터(Extended Kalman filter)

앞에서 언급하였듯이, 일반적인 비선형 시스템에서는 잡음 및 측정 잡음과 초기 상태 변수의 분포가 정규 분포를 따르더라도, 모델에 의해 전파된 상태 변수의 확률 분포는 더 이상 정규 분포를 따르지 않게 된다. 따라서 조건부 확률 분포를 근사화하여 문제를 풀게 된다. 이 때의 핵심은 사전 확률 밀도 함수, $p(x_k|y_1,\dots,y_{k-1})$ 와 사후 확률 밀도 함수, $p(x_k|y_1,\dots,y_k)$를 비교적 간단한 확률 분포로 근사할 수 있는 적절한 가정을 찾는 것이다. 또한 근사한 사후 확률 밀도 함수로부터 시스템 모델을 통해 $p(x_{k+1}|y_1,\dots,y_k)$를 계산해야 한다.

비교적 선형에 가까운(mild) 비선형적 시스템에 대해 적용할 수 있는 가정 중 하나는, 비선형 모델을 일차 테일러 급수(Taylor series)를 통해 선형으로 근사(linearization)한 뒤, 이를 선형 모델과 같은 꼴로 바꾸어 이 모델에 칼만 필터를 적용하는 것이다. 이를 확장 칼만 필터라 부른다. 비선형 모델의 $f(\cdot)$와 $g(\cdot)$가 모든 운전 가능한 점에서 미분가능하다는 가정 하에, 모델에 일차 테일러 급수를 적용하면 다음이 성립한다.

$$x_{k+1} \approx f(\hat{x}_k) + \left.\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k} (x_k - \hat{x}_k)$$
$$y_k \approx g(\hat{x}_k) + \left.\frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k} (x_k - \hat{x}_k)$$

이를 정리하여 원래 선형 모델 식에 대입하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$x_{k+1} \approx \left.\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k} x_k + f(\hat{x}_k) - \left.\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k} \hat{x}_k + w_k$$
$$y_k \approx \left.\frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k} x_k + g(\hat{x}_k) - \left.\frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=\hat{x}_k} \hat{x}_k + v_k$$

각 식의 우변 첫 항을 제외하면 $x_k$의 함수가 아닌 것만이 남게 되므로, 이 모델은 선형의 꼴을 갖는다. 따라서 이 모델에 칼만 필터를 적용하면 확장 칼만 필터를 통한 상태 추정을 할 수 있으며, 이는 산업계에서 많은 문제들을 해결해 왔다[28].

단, 시스템의 비선형성이 클 경우에는 확장 칼만 필터로 구한 값의 정확도를 신뢰할 수 없게 된다. 또한 확장 칼만 필터는 계산 과정에 미분을 포함하고 있기 때문에, 미분함수의 계산이 전체 계산에 있어 부담으로 작용할 수 있다. 그와

더불어, $f(\cdot)$와 $g(\cdot)$가 미분가능해야 한다는 제한은 미분가능하지 못한 시스템에는 확장 칼만 필터를 사용할 수 없도록 한다.

2. 언센티드 칼만 필터(Unscented Kalman filter)

비선형 시스템에서의 확장 칼만 필터의 한계점을 극복하고 비선형성이 심한 시스템에서 상태 변수를 추정하기 위하여 여러 방법이 제안되었다. 그 중 하나는 Julier & Uhlmann (2004) [29]이 제안한 언센티드 칼만 필터이다. 이 방법의 핵심은 비선형 모델의 근사 방법을 일차 테일러 급수를 이용한 근사에서 통계적 선형화(statistical linearization)로 변경하는 것이다. 이 방법은 미분가능성을 따지지 않으며, 일반적인 비선형 시스템에 사용할 수 있다는 장점이 있지만 상태 변수, 시스템 잡음, 측정 잡음 등 확률 변수의 확률 분포를 알아야 한다는 가정이 필요하다. 통계적 선형화의 한 종류인 언센티드 변환 (unscented transform)은 다음과 같이 요약할 수 있다.

$L$의 차원을 갖는 확률 변수 $x$가 알려진 분포를 따르며, 그 평균을 $\bar{x}$, 공분산을 $P$라 할 때, $2L+1$의 차원을 갖는 시그마 벡터 (sigma vector) $\chi$를 만들어 그를 통해 확률 밀도 함수를 근사한다. 시그마 벡터는 시그마 포인트(sigma point)로 이루어져 있으며, 시그마 포인트는 다음과 같이 설정한다.

$$\chi^{(0)} = \bar{x}$$
$$\chi^{(i)} = \bar{x} + \left(\sqrt{(L+\lambda)P}\right)^{(i)}, i = 1,2,\cdots,L$$
$$\chi^{(i)} = \bar{x} - \left(\sqrt{(L+\lambda)P}\right)^{(i-L)}, i = L+1, L+2,\cdots,2L$$
$$\omega^{(0)} = \frac{\lambda}{L+\lambda}$$
$$\omega^{(i)} = \frac{1}{2(L+\lambda)}, i = 1,2,\cdots,2L$$

$\chi^{(i)}$는 해당 샘플 시간에서 구성된 시그마 벡터의 $i$번째 시그마 포인트이며, $\omega^{(i)}$는 $\chi^{(i)}$에 각각 대응하는 $i$번째 가중치이다. $\lambda$는 튜닝 파라미터(tuning parameter)로, $\lambda$를 바꾸어 줌으로써 시그마 포인트가 평균($\bar{x}$) 주변에 어떻게 분포하는지를 조절할 수 있다.

언센티드 칼만 필터는 언센티드 변환을 이용하여 상태 추정을 행한다. 원래 상태 변수에 시스템 잡음과 측정 잡음을 붙여 접합(augmented) 상태 변수, $\hat{x}_k^a = [(\hat{x}_k)^T \quad (\hat{x}_k^w)^T \quad (\hat{x}_k^v)^T]^T$를 만든 뒤 이를 바탕으로 시그마 벡터를 생성하고 가중치를 계산한다.

초기화 단계에서는 $x_0$의 분포를 이용해 초기값을 정한다.

$$\hat{x}_0 = E[x_0]$$
$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$
$$\hat{x}_0^a = E[x^a] = [\hat{x}_0^T \; 0 \; 0]^T$$
$$P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$
$$\chi_0^a = \left[\hat{x}_0^a \quad \hat{x}_0^a \pm \sqrt{(L+\lambda)P_0^a}\right]$$

이 결과를 바탕으로, $k > 0$에 대해 시스템 예측 단계를 수행한다.

$$\chi_{k|k-1} = f(\chi_{k-1}) + \chi_k^w$$
$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega^{(i)} \chi_{k|k-1}^{(i)}$$
$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega^{(i)} \left[\chi_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1}\right]\left[\chi_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1}\right]^T$$
$$\mathcal{Y}_{k|k-1} = g(\chi_{k-1}) + \chi_k^v$$
$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega^{(i)} \mathcal{Y}_{k|k-1}^{(i)}$$

측정치 갱신 단계에서는 아래와 같은 계산이 이루어진다.

$$P_{y_k y_k} = \sum_{i=0}^{2L} \omega^{(i)} \left[\mathcal{Y}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{y}_{k|k-1}\right]\left[\mathcal{Y}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{y}_{k|k-1}\right]^T$$
$$P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2L} \omega^{(i)} \left[\chi_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1}\right]\left[\mathcal{Y}_{k|k-1}^{(i)} - \hat{y}_{k|k-1}\right]^T$$
$$K_k = P_{x_k y_k} P_{y_k y_k}^{-1}$$
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_{k|k-1})$$
$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{y_k y_k} K_k^T$$

여기에서 $\chi_k^a = [(\chi_k)^T \quad (\chi_k^w)^T \quad (\chi_k^v)^T]^T$이며, $\chi_k^w$와 $\chi_k^v$는 각각 시스템 잡음과 측정 잡음에 대한 시그마 벡터이다. $P_{y_k y_k}$, $P_{x_k y_k}$는 각각 $y_k$와 $x_k$, $y_k$사이의 공분산이다. 언센티드 칼만 필터의 경우 상태 변수에 시스템 잡음과 측정 잡음까지 포함한 상태이므로, 원래 모델의 시스템 잡음과 측정 잡음은 반드시 정규 분포를 따라야 하는 것은 아니다.

만약 확률 변수가 정규 분포를 따를 경우, $\lambda = 3 - L$을 취했을 때 최적의 결과를 가져 온다. 그러나 만약 $\lambda$가 음수가 될 경우, 공분산의 계산에 있어 하나 이상의 원소가 음수가 될 수 있으므로, 더 이상 정규 분포의 성질을 갖지 않는다. 또한 매번 $2L+1$개의 점을 계산하는 방식은 차원이 큰 시스템에서의 온라인(on-line) 상태 추정의 경우 계산의 부담이 큰 것으로 나타났다. 공분산 계산에서의 음수 문제를 해결하기 위해 제곱근 필터의 사용이 제안되었으며[30], 계산 부담을 줄이기 위해서는 구형 변환이 제시되었다[29]. 구형 변환을 사용하면 $L+1$개의 점만으로도 원하는 결과를 얻을 수 있다.

3. 파티클 필터(Particle filtering)

칼만 필터의 연장선상에서 미분가능성을 따지지 않는 측정기가 등장하였지만, 여전히 정규 분포를 가정하여 확률 변수를 계산한다. 그러나 비선형 시스템의 경우, 확률 변수는 다중 모드를 가질 수 있으며 정규 분포 에서 크게 벗어날 수 있다. 이러한 경우 확장 칼만 필터나 언센티드 칼만 필터와 같은 접근으로는 좋은 성능을 보장할 수 없다. 이 문제를 해결하기 위해, 파티클 필터라 불리는 새로운 방법이 등장하였다.

파티클 필터는 일반적으로 몬테 카를로(Monte Carlo) 방법을 기반으로 한 순차적 중요 샘플링(Sequential importance sampling) 알고리즘으로 베이지안 필터를 재귀적으로 구현한다. 상태변수에 대한 사후 확률 밀도 $p(x_k|y_1,\ldots,y_k)$를 정의하기 위해, 가중치를 갖는 무작위 샘플(random sample 또는 random particle)을 순차적 중요 샘플링 알고리즘에 적용한다 [31,32].

무작위로 뽑은 $N$개의 입자(particle)로 연속적인 사후 확률을 아래와 같이 이산적인 사후 확률로 근사화한다.

$$p(x_k|y_1,\dots,y_k) \approx \sum_{i=1}^{N} \omega_k^{(i)} \delta\left(x_k - x_k^{(i)}\right) \; (i = 1,2,\cdots,N)$$

$x_k^{(i)}$는 샘플 시간 $k$에서의 $i$번째 입자이며, $\omega_k^{(i)}$는 $i$번째 입자에 해당하는 가중치, $\delta(\cdot)$는 디락델타(Dirac-delta) 함수이다. 많은 수의 입자를 사용하면 실제 사후 확률과 가깝게 근사할 수 있으나, 계산량이 함께 증가하기 때문에 계산 속도가 느려질 수 있다. 여기서 가중치, $\omega_k^{(i)}$는 중요 샘플링(importance sampling) 원리에 의해 구해진다. 이 원리의 핵심은 쉽게 정의할 수 없는 사후 확률밀도함수, $p(x_k|y_1,\dots,y_k)$를 쉽게 정의할 수 있는 중요 밀도(importance density), $q(x_k|y_1,\dots,y_k)$로 대신하여 무작위 샘플을 추출하는 것이다. 이 원리에 의하면 가중치, $\omega_k^{(i)}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\omega_k^{(i)} \propto \frac{p\left(x_k^{(i)}|y_1,\dots,y_k\right)}{q\left(x_k^{(i)}|y_1,\dots,y_k\right)}$$

위 가중치에 마르코브 공정(Markov process) 가정과 연쇄법칙(chain rule)을 적용하여 식을 정리하면 아래와 같은 가중치 갱신 방법이 도출된다.

$$\omega_k^{(i)} \propto \omega_{k-1}^{(i)} \frac{p\left(y_k\middle|x_k^{(i)}\right) p\left(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(x_k^{(i)}\middle|x_{k-1}^{(i)}, y_1,\dots,y_k\right)}$$

측정치가 서로 독립적일 경우 아래와 같다.

$$\omega_k^{(i)} \propto \omega_{k-1}^{(i)} \frac{p\left(y_k\middle|x_k^{(i)}\right) p\left(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)}\right)}{q\left(x_k^{(i)}\middle|x_{k-1}^{(i)}, y_k\right)}$$

이는 곧 샘플 시간이 지남에 따라 순차적으로 가중치를 갱신할 수 있음을 의미한다. 이를 이용한 파티클 필터의 일반적인 SIS 알고리즘은은 다음과 같다.

샘플 시간, $k > 0$ 에 대해 선정한 중요 밀도, $q\left(x_k^{(i)}\middle|x_{k-1}^{(i)}, y_k\right)$ 분포로부터 $N$개의 무작위 상태변수 $x_k^{(i)}$를 선택한다. 그리고 각 $x_k^{(i)}$에 대응하는 $\omega_k^{(i)}$를 계산한다. 마지막으로 $k$ 에서 $\left\{x_k^{(i)}, \omega_k^{(i)}\right\}$를 이용하여 근사한 이산 사후 확률 밀도로부터 상태 변수 추정치를 도출한다.

하지만 보통 중요 밀도의 분포를 정확하게 알지 못하기 때문에 아래와 같이 사전 확률 밀도를 중요 밀도로 정의한다.

$$q\left(x_k^{(i)}\middle|x_{k-1}^{(i)}, y_k\right) = p\left(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)}\right)$$

즉, 시스템 모델을 사용하여 이전의 입자, $x_{k-1}^{(i)}$로부터 다음 입자, $x_k^{(i)}$를 구한다. 이럴 경우, 가중치의 갱신은 아래와 같이 단순화될 수 있다.

$$\omega_k^{(i)} \propto \omega_{k-1}^{(i)} p\left(y_k\middle|x_k^{(i)}\right)$$

중요 밀도의 선정은 파티클 필터의 성능을 결정하는 요소이며, 여러 형태의 중요 밀도를 선정하는 방법에 대해서는 Van der Merwe et al. (2000) [33]에서 자세히 설명하였다.

SIS 알고리즘의 경우, 축퇴(degeneracy) 현상에 의한 문제점이 생길 수 있다. 계산이 진행됨에 따라 가중치의 분산은 점점 늘어날 것이므로, 시간이 지남에 따라 확률 밀도 함수에 거의 영향을 미치지 않는 (가중치가 0에 가까운) 샘플의 계산을 위해 대부분의 계산 자원을 사용하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 샘플링을 일정 기준에 따라 다시 수행하는 리샘플링(resampling)을 이용한다. 리샘플링이란, 축퇴 현상이 일어난다 판단했을 때 가중치가 너무 작아진 것들은 제외하고 가중치가 큰 것을 기준으로 삼아 다시 샘플링한 뒤, 가중치를 동일하게 재분배하는 것이다[31,32].

리샘플링은 축퇴의 영향을 줄일 수는 있지만, 너무 빈도가 잦아질 경우 초기에 가중치가 높았던 샘플만이 반복되어 선택되는 현상이 일어나 샘플의 다양성을 잃을 수 있다. 잦은 리샘플링을 막기 위해서는 필요할 때만 리샘플링을 수행할 수 있도록 기준을 설정할 필요성이 있고, 이를 위해 샘플의 유효 개수의 기준을 선정하여 그 수가 원래 샘플 개수보다 적어질 경우 리샘플링하는 방법과 몬테 카를로 시뮬레이션을 이용하는 방법 등이 고안되었다[31].

중요 밀도를 어떻게 정하는가 또한 파티클 필터의 성능에 영향을 미친다. 문헌에 의하면, 확장 칼만 필터나 언센티드 칼만 필터를 적용하여 얻은 정규 밀도를 중요 밀도로 사용할 경우, 대부분의 파티클 필터에 있어서 성공적인 결과를 얻었다[4].

4. 앙상블 칼만 필터(Ensemble Kalman filter)

Evensen (2003) [34]에서 제안한 앙상블 칼만 필터는 파티클 필터의 범주에 속하며, 공분산을 예측함에 있어 무작위로 추출한 샘플을 이용한다. 앙상블 칼만 필터는 다음과 같은 과정을 거친다.

초기값은 주어진 $x_0$ 의 분포에서 $N$개의 입자, $x_0^{(i)}$를 뽑아내어 결정한다. 동시에, $w_0$와 $v_0$의 주어진 분포에서 $N$개의 샘플을 무작위로 추출한다. 이 때 $w_0$와 $v_0$는 정규 분포를 따를 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다.

이후 $k > 0$ 에 대해, 예측 단계에서는 샘플의 집합인 $\left\{x_{k-1|k-1}^{(i)}\right\}$과 $\left\{w_k^{(i)}\right\}$, $\left\{v_k^{(i)}\right\}$ 를 이용하여 언센티드 칼만 필터에서와 유사한 계산이 이루어지며 예측값의 정확성은 샘플의 개수, $N$에 의존한다.

$$x_{k|k-1}^{(i)} = f\left(x_{k-1|k-1}^{(i)}\right) + w_k^{(i)}$$
$$y_{k|k-1}^{(i)} = g\left(x_{k-1|k-1}^{(i)}\right) + v_k^{(i)}$$
$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N} \omega^{(i)} x_{k|k-1}^{(i)}$$
$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{N} \omega^{(i)} y_{k|k-1}^{(i)}$$

이 때, 가중치 $\omega^{(i)} = 1/N$으로 모든 샘플은 같은 비중을 갖는다. 측정치 갱신 단계 역시 언센티드 칼만 필터와 유사한 계산을 행한다.

$$P_{y_k y_k} = \sum_{i=0}^{N} \omega^{(i)} \left[ y_{k|k-1}^{(i)} - \hat{y}_{k|k-1} \right] \left[ y_{k|k-1}^{(i)} - \hat{y}_{k|k-1} \right]^T$$
$$P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{N} \omega^{(i)} \left[ x_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1} \right] \left[ y_{k|k-1}^{(i)} - \hat{y}_{k|k-1} \right]^T$$
$$K_k = P_{x_k y_k} P_{y_k y_k}^{-1}$$
$$y_k^{(i)} = y_k + v_k^{(i)}$$
$$x_{k|k}^{(\mathrm{i})} = x_{k|k-1}^{(\mathrm{i})} + K_k \left( y_k^{(i)} - g\left( x_{k|k-1}^{(\mathrm{i})} \right) \right)$$
$$\hat{x}_{k|k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{k|k}^{(\mathrm{i})}$$

계산된 샘플 $\left\{ x_{k|k}^{(\mathrm{i})} \right\}$을 다음 예측 단계에 바로 이용하기 때문에, 이 방법을 이용하면 사전 혹은 사후 확률 밀도에 대한 어떠한 근사도 행하지 않으며, 이는 언센티드 칼만 필터와 앙상블 칼만 필터의 중요한 차이점이다. 만약 조건부 확률이 다중 모드를 갖는다 하더라도, 앙상블 칼만 필터는 확률 밀도를 근사하지 않기 때문에 샘플의 정보를 손실 없이 그대로 적용할 수 있다. 또한, 중요 밀도 및 가중치를 사용하지 않는다는 점에서 파티클 필터와 같은 중요 샘플링 기반의 추정 기법에 비해 단순하다는 장점을 갖는다.

이처럼 앙상블 칼만 필터는 칼만 필터의 구조적 단순성을 유지하면서도 잡음의 비정규분포에 대응할 수 있다. 그러나 측정치 갱신 단계에서는 언센티드 칼만 필터와 같이 통계적 선형화에 의존하고 있다는 점이 앙상블 칼만 필터의 한계로 작용한다[34,35].

## III. 최적화 접근법 (또는 결정론적 접근법)

### 1. 최소자승 상태 추정(least-squares state estimation)

최소자승법은 주로 오프라인(off-line)에서 회분 공정 데이터(batch processing data)를 기반으로 시간 불변(time-invariant)의 시스템 모델 파라미터를 추정하는데 사용되었다. 파라미터 추정 문제는 측정치와 모델 예측치 오차 자승의 합(sum of squares error)을 최소화하는 파라미터를 구하는 것으로 구성된다[36]. 이 방법으로 시간에 따라 변하는(time-varying) 모델 파라미터나 상태 변수 역시 추정할 수 있으나, 계산적으로 적합하지 않기 때문에 선호되지 않는다.

그러나 계산에서의 단점을 극복할 수 있다면 정보의 누락 또는 근사 오류가 없다는 점에서 회분 공정 데이터를 기반으로 하는 최소자승 방식이 정확성 및 안정성에 있어서 유리한 점이 많다. 베이지안 접근법과 달리, 상태 추정 시 미분 대수 방정식(differential algebraic equation)과 같은 비선형 모델 방정식을 근사과정 없이 온전하게 사용할 수 있고, 파라미터 또는 상태 변수에 대한 부등호 및 등호 제약 조건(inequality or equality constraint)을 최적화 문제에 자연스럽게 도입할 수 있어 더 합리적인 해를 도출할 수 있다. 또한 순차적 2차 계획법(successive quadratic programming)과 같은 비선형 계획 문제(nonlinear programming problem)를 풀 수 있는 효율적인 수치 해석적(numerical) 최적화 알고리즘(algorithm)이 개발되고 있고, 꾸준히 발전하는 컴퓨터 계산 효율과 속도, 그리고 저렴해지는 가격 등에 힘입어 근래에 많은 주목을 받고 있다[37].

상태 추정을 위한 일반적인 최소자승 형태를 살펴보자면, 초기 상태 변수에 대한 정보(주로 확률 분포 정보)와 시간 $k$까지의 측정치 그리고 시스템 모델이 주어질 때, 초기 상태 변수에 대한 오차 $x_0^e$, 시스템 오차 $\{w_0, \ldots, w_{k-1}\}$, 그리고 측정 오차 $\{v_1, \ldots, v_k\}$에 대한 가중(weighted) 최소자승 상태 추정 문제를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\min_{x_0,\ldots,x_k} (x_0^e)^T P_{0|0}^{-1} x_0^e + \sum_{j=0}^{k-1} w_j^T Q^{-1} w_j + \sum_{j=1}^{k} v_j^T R^{-1} v_j$$

s. t.

$$x_0^e = x_0 - x_{0|0}$$
$$w_j = x_{j+1} - f(x_j)$$
$$v_j = y_j - g(x_j)$$

위 최적화 문제는 오차 항들로 구성되기 때문에 등호 제약들을 만족시키는 상태 궤적(state trajectory)이 무한하다. (즉, 모든 상태 궤적이 가능하다.) 오차 항에 곱해지는 가중 행렬의 선택에 따라서 목적함수를 최소화 시키는 해에 해당하는 최적 상태 궤적이 결정된다. 기본적으로 $P_{0|0}^{-1}$, $Q^{-1}$ 그리고 $R^{-1}$는 양 한정(positive definite) 가중 행렬(weighting matrix)이며, 각각 초기 상태 변수, 시스템 모델 그리고 측정 모델에 대한 신뢰도를 나타낸다. 보통 이들은 대각(diagonal) 행렬이지만, 변수 사이에 상호작용이 있을 경우 비대각 행렬로 정의할 수 있다. 적합한 가중 행렬을 정의할 경우, 최소 자승 기법을 사용하여 각 오차의 크기를 최소화하면서 가장 시스템 거동을 잘 설명하는 해를 구할 수 있다. 결과적으로 위의 최적화 문제를 풀어 얻는 해는 측정치, $y_1,\ldots, y_k$를 통해 추정한 평활화된 상태 궤적(smoothed trajectory), $x_0,\ldots, x_k$이고, $x_k$는 현재 상태변수 추정치인 $\hat{x}_{k|k}$로 사용할 수 있다[37].

### 2. 완전 정보 추정(Full information estimation)

결정론적인 해석만으로는 최소자승법을 구성하는 각 오차 항의 가중 행렬을 적절하게 선택하는 것이 쉽지 않다. 이 때, 베이지안 접근법과 같은 확률론적 해석을 사용함으로써 가중 행렬의 선정에 대한 통찰을 얻을 수 있다[37].

베이지안 접근법에서도 언급하였듯이, 비선형 시스템에서는 시간 $k$에서의 상태 변수에 대한 조건부 확률 밀도 함수, $p(x_k|y_1, \ldots, y_k)$를 완전한 해로 정의하는 것이 어렵다. 그러므로 전체 상태 변수 궤적(trajectory)에 대한 조건부 확률 밀도 함수, $p(x_0, \ldots, x_k|y_1, \ldots, y_k)$를 고려하는 것을 생각해 볼 수 있다[5]. 즉, 상태 변수 추정은 조건부 확률 밀도 함수가 최대가 되는 상태 변수 궤적을 구하는 최대 우도 추정(maximum likelihood estimation) 문제로 정의할 수도 있다.

$$\max_{x_0,\ldots,x_k} p(x_0, \ldots, x_k|y_1, \ldots, y_k)$$

우도 함수인 $p(x_0, \ldots, x_k|y_1, \ldots, y_k)$는 베이즈 정리 (Bayes' theorem)에 의해 아래와 같이 정의된다.

$$p(x_0, \ldots, x_k|y_1, \ldots, y_k) = \frac{p(y_1, \ldots, y_k|x_0, \ldots, x_k)p(x_0, \ldots, x_k)}{p(y_1, \ldots, y_k)}$$

$w_k$와 $v_k$는 상호 독립적이기 때문에 우변의 각 항은 각각 아래와 같이 정의된다.

$$p(y_1,\dots,y_k|x_0,\dots,x_k)=\prod_{j=1}^{k}p(y_j|x_j)$$
$$p(x_0,\dots,x_k)=p(x_0)\prod_{j=0}^{k-1}p(x_{j+1}|x_j)$$

또한

$$p(y_j|x_j)=p_v\left(y_j-g(x_j)\right)$$
$$p(x_{j+1}|x_j)=p_w\left(x_{j+1}-f(x_j)\right)$$

$p(y_1,\dots,y_k)$는 $x_k$와 독립적인 변수이기 때문에 최종적으로 최대 우도 추정 문제는 아래와 같이 정의된다.

$$\max_{x_0,\dots,x_k} p(x_0)\prod_{j=0}^{k-1}p_w\left(x_{j+1}-f(x_j)\right)\prod_{j=1}^{k}p_v\left(y_j-g(x_j)\right)$$

위 식을 음 로그(negative logarithm)로 변환하면 최대 우도 추정 문제는 아래와 같다.

$$\min_{x_0,\dots,x_k} V(x_0)+\sum_{j=0}^{k-1}L_w(w_j)+\sum_{j=1}^{k}L_v(v_j)$$

s. t.

$$w_j=x_{j+1}-f(x_j)$$
$$v_j=y_j-g(x_j)$$

위 목적 함수를 이루는 세 항이 정규 분포를 이룬다고 가정하면 최소자승법과 형태가 동일해 지며, $P_{0|0}$, $Q$ 그리고 $R$는 각각 초기 상태 변수 오차, 공정 잡음 그리고 측정 잡음의 공분산과 같은 값을 갖는다.

3. 이동 수평 추정(Moving horizon estimation)

완전 정보 추정은 측정치의 양이 늘어날수록 최적화 문제의 크기도 늘어난다. 이는 곧, 상태 변수 추정을 진행하면서 어느 순간을 넘어서면 요구하는 상태 추정 계산을 샘플 시간 이내에 해낼 수 없음을 시사한다. 계산적으로 적합한 추정 문제는 샘플 시간 내에 계산할 수 있어야 하며, 이는 추정해야 하는 변수의 개수를 고정하여 해결할 수 있다[3,37,38].

고정된 크기의 이동 수평 창(moving horizon window) 내의 측정치로부터 상태 변수를 추정하면 최적화 문제의 크기를 고정할 수 있다. 시간 $k$에서 이동 창의 크기를 $m(0<m<k)$이라고 할 때 이동 수평 추정 기법은 아래와 같이 정의된다.

$$\min_{x_{k-m},\dots,x_k} V(x_{k-m})+\sum_{j=k-m}^{k-1}L_w(w_j)+\sum_{j=k-m+1}^{k}L_v(v_j)$$

s. t.

$$w_j=x_{j+1}-f(x_j)$$
$$v_j=y_j-g(x_j)$$

$V(x_{k-m})$는 도착 비용(arrival cost)으로 정의하며, 이는 시간 $k$ 에서 창 내에서 고려되지 않는 과거 측정치인, $\{y_1,\dots,y_{k-m}\}$의 정보를 압축하여 표현한다. 이는 전방 동적 계획법(forward dynamic programming)에서 출발한 개념으로, 앞서 언급된 완전 정보 추정 문제에서 함수의 인수(argument)인 시간 $k-m$에서의 상태변수가 $x_{k-m}$가 되도록 하는 등가 제약 조건을 주었을 때, $x_{k-m}$에 도착하는데 시간 0에서 $k-m$까지의 최소 비용 (정의된 최적화 문제의 최소 자승 값) 을 의미한다. 확률론적으로 나타낸 도착 비용의 정확한 해는 다음과 같다.

$$V(x_{k-m})=-\log p(x_{k-m}|y_1,\dots,y_{k-m})$$

완전 정보 추정과 같이 위 목적 함수를 이루는 세 항이 정규 분포를 이룬다고 가정하면 최소자승법과 형태가 동일해 진다.

$$\min_{x_{k-m},\dots,x_k}(x_{k-m}^e)^T P_{k-m|k-m}^{-1}x_{k-m}^e+\sum_{j=k-m}^{k-1}w_j^TQ^{-1}w_j$$
$$+\sum_{j=k-m+1}^{k}v_j^TR^{-1}v_j$$

s. t.

$$x_{k-m}^e=x_{k-m}-x_{k-m|k-m}$$
$$w_j=x_{j+1}-f(x_j)$$
$$v_j=y_j-g(x_j)$$

$x_{k-m|k-m}$은 시간 $k-m$에서의 상태 변수 추정치이며 $P_{k-m|k-m}^{-1}$는 그 상태 변수 추정치에 대한 신뢰성 또는 상태 변수의 공분산 행렬이다.

추정 초기에는 측정치 양이 정해진 수평 창 크기가 될 때까지 증가하며 완전 정보 추정과 같은 형태를 갖는다. 정해진 수평 창 크기에 이르면 $x_{0|0}$은 $x_{1|1}$로, $P_{0|0}^{-1}$는 $P_{1|1}^{-1}$로 갱신되며, $y_1$을 버리고 $y_{m+1}$를 수용한 측정치를 가지고 다음 추정을 수행한다. 이러한 과정이 반복되면서 최적화 문제의 크기를 고정한 채로 상태 추정을 수행한다[39].

이동 수평 추정은 수평 창 크기를 조절할 수 있으며, 이는 베이지안 접근법과 비교할 때, 하나의 조정 파라미터(tuning parameter)가 더 있는 것으로 볼 수 있다[40]. 베이지안 접근법은 시간 $k$에서 측정치 정보, $\{y_1,\dots,y_k\}$를 $x_{k-1|k-1}$, $P_{k-1|k-1}$, $y_k$와 같은 세 개의 통계적 파라미터로 압축한다. 하지만 비선형 시스템에서는 조건부 밀도가 비정규 분포(또는 비가우시안(non-Gaussian))이기 때문에 정보의 손실이 일어나며, 이는 비선형성이 클 경우 심해진다. 이동 수평 추정은 시간 $k$에서 측정치 정보를 $x_{k-m|k-m}$, $P_{k-m|k-m}$, $\{y_{k-m+1},\dots,y_k\}$와 같은 $m+2$개의 통계적 파라미터로 압축하기 때문에 $m$의 크기에 따라 $x_{k-m|k-m}$, $P_{k-m|k-m}$에서 발생하는 근사 오류로 인한 정보의 손실이 완화되도록 조절 할 수 있다[37]. 하지만 $x_{k-m|k-m}$, $P_{k-m|k-m}$에 대한 근사 오류를 보완하기 위해 창의 크기가 너무 커질 경우 이동 수평 추정 문제 자체가 큰 차원을 가진 비볼록(non-convex) 형태인 비선형 최적화 문제가 되기 때문에 계산적으로 부적절해질 수 있다[40].

이동 수평 추정 기법을 실제 문제에 도입할 때 생기는 이러한 계산 속도 문제에 대해 두 가지 방법으로 접근이 가능하다. 도착 비용의 근사 오류를 줄이는 동시에 창의 크기를 줄이는 방법과 계산적으로 효율적인 실시간 알고리즘을 개발하는 방법이다.

### 3.1 도착 비용(Arrival cost) 근사

도착 비용 근사의 가장 간단한 방법은 조건부 확률 밀도 함수를 균일(uniform) 확률 밀도로 가정하는 것이다. 이때 이동 수평 추정은 오직 이동 수평 창 내 측정치에 의존하여 추정을 하게 된다. 하지만 사전 정보의 부재를 보상하기 위해서는 충분한 양의 측정치가 필요하기 때문에 $m$을 크게 설정해야 하고, 효율적인 실시간 최적화 알고리즘에 의존하게 된다.

초기에는 앞서 언급한 바와 같이 도착 비용에 대한 조건부 확률 밀도 함수를 정규 분포로 가정하고, $x_{k-m|k-m}$ 과 $P_{k-m|k-m}$ 를 확장 칼만 필터를 이용하여 갱신하였다[3,37]. 하지만 비선형성이 큰 시스템의 거동을 선형화를 통해 근사화하는 것은 이동 수평 추정 기법의 성능 저하를 가져온다. 또한 빈약한(poor) 도착 비용 근사로 인해 긴 이동 창을 필요로 하게 한다.

정규 분포 구조 안에서 비선형성을 더 나은 $x_{k-m|k-m}$과 $P_{k-m|k-m}$로 근사하기 위해 제안된 것이 먼저 소개되었던 언센티드 칼만 필터이다. 언센티드 칼만 필터에서 이 두 파라미터에 대한 전파는 이차 테일러 급수 근사 기반이며, 일차 테일러 급수 근사를 기반으로 하는 확장 칼만 필터보다 더 정확하다고 할 수 있다[15,17]. 하지만 언센티드 칼만 필터 역시 확률 밀도 함수를 오직 두 개의 통계학적 파라미터로 전파하기 때문에 높은 비선형성 시스템이 가진 비대칭 또는 다중 모드와 같은 확률 분포 특성을 따라가기에는 한계가 있다.

파티클 필터와 같은 샘플(sample) 기반의 비선형 필터는 비선형성에 대해 테일러 급수 근사를 사용하지 않으며, 샘플 그리고 샘플과 관련된 가중치로 비정규 확률 분포 함수의 형태까지 근사 할 수 있다. 이러한 비모수(nonparametric) 추정 기법을 사용할 때는 도착 비용을 폐쇄 형태(closed form)로 근사해야 하며, 대표적으로 커널 밀도 추정(kernel density estimation)과 곡선 맞춤(curve fitting)을 사용할 수 있다[17]. 이러한 방법을 통하여 샘플 기반의 비선형 필터를 사용할 경우, 확장 칼만 필터 또는 언센티드 칼만 필터보다 비선형성을 가진 도착 비용을 더 정확하게 전파하기 때문에 이동 수평 추정의 이동 창의 크기를 작게 설정할 수 있다[14,17].

### 3.2 빠른 이동 수평 추정 알고리즘(Fast MHE algorithm)

비선형 시스템에 대한 이동 수평 추정의 실용화에 있어서 가장 큰 제한 요소는 실시간으로 비선형 최적화 문제의 해를 도출해야 한다는 것이다. 특히 실제 화학 공정은 그 규모가 크기 때문에 이러한 요소에 더욱 큰 영향을 받는다.

이전에는 최적화 기반의 상태 추정 기법을 대상으로 한 빠른 수치해석적 알고리즘 개발에 대한 논문이 매우 적었지만, 최근에는 빠른 이동 수평 추정 알고리즘의 개발이 재조명 받고 있다. 그 이유는 개선된 컴퓨터 계산 효율과 비선형 최적화 알고리즘 개발에서 출발한 빠른 비선형 모델 예측 제어(model predictive control)의 활발한 연구에 영향을 받았기 때문이다. 현재 비선형 모델 예측 제어는 1000분의 1초 단위의 샘플 시간 간격을 가진 기계 시스템까지 영역을 넓히고 있다[41-45].

빠른 비선형 모델 예측 제어로부터 야기된 알고리즘 중 하나는 실시간 반복 처리(real-time iteration) 접근법으로, 모델 예측 제어와 비슷한 구조를 가진 이동 수평 추정에 효율적으로 도입되었다[12,45]. 이 접근법의 핵심은 한 측정치가 갱신될 때마다 한 최적화 문제가 수렴할 때까지 반복적으로 풀기 보다는, 최적화 문제를 풀기 위한 수치해석적 기법의 반복 처리 횟수를 한 번으로 제한하여 계산 부담(computational burden)을 줄여 주는 것이다.

이 접근법은 준비 단계와 추정 단계로 나뉜다. 준비 단계는 두 샘플 시간 사이에 주로 수행되며, 시스템 모델 기반의 예측치를 모조(pseudo) 측정치로 간주하여 최적화 문제를 풀어 해를 도출한다. 이를 백그라운드 최적화(background optimization)라 한다. 추정 단계에서는 최근 측정치가 갱신되었을 때 준비 단계에서 도출된 해를 초기 값으로 하여 실시간 반복 처리 기법을 사용하여 빠르게 상태 변수 추정치를 도출하고 다시 다음 준비 단계로 전달한다.

한번의 반복으로 최적화의 해를 도출하기 위해서는 적절한 수치해석적 기법을 사용해야 하며, 일반화된 가우스-뉴턴(generalized Gauss-Newton) 기법을 사용할 수 있다. 즉, 각 샘플링 시각에서 정의된 비선형 이동 수평 추정 문제에 대해 일반화된 가우스-뉴턴 반복을 한번만 수행한다. 연속의 단일 뉴턴 단계가 참조해(reference solution)와 충분히 가까운 곳에서 초기 값을 갖는다면, 완전 뉴턴 단계(full Newton step)만으로 최적화 문제의 해에 수렴할 수 있다. 이는 뉴턴법의 국부적 수렴(local convergence) 성질에서 기인한다[12,45].

하지만 이러한 가정은 제한적이며, 높은 비선형성에서 기인한 비볼록 문제에는 맞지 않을 수 있다. 이에 대해, 뉴턴 단계 대신 비선형 계획 민감도(nonliear programming sensitivity) 개념을 이용한 빠른 이동 수평 추정 알고리즘이 제안되었다. 즉, 예측치를 이용하여 샘플 시간 사이에서 백그라운드 최적화 문제를 풀고, 측정치가 갱신되면 비선형 계획 민감도를 계산하여 실시간으로 수정한다[18,19,21].

이러한 실시간 반복 처리 기법을 미분 대수 방정식으로 이루어진 시스템 모델 기반의 상태 추정 문제에서 효율적으로 다루기 위해 다중 슈팅(multiple shooting) 모수화 및 이산화 틀 내에 구성하였다[46]. 도착 비용은 QR 분해(QR factorization)를 이용하여 효율적으로 갱신하였으며, 이전 상태변수로 초기값을 설정하는 웜 출발(warm start) 전략도 사용되었다[12,45].

그 외에도 상태 추정 기법에서 최적 해(optimal solution)를 사용하는 것이 아닌, 비용 함수를 최소화 할 때 특정 오차를 허용하는 차선 해(suboptimal solution)를 사용하는 방법이 제안되었다. 즉, 최적화 과정에서 비용 함수가 감소된 정도가 특정 허용 오차(tolerance) 내에 들어올 경우 계산을 끝내고 해를 도출하여 계산 시간을 줄일 수 있다[8]. 또한 비선형 피드포워드 신경망(neural network)과 같은 고정된 파라미터화 근사 함수(parameterized approximate function)를 사용하여 근사 이동 추정 기법을 정의하고, 오프라인에서 파라미터를 최적화함으로써 온라인에서 드는 계산 시간을 줄일 수 있다[7].

하나의 이동 수평 추정 문제가 아닌 서로 연결된 여러 개의 추정 문제가 동시에 진행되어야 할 경우에 효율적인 계산이 가능한 알고리즘도 제안되었다. 많은 화학 공정이 여러 개의 비선형성 공정 단위(unit 또는 subsystem)가 서로 연결된

하나의 큰 네트워크(network) 시스템 형태를 갖는다. 각 공정 단위는 물질 또는 에너지 흐름으로 서로 연결되며, 이러한 공정 네트워크에서 요구되는 운전 안전성, 환경적 지속가능성 및 이익성을 맞추기 위한 제어를 해야 하지만 정보 교환 제약 때문에 쉽지 않다.

따라서 서로의 제어 작용(control action)을 의사소통 하면서 개별적으로 제어를 수행할 수 있는 분산(distributed) 모델 예측 제어가 제안되는 동시에 각 단위 공정 별로 상태를 추정할 수 있는 이동 수평 추정 기법이 요구되었다[22,47,48]. 이에 대해, 개별적인 상태 추정을 하면서 이웃 시스템의 추정치 정보가 고려되는 형태의 분산 이동 수평 추정 알고리즘이 제안되었다[9-11,20,22,23].

분산 이동 수평 추정 기법은 각 단위 시스템에서 푸는 최적화 문제에 네트워크 의사소통과 관련된 합의 항(consensus term)을 추가하는 기본 형태를 가진다. 각 시스템이 국부적 추정치를 제공하면, 개별 시스템의 측정치의 조합과 이웃 시스템 정보가 합의 항을 통해 결합되어 각 상태 추정치를 개선하게 된다[10].

### 3.3 안정성 분석(Stability analysis)

앞서 언급하였듯이, 완전 정보 추정은 비선형 상태 추정 기법 중에 안정성과 최적성(optimality)이 가장 높은 기법이라고 할 수 있다. 완전 정보 추정을 이동 수평 추정으로 근사할 경우, 그 기법이 안정적이기 위해서는 기법의 성질이 완전 정보 추정의 이론적인 성질과 최대한 가까워야 한다. 하지만 이동 수평 추정은 크기가 고정된 이동 창 내 측정치로 문제의 크기를 제한하고 과거 정보를 근사하기 때문에 안정성 문제에 대한 논란을 피할 수 없으며, 이에 대해 안정성 조건(stability condition)에 대한 탐구가 진행되었다[16].

비선형 상태 추정 기법에 대한 안정성 분석 시 정의되어야 하는 기본 가정이 세 가지가 있는데, 시스템 모델이 연속적이고 매끈하여(smooth) 미분 가능해야 한다는 것(또는 Lipschitz continuous)과 시스템 모델이 가관측성(observability) 조건을 따라야 한다는 것, 마지막으로 추정 시 광역적 최적화(global optimization)가 가능해야 한다는 것이다[49].

비선형 시스템에 대한 가관측성 조건은 균등 재건성 조건(uniform reconstructability condition)을 만족하면 되는데, 비교적 가까운 상태변수에 대한 두 시스템 출력 궤적이 충분히 가까워야 한다는 것이 이 가정의 본질이다. 상태 추정기에서 균등 재건성이 의미하는 것은 (잡음이 없는 경우) 시스템의 출력(output) 궤적과 추정기의 출력 궤적의 차이를 최소화하는 최적화를 수행하여 상태변수를 도출하였을 때, 그 두 궤적은 광역/점진적 수렴성(global asymptotic convergence)을 갖는다는 것이다. 하지만 비선형 문제에서는 광역적 최적화가 보장되지 않거나 초기 예측 값이 광역적 최소값에 충분히 가깝지 않으면 국부해(local solution)에 빠지기 쉽다[49].

제약 조건이 없는(unconstrained) 비선형 이동 수평 추정의 안정성은 동적 시스템에 대한 리아프노프 안정성 이론(Lyapunov stability theory)을 사용한 결정론적 틀에서 분석되기 시작하였다[49]. 이를 시작으로 유계(bounded) 잡음이 존재하는 비선형 이동 수평 추정의 점진적(asymptotic) 안전성과 유계 안정성에 대한 충분 조건(sufficient condition)을 제시할 수 있었다. 또한 추정 기법의 안정성을 충분히 보장하는 근사 도착 비용의 조건을 명시하였으나, 대부분 비선형 시스템의 경우 그 조건을 만족하지 못하기 때문에 조건을 완화한 이동 수평 추정 기법 알고리즘을 제시하였다[50].

비선형 시스템의 안정성은 비선형 시스템의 가관측성보다 약한 가검출성(detectability) 조건으로 완화된(relax) 경우에 대해서도 보장되어야 한다. 시스템이 가검출성을 가질 때, 유계 잡음이 있는 비선형 이동 수평 추정의 수렴적 유계 안정성 및 근사 도착 비용의 조건에 대한 충분 조건이 제시되었다[8,16].

비선형 시스템에 대한 가검출성과 추정기의 안정성 개념은 센서 네트워크(sensor network) 시스템에서 개별 센서로부터 얻을 수 있는 상태 변수 중 부분적으로 손상되어 측정되지 않는 경우를 고려하는데 적용되었다. 앞서 언급한 분산 이동 수평 추정 기법의 합의 항을 통해 부분적으로 측정할 수 없는 부분을 추정할 수 있다. 측정이 되지 않은 상태 변수에 대한 오차 동적 거동을 특징화하고 0으로 수렴하는 것을 보장하는 정보 교환에 필요한 조건을 제시하여, 네트워크상 어떠한 센서에서 제공되는 추정치에 대해서도 오차 안정성을 보장하였다[11].

이동 수평 추정기의 안정성 분석에서 기인한 또 다른 접근법은, 모델의 유계 잡음이 존재하는 비선형 시스템에 대해 보조 비선형 관찰자(auxiliary nonlinear observer)가 추가되는 형태 이다. 보조 비선형 관찰자를 이용해 매 샘플링 시간에 실제 시스템 상태 변수를 포함한 신뢰 구간을 계산하여 이동 수평 추정에 제약조건으로 제공하는 방법이 제안되었다. 이러한 방법으로 이동 수평 추정 기법의 추정 오차의 유계 안정성을 보장하고, 도착 비용의 근사 오류의 영향으로 인한 민감성을 줄여줄 수 있다[13].

## IV. 상태추정기법의 적용과 비교

비선형 상태 추정 기법은 주로 모사(simulation) 기반으로 비선형성이 강한 화학 공정에 적용되어 그 성능이 증명되었다. 과거에는 화학 공정 중 증류 공정이나 반응기에 확장 칼만 필터를 적용하여 공정 내 농도, 온도 등의 상태 변수를 추정하는 것을 시도하였다[51-55]. 최근에는 반응기에 확장 칼만 필터, 언센티드 칼만 필터, 파티클 필터 그리고 앙상블 칼만 필터를 도입하여 서로 성능을 비교하는 논문이 발표되었다[56-65]. 이렇게 확장 칼만 필터는 비선형 시스템에 적용할 수 있는 기준과 같은 추정 기법으로 많은 논문에서 비교 대상이 되고 있다.

앞에서 언급하였듯이, 최근에는 비선형성이 크고 제약 조건이 많은 다양한 화학 공정에 최적화 접근법을 도입하고 확장 칼만 필터 및 최신 베이지안 접근법과 비교하여 개선된 성능을 입증하는 논문이 많이 발표되고 있다.

그 대표적인 화학 공정은 연속 교반 탱크 반응기(continuous stirred tank reactor)이다. 반응이 일어나는 반응기를 대상으로 구성 물질의 농도와 온도 등 상태 변수를 추정하거나, 모델 파라미터를 동시에 추정하는 문제를 정의하고 확장 칼만 필터와 비교하여 이동 수평 추정 기법의 개선된 성능을 입증하였다[3,37,66,67]. 또한 이동 수평 추정 기법의 도착 비

용을 확장 칼만 필터와 언센티드 칼만 필터, 파티클 필터로 근사하고 그 성능을 비교하였다[14,15].

위에 나열한 간단한 화공 시스템뿐만 아니라 최근에는 두 개 이상의 공정 단위 또는 공장과 가까운 거대 문제에도 이동 수평 추정 기법이 적용되기 시작하였다. 아래에 대표적인 5가지 예를 나열하였다.

첫 번째 예는, 열복합 증류탑(thermally coupled distillation column)으로 메탄올, 에탄올, 프로판올의 삼원 분리(ternary separation)를 위해 42 트레이로 구성된 주요 증류탑과 11 tray로 구성된 보조 증류탑으로 구성된 공정에 대한 상태 추정이다. 시스템의 공정 모델이 477개의 미분 대수 방정식으로 이루어지고, 10개의 온도 센서에서만 측정치를 얻을 수 있으며 세 개의 모델 파라미터를 동시에 추정해야 하는 문제를 정의하였다[12].

두 번째 예는 테네시 이스트만(Tennessee Eastman) 공정으로, 발열 2상(two phase) 반응기, 기액 분리기(separator), 생산물질 응축기(condenser), 스트리퍼(stripper) 그리고 재사용 압축기, 다섯 개의 결합된 단위 조작으로 구성된다. 170개의 미분 대수 방정식으로 구성되며, 온도, 액체 수위, 압력, 공급속도, 농도를 포함한 30개 상태 변수만 측정이 가능할 때, 상태 변수를 재구성하는 문제를 정의하였다[12].

세 번째 예는 큰 스케일의 저밀도 폴리에틸렌(low density polyethylene) 생산 공정이다. 반응기는 고압력에서 운전되며 긴 파이프 형태로 여러 개의 반응과 냉각 존으로 이루어져 있다. 358개의 미분 대수 방정식으로 구성되고 파이프 따라 분산된 온도 센서로부터 반응기 내부 온도를 국부적으로 측정할 수 있으며, 배출되는 기체 농도가 측정이 가능하다. 이러한 제한된 온도 측정치를 기반으로 파이프 내 시간과 공간에 대한 상태 변수 분포를 재구성하는 문제를 정의하였다[19,27].

네 번째 예는 석탄 가스화 복합 발전소의 한 공정 단위인 공기 분리 장치(air separation unit)이다. 공기 분리 장치 모델은 1,520개의 미분 대수 방정식으로 구성되며, 플랜트 모델 불일치(plant-model mismatch)를 표현하는 불확실성 파라미터를 상태변수와 함께 추정하는 문제를 정의하였다[24].

마지막으로, 모사 이동층 크로마토그래피(simulated moving bed chromatography)를 이용하여 두 물질을 분리하는 공정이다. 352개의 상태 변수를 포함하는 편미분방정식(partial differential equation)으로 구성된 비선형 모델을 기반으로 6개의 측정치만을 가지고, 컬럼 내 농도 분포와 중요 모델 파라미터인 헨리 상수(Henry coefficient)와 흡착 등온선 상수(adsorption isotherm constant)를 추정하는 문제를 정의하였다[25,26].

위에서 정의된 큰 스케일의 비선형 추정 문제에 대하여, 앞서 제안된 빠른 이동 수평 추정 기법이 도입되었으며 확장 칼만 필터와 성능을 비교하였다. 특히, 비선형 모델과 제약조건을 더 명시적으로 다룰 수 있는 이동 수평 추정 기법이 정확한 상태 및 파라미터 추정치를 도출하였고, 빠른 알고리즘의 적용으로 확장 칼만 필터와 비교하여 속도차이가 많이 나지 않아 이동 수평 추정 기법의 실시간 적용 가능성을 보여주었다.

## V. 결론

본 리뷰 논문에서는 비선형 시스템의 상태 추정에 적용이 가능한 베이지안 접근법과 최적화 접근법을 정리하고 비교 및 분석하였다. 특히, 비선형 모델의 근사를 최소화 하고, 제약 조건을 쉽게 도입할 수 있는 이동 수평 추정 기법이 실용적, 이론적으로 발전된 과정에 집중하였다. 실용적 관점으로는 계산 속도를 줄이기 위해 도착 비용을 적절하게 근사하여 이동 수평창의 크기를 줄이는 방법과 비선형 이동 수평 추정 문제를 빠르게 풀기 위한 알고리즘을 개발한 사례를 정리하였다. 이론적 관점으로는 비선형 시스템 및 이동 수평 추정기의 안정성을 보장할 수 있는 조건에 관해 분석한 사례를 정리하였다.

현재, 이동 수평 추정 기법은 비선형성이 심하고 샘플링 속도가 낮으며 제약적 운전 조건이 많은 화학공정 및 플랜트에 가장 적합한 상태 추정 기법이다. 하지만 이 기법은 오직 점 추정치(point estimate)만을 제공하며 상태 변수의 기저 분포에 대한 정보를 제공하지 않는다. 이러한 관점에서 이동 수평 추정 기법을 파티클 필터와 같은 확률론적 기법과 결합하는 것이 향후 연구에 있어 생산적인 방향이 될 것이다. 또한 이동 수평 추정에 대한 이론적, 실용적 연구가 상당히 진행된 만큼 큰 스케일의 복잡한 실제 산업 화학 공정에 적용하는 것에 초점을 맞추어 최적화 접근법의 새로운 문제점과 해결점을 활발하게 탐구해 나가야 할 것이다.

## REFERENCES

[1] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35-45, 1960.

[2] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, pp. 95-108, 1961.

[3] D. G. Robertson and J. H. Lee, "A least squares formulation for state estimation," *Journal of Process Control*, vol. 5, pp. 291-299, 1995.

[4] F. Daum, "Nonlinear filters: beyond the Kalman filter," *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, vol. 20, pp. 57-69, 2005.

[5] J. B. Rawlings and B. R. Bakshi, "Particle filtering and moving horizon estimation," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 30, pp. 1529-1541, 2006.

[6] S. C. Patwardhan, S. Narasimhan, P. Jagadeesan, B. Gopaluni, and S. L Shah, "Nonlinear Bayesian state estimation: A review of recent developments," *Control Engineering Practice*, 2012.

[7] A. Alessandri, M. Baglietto, G. Battistelli, and M. Gaggero, "Moving-horizon state estimation for nonlinear systems using neural networks," *Neural Networks, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 768-780, 2011.

[8] A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli, "Moving-horizon state estimation for nonlinear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes," *Automatica*, vol. 44, pp. 1753-1765, 2008.

[9] M. Farina, G. Ferrari-Trecate, C. Romani, and R. Scattolini, "Moving horizon estimation for distributed nonlinear systems with application to cascade river reaches," *Journal of Process Control*, vol. 21, pp. 767-774, 2011.

[10] M. Farina, G. Ferrari-Trecate, and R. Scattolini, "Distributed moving horizon estimation for linear constrained systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 55, pp. 2462-2475, 2010.

[11] M. Farina, G. Ferrari-Trecate, and R. Scattolini, "Distributed moving horizon estimation for nonlinear constrained systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, pp. 123-143, 2012.

[12] P. Kühl, M. Diehl, T. Kraus, J. P. Schlöder, and H. G. Bock, "A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 35, pp. 71-83, 2011.

[13] J. Liu, "Moving horizon state estimation for nonlinear systems with bounded uncertainties," *Chemical Engineering Science*, 2013.

[14] R. López-Negrete, S. C. Patwardhan, and L. T. Biegler, "Constrained particle filter approach to approximate the arrival cost in Moving Horizon Estimation," *Journal of Process Control*, vol. 21, pp. 909-919, 2011.

[15] C. C. Qu and J. Hahn, "Computation of arrival cost for moving horizon estimation via unscented Kalman filtering," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 358-363, 2009.

[16] J. B. Rawlings and L. Ji, "Optimization-based state estimation: Current status and some new results," *Journal of Process Control*, vol. 22, pp. 1439-1444, 2012.

[17] S. Ungarala, "Computing arrival cost parameters in moving horizon estimation using sampling based filters," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 1576-1588, 2009.

[18] V. M. Zavala, "Stability analysis of an approximate scheme for moving horizon estimation," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 34, pp. 1662-1670, 2010.

[19] V. M. Zavala, C. D. Laird, and L. T. Biegler, "A fast moving horizon estimation algorithm based on nonlinear programming sensitivity," *Journal of Process Control*, vol. 18, pp. 876-884, 2008.

[20] J. Zhang and J. Liu, "Distributed moving horizon state estimation for nonlinear systems with bounded uncertainties," *Journal of Process Control*, vol. 23, pp. 1281-1295, 2013.

[21] B. Nicholson, R. López-Negrete, and L. T. Biegler, "On-line state estimation of nonlinear dynamic systems with gross errors," *Computers & Chemical Engineering*, 2013.

[22] I. Necoara, V. Nedelcu, and I. Dumitrache, "Parallel and distributed optimization methods for estimation and control in networks," *Journal of Process Control*, vol. 21, pp. 756-766, 2011.

[23] M. Farina, G. Ferrari-Trecate, and R. Scattolini, "Moving-horizon partition-based state estimation of large-scale systems," *Automatica*, vol. 46, pp. 910-918, 2010.

[24] R. Huang, L. T. Biegler, and S. C. Patwardhan, "Fast offset-free nonlinear model predictive control based on moving horizon estimation," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 49, pp. 7882-7890, 2010.

[25] A. Küpper, M. Diehl, J. P. Schlöder, H. G. Bock, and S. Engell, "Efficient moving horizon state and parameter estimation for SMB processes," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 785-802, 2009.

[26] A. Küpper, L. Wirsching, M. Diehl, J. P. Schlöder, H. G. Bock, and S. Engell, "Online identification of adsorption isotherms in SMB processes via efficient moving horizon state and parameter estimation," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 34, pp. 1969-1983, 2010.

[27] V. M. Zavala and L. T. Biegler, "Optimization-based strategies for the operation of low-density polyethylene tubular reactors: Moving horizon estimation," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 33, pp. 379-390, 2009.

[28] K. R. Muske and T. F. Edgar, "Nonlinear state estimation," *in Nonlinear Process Control*, 1997, pp. 311-370.

[29] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "Unscented filtering and nonlinear estimation," *Proc. of the IEEE*, vol. 92, pp. 401-422, 2004.

[30] R. Van Der Merwe, "Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models," University of Stellenbosch, 2004.

[31] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 50, pp. 174-188, 2002.

[32] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu, "On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering," *Statistics and Computing*, vol. 10, pp. 197-208, 2000.

[33] R. Van Der Merwe, A. Doucet, N. De Freitas, and E. Wan, "The unscented particle filter," in NIPS, pp. 584-590, 2000.

[34] G. Evensen, "The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation," *Ocean Dynamics*, vol. 53, pp. 343-367, 2003.

[35] G. Burgers, P. Jan van Leeuwen, and G. Evensen, "Analysis scheme in the ensemble Kalman filter," *Monthly Weather Review*, vol. 126, pp. 1719-1724, 1998.

[36] T. C. Hsia, System Identification: Least-Squares Methods: Lexington books Lexington, 1977.

[37] D. G. Robertson, J. H. Lee, and J. B. Rawlings, "A moving horizon-based approach for least-squares estimation," *AIChE Journal*, vol. 42, pp. 2209-2224, 1996.

[38] K. R. Muske, J. B. Rawlings, and J. H. Lee, "Receding horizon recursive state estimation," *in American Control Conference*, pp. 900-904, 1993.

[39] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and J. H. Lee, "Constrained linear state estimation—a moving horizon approach," *Automatica*, vol. 37, pp. 1619-1628, 2001.

[40] C. V. Rao and J. B. Rawlings, "Constrained process monitoring: Moving-horizon approach," *AIChE Journal*, vol. 48, pp. 97-109, 2002.

[41] M. Diehl, H. G. Bock, and J. P. Schlöder, "A real-time iteration scheme for nonlinear optimization in optimal feedback control," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 43, pp. 1714-1736, 2005.

[42] M. Diehl, H. G. Bock, J. P. Schlöder, R. Findeisen, Z. Nagy, and F. Allgöwer, "Real-time optimization and nonlinear model predictive control of processes governed by differential-algebraic equations," *Journal of Process Control*, vol. 12, pp. 577-585, 2002.

[43] V. M. Zavala and L. T. Biegler, "Optimization-based strategies for the operation of low-density polyethylene tubular reactors: nonlinear model predictive control," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 33, pp. 1735-1746, 2009.

[44] V. M. Zavala and L. T. Biegler, "The advanced-step NMPC

controller: Optimality, stability and robustness," *Automatica*, vol. 45, pp. 86-93, 2009.

[45] M. Diehl, H. J. Ferreau, and N. Haverbeke, "Efficient numerical methods for nonlinear MPC and moving horizon estimation," *Nonlinear Model Predictive Control*, Springer, pp. 391-417, 2009.

[46] D. B. Leineweber, I. Bauer, H. G. Bock, and J. P. Schlöder, "An efficient multiple shooting based reduced SQP strategy for large-scale dynamic process optimization. Part 1: theoretical aspects," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 27, pp. 157-166, 2003.

[47] J. B. Rawlings and B. T. Stewart, "Coordinating multiple optimization-based controllers: New opportunities and challenges," *Journal of Process Control*, vol. 18, pp. 839-845, 2008.

[48] R. Scattolini, "Architectures for distributed and hierarchical model predictive control–a review," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 723-731, 2009.

[49] H. Michalska and D. Q. Mayne, "Moving horizon observers and observer-based control," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 40, pp. 995-1006, 1995.

[50] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and D. Q. Mayne, "Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 246-258, 2003.

[51] D. R. Yang and K. S. Lee, "Monitoring of a distillation column using modified extended Kalman filter and a reduced order model," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 21, pp. S565-S570, 1997.

[52] R. M. Oisiovici and S. L. Cruz, "State estimation of batch distillation columns using an extended Kalman filter," *Chemical Engineering Science*, vol. 55, pp. 4667-4680, 2000.

[53] R. M. Oisiovici and S. L. Cruz, "Inferential control of high-purity multicomponent batch distillation columns using an extended Kalman filter," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 40, pp. 2628-2639, 2001.

[54] M. J. Olanrewaju and M. A. Al-Arfaj, "Estimator-based control of reactive distillation system: Application of an extended Kalman filtering," *Chemical Engineering Science*, vol. 61, pp. 3386-3399, 2006.

[55] D. J. Kozub and J. F. MacGregor, "State estimation for semi-batch polymerization reactors," *Chemical Engineering Science*, vol. 47, pp. 1047-1062, 1992.

[56] N. Tudoroiu and K. Khorasani, "State estimation of the vinyl acetate reactor using unscented Kalman filters (UKF)," in Industrial Electronics and Control Applications, 2005. ICIECA 2005. International Conference on, 2007, pp. 4 pp.-4.

[57] T. Chen, J. Morris, and E. Martin, "Particle filters for state and parameter estimation in batch processes," *Journal of Process Control*, vol. 15, pp. 665-673, 2005.

[58] A. Romanenko and J. A. Castro, "The unscented filter as an alternative to the EKF for nonlinear state estimation: a simulation case study," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 28, pp. 347-355, 2004.

[59] A. Romanenko, L. O. Santos, and P. A. Afonso, "Unscented Kalman filtering of a simulated pH system," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 43, pp. 7531-7538, 2004.

[60] S. B. Chitralekha, J. Prakash, H. Raghavan, R. Gopaluni, and S. L. Shah, "A comparison of simultaneous state and parameter estimation schemes for a continuous fermentor reactor," *Journal of Process Control*, vol. 20, pp. 934-943, 2010.

[61] A. Shenoy, J. Prakash, V. Prasad, S. Shah, and K. McAuley, "Practical issues in state estimation using particle filters: Case studies with polymer reactors," *Journal of Process Control*, 2012.

[62] S. Kolås, B. Foss, and T. Schei, "Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 33, pp. 1386-1401, 2009.

[63] J. Prakash, S. C. Patwardhan, and S. L. Shah, "On the choice of importance distributions for unconstrained and constrained state estimation using particle filter," *Journal of Process Control*, vol. 21, pp. 3-16, 2011.

[64] X. Shao, B. Huang, and J. M. Lee, "Constrained Bayesian state estimation–A comparative study and a new particle filter based approach," *Journal of Process Control*, vol. 20, pp. 143-157, 2010.

[65] J. Prakash, S. C. Patwardhan, and S. L. Shah, "Constrained nonlinear state estimation using ensemble Kalman filters," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 49, pp. 2242-2253, 2010.

[66] B. J. Spivey, J. D. Hedengren, and T. F. Edgar, "Constrained nonlinear estimation for industrial process fouling," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 49, pp. 7824-7831, 2010.

[67] E. L. Haseltine and J. B. Rawlings, "Critical evaluation of extended Kalman filtering and moving-horizon estimation," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 44, pp. 2451-2460, 2005.

**장 홍**

2009년 한국과학기술원 생명화학공학과(공학사). 2011년 한국과학기술원 생명화학공학과(공학석사). 2011년~현재 한국과학기술원 생명화학공학과 박사과정 재학중. 관심분야는 상태 및 매개변수 추정.

**최 수 항**

2012년 연세대학교 화학공학과(공학사). 2012년~현재 한국과학기술원 생명화학공학과 석박사 연계 과정 재학중. 관심분야는 상태 및 매개변수 추정.

**이 재 형**

1986년 워싱턴대학교 화학공학과(공학사). 1991년 캘리포니아공대 화학공학과(공학박사). 1991년~1998년 어번대학교 화학공학과 조교수, 부교수. 1998년~2000년 퍼듀대학교 화학공학과 부교수. 2000년~2010년 조지아공대 화학생명공학과 교수. 2010년~현재 한국과학기술원 생명화학공학과 교수.