Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2014) 20(3):270-276
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2014.14.9014 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

주파수와 시간영역에서의 강인제어에 관한 연구동향조사

A Survey of Robust Control in Both Frequency Domain and Time Domain

정 은 태, 박 홍 배*
(Eun Tae Jeung[1] and Hong Bae Park[2,*])
[1]Control and Instrumentation Engineering, Changwon National University
[2]Graduate School of Electronics Engineering, Kyungpook National University

Abstract: This survey paper reviews robust control problems in both frequency domain and time domain. Robust control is focused on model uncertainties such as modeling error, system parameter variations, and disturbances. Robust control design problems are discussed according to parameter uncertainty, polytopic uncertainty, and norm-bounded uncertainty. Nowadays, robust control theory is combined with various control theory such as model predictive control, adaptive control, intelligent control, and time delay control.

Keywords: robust control, stability, stabilizability, uncertainty, H_∞ control

I. 서론

강인제어(robust control)란 무엇인가? 제어대상의 모델이 명확하지 않는 부분을 포함하는 시스템에 대한 제어를 일컬어 강인제어라 말한다[1]. 좀 더 구체적으로, 미리 선정된 범위 내에서 시스템의 동역학이 변하더라도 폐루프 시스템의 안정성, 추종성능, 외란제거능력 등을 원하는 기준치까지 달성하도록 하는 제어기를 설계하는 것이다. 강인제어는 시스템의 불확실성을 다루어 제어기를 설계하는 것이므로

1) 시스템의 불확실성을 묘사하는 방법
2) 강인성 해석 문제(robustness analysis problem): 주어진 시스템과 제어기에 대하여 강인성(robustness)를 해석
3) 강인성 종합 문제(robustness synthesis problem): 불확실성을 포함하는 시스템에 대한 제어기 설계

와 같이 나누어 고려할 수 있다.

강인성 해석 및 제어기 설계 문제는 불확실성을 어떻게 묘사하느냐에 따라 달라지기 때문에, 불확실성을 묘사하는 방법에 따라 강인제어 문제를 논하고자 한다. 대표적인 불확실성 모델로는 매개변수 불확실성, 폴리톱(polytope) 불확실성, 크기제한(norm-bounded) 불확실성이 있다.

강인제어를 논하기 전에 궤환제어(feedback control)를 살펴보자. 그림 1의 반전증폭기의 입력 v_i와 출력 v_o의 비는

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+A^{-1}(1+R_2/R_1)} \tag{1}$$

이다. 예를 들어, $A=10{,}000$, $R_2/R_1=100$일 때, A가 10% 변하더라도 이득 v_o/v_i는 0.1% 변한다. 즉, A가 상당히 큰 값이라면, 이득은 거의 $v_o/v_i \approx -R_2/R_1$이다. 따라서 궤환제어가 불확실성에 강하다는 장점을 가지고 있다.

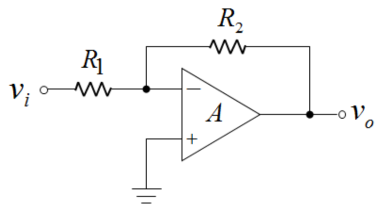


그림 1. 반전증폭기.
Fig. 1. Inverting OP amp circuit.

II. Kharitonov 정리와 구간시스템(interval system)

폐루프 시스템의 특성방정식의 근을 조사함으로써 시스템의 안정성을 판별할 수 있고, 근사적으로 시스템의 시간응답특성을 파악할 수 있다. 불확실성이 포함되지 않은 시스템의 특성방정식은

$$\Delta(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n \tag{2}$$

와 같은 형태로 표현되며, 특성방정식의 계수 $a_0, a_1, \cdots, a_n$은 상수이다. 따라서 이 시스템의 안정성은 특성방정식의 근을 조사함으로써 쉽게 판별할 수 있다. 그러나 특성방정식의 계수가 하나의 값이 아니라

$$a_i^- \leq a_0 \leq a_i^+,\ i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

와 같이 어떤 구간 내에 존재하는 상수라면, 이 구간 내의 모든 계수에 대하여 특성방정식의 근을 조사하여 안정성을 판별하는 것은 꽤 피곤한 일이다. Kharitonov는 (3)의 구간 내에 존재하는 모든 계수에 대하여 특성방정식 (2)가 안정할 조건을

* Corresponding Author
Manuscript received January 24, 2014 / accepted February 3, 2014
정은태: 창원대학교 제어계측공학과(jet26@changwon.ac.kr)
박홍배: 경북대학교 IT대학 전자공학부(hbpark@knu.ac.kr)

$$\Delta_1(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + \cdots \quad (4)$$

$$\Delta_2(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + \cdots \quad (5)$$

$$\Delta_3(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + \cdots \quad (6)$$

$$\Delta_4(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + \cdots \quad (7)$$

와 같이 단지 4개의 다항식의 안정성을 판별하면 된다는 정리를 제시하였다. 즉, (3)의 구간 내에 존재하는 모든 계수에 대하여 특성방정식이 안정할 필요충분조건은 4개의 다항식 $\Delta_i(s)$이 안정하다는 것이 Kharitonov 정리[2,3]이다. Kharitonov 정리는

i) 특성방정식의 계수가 서로 독립이어야 하고,

ii) 이산시간 시스템에 적용할 수 없다

는 단점을 가지고 있지만, 시스템의 안정성 판별을 위한 유용한 정리이다[4]. 현재까지 Kharitonov 정리를 이용한 강인성 해석 및 제어기 설계에 수천편의 논문들이 발표되고 있음이 이를 뒷받침해 주고 있다. 몇 개의 논문을 예로 들면, Kharitonov 정리의 일반화[5], 상태공간에서 Kharitonov 정리를 이용하여 정적출력궤환(static output feedback) 제어기 설계[6,7], 강인한 PID 제어이득 튜닝[8] 및 설계[9], 구간시스템에 대한 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)를 구하는 방법[10], 그리고 실제 시스템에 적용한 논문[11-14] 등이 있다.

또 다른 강인성 해석법으로 Bartleett 등[15]이 가장자리정리(edge theorem)를 발표하였다. 가장자리정리는 특성방정식의 계수들이 종속(dependent)관계에 있는 것을 허용한다. 즉, 특성방정식

$$\Delta(s,q) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_i(q) s^i \quad (8)$$

와 같이 고려하였고, 여기서 계수 $a_i(q)$는 물리적 계수 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_k)$에 선형 종속이다. 각 물리적 계수 q_i가 구간 $[q_i^-, q_i^+]$ 내에 존재할 때, 특성방정식의 집합은 폴리톱 형태이다. 즉, 이 집합은 각 경계점에서 만들어진 2^k 개의 다항식의 볼록테두리(convex hull)이다. 이 논문의 장점은 구간시스템의 특성방정식 (8)이 안정할 필요충분조건은 각 경계점에서 안정성을 확인하는 것이다. 가장자리정리의 또 다른 장점은 연속시간시스템 뿐만 아니라 이산시간시스템에도 적용가능하다는 것이다.

그리고 특성방정식 (8)의 근이 복소평면의 좌반부에 존재하는지를 판별하는 것은 시스템의 안정성만 다룬 것이고, 시스템의 성능 혹은 상대안정성을 판별하기 위해 특정한 영역 D에 특성방정식의 근이 존재하는지를 판별하는 D-안정성을 고려하기도 한다. 한 예로 Kharitonov 정리가 D 영역을 복소평면의 좌반부로 둔 경우이다.

구간시스템의 특성방정식 집합을

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{ \Delta : \Delta(s,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Delta_i(s),\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqq 0 \right\} \quad (9)$$

와 같이 N개의 꼭지점 특성방정식 $\Delta_1(s), \cdots, \Delta_N(s)$을 가지는 폴리톱으로 정의[15]하여 강인안정성을 해석하기도 한다. 이 집합의 원소는 각 특성방정식의 볼록조합(convex combination)이다. [15]에서는 실계수를 가지는 모닉(monic, 최고차항의 계수가 1인 다항식) 특성방정식으로 한정하였고, Fu 등[16]이 복소계수로 확장하였고, Henrion 등[17]은 양다항식(positive polynomial)을 이용하여 고정된 차수의 제어기 설계기법을 제시하였다.

이 장에서는 불확실성을 가지는 시스템을 s-평면에서 다룬 것이고, 1980년대 중반부터 상태변수모델(state variable model)을 이용하여 불확실성을 표현하기 시작했으며 이를 다음 장에서 다룬다.

III. 상태변수모델과 Lyapunov 함수

불확실성을 가지는 시스템을

$$\dot{x} = A(\alpha)x,\ A(\alpha) \in \Omega_A \quad (10)$$

와 같이 상태변수모델로 모델링하고, 여기서 $A(\alpha)$는

$$\Omega_A = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqq 0 \right\} \quad (11)$$

와 같이 N개의 꼭지점 $A_1, A_2, \cdots, A_N$을 가지는 폴리톱의 원소이다.

정의 1 [18]: 불확실성이 없는 A의 고유치(혹은 $\Delta(s)$의 근)가 영역 D 내에 존재한다면, A(혹은 $\Delta(s)$)는 D-안정(D-stable)하다고 한다.

정의 2 [19]: 모든 $A(\alpha) \in \Omega_A$ (혹은 $\Delta(s) \in \boldsymbol{\Delta}$)에 대하여, $A(\alpha)$(혹은 $\Delta(s)$)가 D-안정하다면, 시스템 (10)(혹은 $\boldsymbol{\Delta}$)은 D-강인안정(robustly D-stable)하다고 한다.

D-안정성을 논하기 위해서는 영역 D를 정하고 A의 고유치가 영역 D에 존재할 조건을 구해야 하는데, Gutman 등[20]이 제시한 결과를 바탕으로 Chilali 등[17]이 체계화시켰으며, [17]의 논문이 1,300회 이상 인용될 정도로 많은 연구자들이 그 결과를 활용하고 있다. 그리고 영역 D를 복소평면의 좌반부로 선택하면 연속시간 시스템의 일반적인 안정성이 되고, 중심이 원점인 단위원으로 선택하면 이산시간에서의 안정성이 된다.

상태변수모델의 안정성 및 제어이론 분야에서 Lyapunov 함수는 중요한 역할을 하고 있으며, 이는 러시아 수학자 A. M. Lyapunov [21]가 상미분방정식(ordinary differential equation)의 안정성을 해석할 수 있는 기법을 1899년에 개발한 것으로, 그의 이름을 따서 Lyapunov 함수라 불려졌다.

선형시불변 시스템 즉, 시스템 (10)에서 $i=1$인 경우, Lyapunov 함수를

$$V = x^T P x,\ P > 0 \quad (12)$$

로 두면, 시간에 대한 미분은

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x \quad (13)$$

이고, 모든 $x \neq 0$에 대하여 $\dot{V} < 0$이면 A는 안정하다. 즉,

$$A^T P + PA < 0 \quad (14)$$

을 만족하는 대칭행렬 $P > 0$가 존재하는 것으로 안정성을 판별할 수 있다[22-24].

불확실성을 가지는 시스템 (10)에 대하여 Lyapunov 함수를 (12)와 동일하게 두고, 시간에 대한 미분을 구하면

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x^T \left(A_i^T P + P A_i\right) x \quad (15)$$

이므로

$$A_i^T P + P A_i < 0, \ i = 1, 2, \cdots, N \quad (16)$$

을 만족하는 대칭행렬 $P > 0$가 존재하면 불확실성 시스템 (10)은 강인안정하다. 그러나 Lyapunov 함수 선정에 있어서, (12)는 매개변수와 관계없이 하나의 이차함수로 되어있다. Lyapunov 함수를

$$V = \sum_{i=1}^{N} x^T \alpha_i P_i x, \ P_i > 0, \ i = 1, \cdots, N \quad (17)$$

와 같이 매개변수에 종속적인 함수로 두면,

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 + P_1 A_1 & A_1^T P_2 + P_2 A_1 & \cdots & A_1^T P_N + P_N A_1 \\ A_2^T P_1 + P_1 A_2 & A_2^T P_2 + P_2 A_2 & \cdots & A_2^T P_N + P_N A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N^T P_1 + P_1 A_N & A_N^T P_2 + P_2 A_N & \cdots & A_N^T P_N + P_N A_N \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

을 만족하는 $P_i (i = 1, \cdots, N)$가 존재하면 불확실성 시스템 (10)은 강인안정하다. 이 결과는 (16)의 결과를 포함하므로 좀 더 나은 강인안정성 조건이라 할 수 있다. 이와 같이 Lyapunov 함수 선정에 따라 필요충분조건에 좀 더 근접한 안정성 조건을 구할 수 있다[25-31].

강인성을 해석하는 문제보다 제어기를 설계하는 문제는 좀 더 복잡하다. 불확실성 시스템

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u, \ [A(\alpha) \ \ B(\alpha)] \in \Omega \quad (19)$$

에 대하여, 강인안정성을 보장하는 상태궤환제어기

$$u = Kx \quad (20)$$

를 찾는 것이 강인제어기 설계문제이고, 여기서

$$\Omega = \left\{ [A(\alpha) \ \ B(\alpha)] : A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \right. \\ \left. B(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B(\alpha), \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqq 0 \right\} \quad (21)$$

이다. (20)을 (19)에 대입한 폐루프 시스템은

$$\dot{x} = \widetilde{A}(\alpha)x, \ \widetilde{A}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K \quad (22)$$

이므로 (16) 혹은 (18)의 선형행렬부등식(linear matrix inequality)에 A_i 대신 $\widetilde{A}_i$를 대입하여 강인안정화 조건을 얻을 수 있고, 개선된 조건들을 [32-34]에서 찾아 볼 수 있다.

불확실성 시스템을

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x, \ \Delta A = E_A F_A(\alpha) H_A \quad (23)$$

와 같이 모델링[35]하는 경우도 흔히 볼 수 있다. 여기서

$$F_A^T(\alpha) F_A(\alpha) \leqq I \quad (24)$$

이고, α는 실수공간의 콤팩트집합(compact set)의 원소이고, E_A와 H_A는 적절한 차원(dimension)을 가지는 상수행렬이며, I는 단위행렬이다. 불확실성 시스템 (23)에 대한 강인안정성 해석도 (12)의 Lyapunov 함수를 이용한다. (12)를 시간에 대하여 미분하면

$$\dot{V} = x^T [A^T P + PA + \Delta A^T P + P \Delta A] x \quad (25)$$

이므로, (23)의 불확실성 ΔA를 대입한 행렬부등식

$$A^T P + PA + H_A^T F_A^T(\alpha) E_A^T P + P E_A F_A(\alpha) H_A < 0 \quad (26)$$

을 만족하는 $P > 0$이 존재하면 불확실성 시스템 (23)은 강인안정하다. 행렬부등식

$$H_A^T F_A^T(\alpha) E_A^T P + P E_A F_A(\alpha) H_A \leqq \tau_A^{-1} H_A^T H_A + \tau_A P E_A E_A^T P \quad (27)$$

을 이용하여 (26)을 다시 정리하면

$$A^T P + PA + \tau_A^{-1} H_A^T H_A + \tau_A P E_A E_A^T P < 0 \quad (28)$$

이지만, 이 행렬부등식은 좌변의 마지막 항 때문에, 선형행렬부등식이 아니다. (28)의 앞뒤에 $Q = P^{-1}$를 곱하고 Schur 보부등식(Schur complement) [24]를 이용하면

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ + \tau_A E_A E_A^T & Q H_A^T \\ H_A Q & -\tau_A I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

와 같이 선형행렬부등식 조건을 얻을 수 있다. 일반적으로 (12)의 Lyapunov 함수를 이용하여 안정성을 보장하는 것을 이차적 안정(quadratically stable)이라고 하고, 안정화 제어기가 존재하는 조건을 이차적 안정화가능(quadratically stabilizable)이라고 한다[36].

이를 강인안정화 문제로 확장하면, 즉, 불확실성 시스템

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u, \ \Delta B = E_B F_B(\alpha) H_B \quad (30)$$

에 대한 상태궤환제어기 (20)을 구하는 것이다. (20)을 (30)에 대입하면

$$\dot{x} = (A_d + \Delta A_d)x, \ A_d = A + BK, \ \Delta A_d = \Delta A + \Delta BK \quad (31)$$

이므로, A와 ΔA 대신에 A_d과 ΔA_d을 (25)에 대입하여 같은 방법으로 전개하면

$$\begin{bmatrix} \Phi & Q H_A^T & N^T H_B^T \\ H_A Q P & -\tau_A I & 0 \\ H_B N & 0 & -\tau_B I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

와 같은 조건을 얻을 수 있다. 여기서

$$\Phi = QA^T + AQ + N^T B^T + BN + \tau_A E_A E_A^T + \tau_B E_B E_B^T \quad (33)$$

$$N = KQ \quad (34)$$

이고, (32)를 만족하는 $Q > 0$, N이 존재하면 불확실성 시스템 (30)은 강인안정하다. 특히, (34)로부터

$$K = NQ^{-1} \quad (35)$$

와 같이 상태궤환이득을 구할 수 있다. 불확실성을 (30)과

같은 형태로 다룬 연구 결과도 폴리톱 형태를 다룬 연구 못지않게 많다. 여기서 모두 언급하기 어려우므로 참고문헌 [37-42]와 그 논문들에 인용된 논문들을 살펴보기 바란다.

불확실성을 가지는 시스템 (30)을

$$\dot{x} = Ax + Bu + [I \ 0]w \tag{36.1}$$

$$z = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \tag{36.2}$$

$$w = (\Delta A \ \ \Delta B) z \tag{37}$$

와 같이 불확실성을 분리해 낸 형태로 만들 수 있다. 이는 시스템 (30)과 같은 시스템이고, 시스템 (36)을 공칭(nominal)시스템이라 한다. 공칭시스템 (36)은 완전히 알고 있는 시스템이고, (37)은 불확실성을 표현한 것으로

$$\|[\Delta A \ \ \Delta B]\| < \delta \tag{38}$$

와 같이 크기가 제한된(bounded) 불확실성으로 표현한다. 이와 같이 표현한 형태를 다루는 제어 중의 하나가 H_∞ 제어이고, 불확실성 시스템 (30)과 H_∞ 제어 사이의 관계를 [35]에서 찾아 볼 수 있다. H_∞ 제어는 다음 장에서 다룬다.

IV. H_∞ 제어

H_∞ 제어는 강인제어를 다루는 기법 중 하나이다. H_∞ 제어는 Zames [43]에 의해 시작되었고, 이 보다 앞서 Doyle 등[44]이 비슷한 결과를 제시하였지만, H_∞ 제어로 불리게 되었다. H_∞ 제어는 선형시불변 시스템에 대하여 주파수 영역에서 다루어 졌고, 여기에 대한 좋은 검토는 Francis [45]에 의해 제시되었다. Doyle 등[46]은 상태공간에서 H_∞ 제어를 처음 시도하였으며, 4,600회 이상 인용될 정도로 H_∞ 제어분야에서 유명한 논문이다. 이 결과는 Riccati 방정식으로 제시되어 있으며, 요즘은 선형행렬부등식을 이용하여 H_∞ 제어를 다루고 있다. 제어이론의 많은 문제들을 선형행렬부등식으로 나타낼 수 있음을 Boyd 등[24(12,000회 이상 인용)]이 잘 설명하였고, Matlab의 선형행렬부등식 도구[47]의 개발로 인하여, 많은 제어문제를 선형행렬부등식으로 제시하고 있는 추세이다.

H_∞ 제어에서 다루는 불확실성은 크게 가산불확실성(additive uncertainty), 승산불확실성(multiplicative uncertainty), 소인수불확실성(coprime factor uncertainty)으로 나누고, 이에 대한 블록선도를 그림 2에 나타낸다. 그림 2(a)의 가산불확실성 시스템은

$$G_\Delta = G + \Delta_A \tag{39}$$

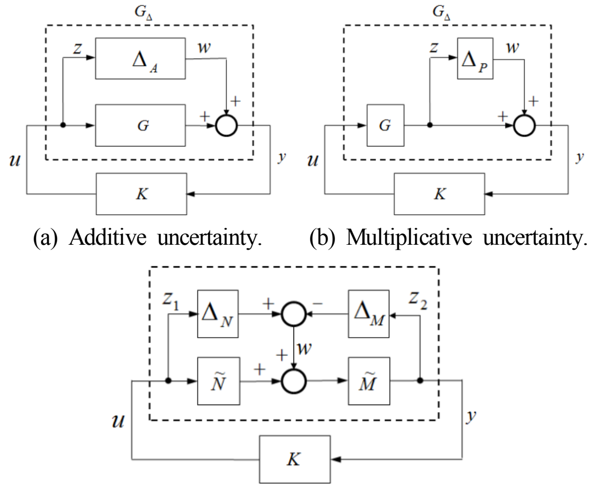
이고, (b)의 승산불확실성 시스템은

$$G_\Delta = (I + \Delta_P) G \tag{40}$$

이고, (c)의 소인수불확실성 시스템은

$$G_\Delta = \left(\widetilde{M} + \Delta_M\right)^{-1}\left(\widetilde{N} + \Delta_N\right) \tag{41}$$

이다. 여기서 G는 공칭플랜트이고, $\widetilde{M}$과 $\widetilde{N}$은 G의 좌소인수분해($G = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$) 인자이다. (39)-(41)의 불확실성 시스템을 그림 3에 나타낸 것과 같이 좀 더 일반적인 형태



(a) Additive uncertainty. (b) Multiplicative uncertainty.

(c) Coprime uncetainty.

그림 2. 불확실성.

Fig. 2. Uncertainties.

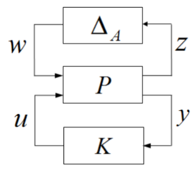


그림 3. 일반화된 불확실성 모델.

Fig. 3. Generalized uncertainty model.

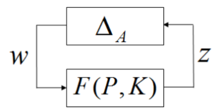


그림 4. 선형분수변환.

Fig. 4. LFT (Linear Fractional Transformation).

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \ w = \Delta z, \ P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{42}$$

로 표현할 수 있고, 이러한 형태로 변환하는 것을 선형분수변환(linear fractional transformation)이라 한다. 그림 4와 같이 제어기를 포함한 형태로 표현하면

$$F(P,K) = P_{11} + P_{12}(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{43}$$

이고, 작은이득정리(small gain theorem)를 이용하면

$$\|F(P,K)\|_\infty < \gamma \tag{44}$$

을 만족하는 제어기를 설계하는 문제가 바로 H_∞ 제어이고, 최소의 γ_{opt}를 찾는 것이 H_∞ 최적제어이다.

정리 1(Small Gain Theorem) [23]: 모든 $\Delta \in RH_\infty$에 대하여 그림 3의 시스템이 well-posed이고 내부안정(internally stable)이라 하고 $F(P,K) \in RH_\infty$이고 $\gamma > 0$이라 가정한다. 그러면 $\|\Delta\|_\infty \le \gamma^{-1}$일 필요충분조건은 $\|F(P,K)\|_\infty < \gamma$이다.

1980년대 후반까지 H_∞ 제어를 주파수영역에서 주로 해석하였지만, Doyle 등의 논문[46]이 발표되면서 상태공간에서 H_∞ 제어를 다루기 시작했다. 시스템 (42)를 상태공간으로 표현하면

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{45}$$

와 같이 되고, H_∞ 최적제어문제는 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} N_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1 X & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} N_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Y + YA & YB_1 & C_1^T \\ B_1^T Y & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{47}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \tag{48}$$

을 만족하는 X와 Y 중에 γ를 최소화하는 것이다[48, 49]. 여기서 N_{12}와 N_{21}은 각각 $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$의 영공간(null spaces)의 기저(bases)이다.

H_∞ 제어기 설계는 다양한 문제를 해결하는데 강력한 방법이지만, H_∞ 성능지수가 항상 제어기설계문제에 적절한 것은 아니기 때문에 다른 성능지수와 연계하여 사용하는 경우가 있다. 예를 들어, H_2 제어문제와 결합된 H_2/H_∞ 제어문제[50]가 있다. 그리고 불확실성의 표현이 필요 이상으로 선택되는 경우가 발생하기도 하기 때문에, 과도한 제어기를 설계할 수도 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 구조화된 특이치(structured singular value)를 이용한 μ-종합(μ-synthesis)을 Doyle [51]이 제시하였으며, H_∞ 제어처럼 제어기설계가 명백한 것이 아니라 D-K 반복법을 수행하여야 한다.

V. 결론

강인제어는 불확실성을 정의하는 것에 따라 제어기 설계기법에 차이가 있기 때문에, 불확실성에 따른 강인제어기법들을 살펴보았다. 불확실성을 표현하는 방법에는 매개변수 불확실성(구간시스템), 폴리톱형태, 크기제한(norm bounded) 형태 등이 있고, 이들과 관련된 제어이론들을 설명하면서 서로의 상관관계와 장단점을 설명하고자 노력하였다.

그리고 최근의 연구동향을 살펴보면, 한 가지 불확실성 모델을 사용하는 것이 아니라, 여기서 언급된 모든 불확실성을 고려한 제어기를 설계하는 것이 소개[52]되고 있다. 더욱이 강인제어를 선형시스템에 국한하지 않고, 모델예측제어(model predictive control), 적응제어(adaptive control), T-S 퍼지시스템 제어, 시간지연시스템 제어 등과 같이 다양한 시스템 혹은 다양한 제어기법들과 같이 적용하고 있다. 이에 관한 내용은 본 특집호에 게재된 논문을 참조하기 바란다. 그리고 2010년 이후의 대부분 연구결과들은 다양한 제어기법을 이용하거나 실제 시스템에 적용한 논문들이 주를 이루고 있다.

REFERENCES

[1] P. Bernhard, "Survey of linear quadratic robust control," *Macroeconomic Dynamics*, vol. 6, pp. 19-39, 2002.

[2] V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems linear differential equations," Differential'nye Uraveniya, vol. 14, no. 11, pp. 1483-1485, 1978.

[3] V. L. Kharitonov, "On a generalization of a stability criterion," *Akademii nauk Kahskoi SSR, Fiziko-Matenaticheskaia*, vol. 1, pp. 53-57, 1978.

[4] B. R. Barmish, "New tools for robustness analysis," P*roc. 27th IEEE CDC*, pp. 1-6, 1988.

[5] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya, "A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 3, pp. 306-311, 1989.

[6] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, "Robust controller synthesis using Kharitonov's theorem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 1, pp. 129-132, 1992.

[7] R. Toscano and P. Lyonnet, "Robust static output feedback controller synthesis using Kharitonov's theorem and evolutionary algorithm," *Information Science*s, vol. 180, pp. 2023-2028, 2010.

[8] Y. J. Huang and Y.-J. Wang, "Robust PID tuning strategy for uncertain plants based on the Kharitonov's theorem," *ISA Transactions*, vol. 39, pp. 419-431, 2000.

[9] N. Tan I. Kaya, C. Yeroglu, and D. P. Atherton, "Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus," *Energy Conversion and Management*, vol. 47. no. 18-19, pp. 3045-3058. 2006.

[10] Y. V. Hote, J. R. P. Gupta, and D. R. Choudhury, "Kharitonov's theorem and Routh criterion for stability margin of interval systems," *Int. J. Control, Automation, and Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 647-654, 2010.

[11] T. Meressi, D. Chen, and B. Paden, "Application of Kharitonov's theorem to mechanical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 3, pp. 488-491, 1993.

[12] D. Czarkowski, L. R. Pujara, and M. K. Kazimierczuk, "Robust stability of state-feedback control of PWM DC-DC push-pull converter," *IEEE Trans. Ind. Electronics*, vol. 42, no. 1, pp. 108-111, 1995.

[13] Y. V. Hote, D. R. Roy, and J. R. P. Gupta, "Robust stability analysis of the PWM push-pull DC-DC converter," *IEEE Trans. Power Electronic*s, vol. 24, no. 10, pp. 2353-2356, 2009.

[14] G. Rigatos and P. Siano, "Design of robust electric power system stablilizers using Kharitonov's theorem," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 82, no. 1, pp. 181-191, 2011.

[15] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin, "Root locations

of an entire polynomials: It suffices to check the edges," *Mathematics of Control, Singnals and Systems*, vol. 1, pp. 61-71, 1989.
[16] M. Fu and B. R. Barmish, "Polytopes of polynomials with zeros in a prescribed set," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 5, pp. 544-546, 1989.
[17] D. Henrion and V. Kucera, "Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, no. 7, pp. 1178-1186, 2003.
[18] M. Chilali and P. Gahinet, "H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 358-367, 1996.
[19] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou, "A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 40, no. 1, pp. 21-30, 2000.
[20] S. Gutman and E. J. Jury, "A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plane," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 4, pp. 853-863, 1981.
[21] Wikipedia, *Lyapunov Function*, http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_function.
[22] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design(3rd Ed.)*, Oxford University Press, 1999.
[23] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
[24] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Applied Mathematics, 1994.
[25] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems," *SIAM J. Control Opt.*, vol. 29, pp. 381-402, 1991.
[26] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali, "Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 436-442, 1996.
[27] T. Mori and H. Kokame, "A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 45, no. 8, pp. 1516-1519, 2000.
[28] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres, "An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 4, pp. 675-678, 2002.
[29] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres, "Stability of polytope of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI condition," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 405, pp. 209-228, 2005.
[30] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres, "LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions," *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 1, pp. 52-61, 2006.
[31] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres, "Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of Homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 52, no. 7, pp. 1334-1340, 2007.
[32] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions," I*EEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 1041-1046, 1996.
[33] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Systems & Control Letters*, vol. 37, no. 4, pp. 261-265, 1999.
[34] D. H. Lee, J. B. Park, Y. H. Joo, and K. C. Lin, "Lifted versions of robust D-stability and D-stabilisation conditions for uncertain polytopic linear systems," *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 24-36, 2012.
[35] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 3, pp. 356-361, 1990.
[36] B. R. Barmish, "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system," *J. Opt. Theory & Applications*, vol. 46, no. 4, pp. 399-408, 1985.
[37] Y. Wang, L. Xie, and C. E. de Souza, "Robust control of a class of uncertain nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 19, no. 2, pp. 139-149, 1992.
[38] E. T. Jeung, D. C. Oh, J. H. Kim, and H. B. Park, "Robust controller design for uncertain systems with time delays: LMI approach," *Automatica*, vol. 32, no. 8, pp. 1229-1231. 1996.
[39] J. H. Kim, E. T. Jeung, and H. B. Park, "Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input," *Automatica*, vol. 32, no. 9, pp. 1337-1339. 1996.
[40] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 8, pp. 1144-1148, 1997.
[41] Y.-Y. Cao and J. Lam, "Robust H_∞ control of uncertain Markovian jump systems with time-delay," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 1, pp. 77-83, 2000.
[42] S. Xu, P. V. Dooren, R. Stefan, and J. Lam, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty," *IEEE Trans. Automat.*

Contr., vol. 47, no. 7, pp. 1122-1128, 2002.
[43] G. Zames, “Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, 1981.
[44] J. Doyle and G. Stein, “Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 1, pp. 4-16, 1981.
[45] B. A. Francis, *A Course in H_∞ Control Theory*, vol. 88, Lecture Notes in Control and Information Science, New-York, Springer-Verlag, 1987.
[46] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, “State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
[47] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *Matlab LMI Control Toolbox*, Mathworks, 1995.
[48] P. Gahinet and P. Apkarian, “A linear matrix inequality approach to H_∞ control,” *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 4, no. 4, pp. 421-448, 1994.
[49] T. Iwasaki and R. E. Skelton, “All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas,” *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1307-1317, 1994.
[50] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, “Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 7, pp. 824-837, 1991.
[51] J. C. Doyle, “Structured uncertainty in control system design,” *Proc. 24th CDC*, FL, pp. 260-265, 1985.
[52] L. Xie, “Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty,” *Int. J. Control*, vol. 63, no. 4, pp. 741-750, 1996.

정 은 태

1991년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1993년 동 대학원 석사. 1996년 동 대학원 박사. 1997년~현재 창원대학교 메카대학 전기전자제어공학부 교수. 관심분야는 강인제어, 시간지연, T-S 퍼지 시스템, 선형행렬부등식, 제어응용 등.

박 홍 배

1977년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1979년 동 대학원 석사. 1988년 University of New Mexico 전자공학과 박사. 1988년~현재 경북대학교 IT대학 전자공학부 교수. 관심분야는 강인제어, 임베디드시스템, 전자후각시스템, 무선센서 네트워크 등.