Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2014) 20(3):261-269
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2014.14.9013 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

# 리아프노브 분석법 기반 비선형 적응제어 개요 및 연구동향 조사

# Nonlinear Adaptive Control based on Lyapunov Analysis: Overview and Survey

박 진 배*, 이 재 영
(Jin Bae Park[1,*] and Jae Young Lee[1])
[1]Department of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University

**Abstract:** This paper provides an overview of the basics and recent studies of Lyapunov-based nonlinear adaptive control, the aim of which is to improve or maintain the performance and stability of the closed-loop system by cancelling out the presumable uncertainties in the nonlinear system dynamics. The design principles are essentially based on Lyapunov's direct method. In this survey, we provide a comprehensive overview of Lyapunov-based nonlinear adaptive control techniques with simplified effective design examples, which are to be elaborated as related recent results are gradually shown. The scope of the survey contains research on singularity problems in adaptive control, the techniques to deal with linearly and nonlinearly parameterized uncertainties, robust neuro-adaptive control, and adaptive control methodologies combined with various nonlinear control techniques such as sliding-mode control, back-stepping, dynamic surface control, and optimal/$H_\infty$ control.

**Keywords:** adaptive control, Lyapunov analysis, nonlinear control

## I. 서론

현존하는 모든 시스템은 외란, 노이즈, 모델링 오차 등에 따른 불확실성을 항상 내포하고 있으며, 이를 효과적으로 처리하기 위한 강인제어(robust control) [1,2], 확률제어(stochastic control) [3], 적응제어(adaptive control) [1,4-6]와 같은 방법들이 제어공학 분야에서 꾸준히 연구되어져 왔다. 이 중 적응제어 기법은 모델링 오차에 따른 모델 불확실성(model uncertainty) 및 노화/환경변화에 따라 서서히 발생하는 변동성분을 실시간으로 감소시켜 제어성능을 향상시킨다는 점에서 다른 방법들과 차별적인 장점이 있다[1,4-6]. 본 조사 논문에서는 이러한 적응제어 분야에서 최근 주류를 이루고 있는 리아프노브 분석(Lyapunov analysis)에 기반한 비선형 적응제어 방법들과 그 연구동향을 소개한다.

대부분의 실제 시스템에는 비선형성이 존재함에도 불구하고, 그 해석의 복잡성 때문에 초창기 적응제어에 대한 연구는 주로 선형 시스템에 대해 이루어졌다. 이는 i) 주어진 파라미터 추정기와 결합된 형태인 간접(indirect) 적응제어 방법과, ii) 제어법칙과 적응법칙(adaption law)을 함께 설계하는 직접(direct) 적응제어 방법으로 나눌 수 있다[1,5]. 간접 적응제어방법의 경우, 기존 추정기와의 결합을 통해 비교적 손쉬운 적응제어기 설계가 가능한 반면, 그 안정도 분석에 있어 어려움이 존재한다. 한편, 직접 적응제어 방법의 경우 설계방법은 이론적으로 다소 복잡하지만, 통합적인 설계를 통해 안정도 분석이 용이해진다는 장점이 있다[1,4,5]. 여기서 직접 적응제어 방법의 안정도 분석 및 제어기 설계를 위해 대표적으로 사용되는 방법이 바로 리아프노브 분석법 [7]이며, 이는 가장 대표적인 비선형 시스템의 안정도 분석법으로 널리 알려져 있다[1,4]. 특히 적응제어 시스템의 경우, 선형 시스템에 대해 설계가 진행되더라도 적응법칙의 비선형성으로 인해 리아프노브 분석법과 같은 비선형 시스템에 대한 안정도 해법이 필수적으로 요구되며[5,6], 1990년대에 들어서야 본격적으로 연구가 진행된 “비선형 시스템에 대한 적응제어 방법” 역시 이러한 리아프노브 분석법에 기초한 안정도 해법 및 적응제어기 설계 방법이 주류를 이루고 있다[4].

## II. 기본 원리

먼저, 리아프노브 직접법(direct method) [1,4-6]에 기반한 적응제어 시스템의 설계법에 대한 기본 원리를 다음과 같은 시스템을 이용하여 간략히 서술한다.

상태방정식:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{1}$$

$$\dot{x}_n = f(x) + u \tag{2}$$

출력방정식:

$$y = x_1 \tag{3}$$

여기서 $x := [x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n] \in \mathbb{R}^n$는 시스템의 상태변수(state variable), $u(t) \in \mathbb{R}$는 적응제어를 위해 설계되는 제어

* Corresponding Author
Manuscript received January 24, 2014 / accepted February 3, 2014
박진배, 이재영: 연세대학교 전기전자공학과
(jbpark@yonsei.ac.kr/jyounglee@yonsei.ac.kr)

Copyright© ICROS 2014

입력, $y$는 시스템의 출력을 나타낸다. $f(x)$는 Lipschitz 연속인 비선형 함수로, 주어진 모델 $\hat{f}(x)\in\mathbb{R}$과 불확실성 $\Delta(x)\in\mathbb{R}$의 합 (4)로 표현된다.

$$f(x)=\hat{f}(x)+\Delta(x) \tag{4}$$

가정 1: $\Delta$는 상수값을 갖는 미지의 파라미터 $w\in\mathbb{R}^N$와 비선형 함수 $\phi(x)\in\mathbb{R}^N$에 대해 (5)와 같은 선형결합(linear combination)으로 표현된다.

$$\Delta(x)=w^T\phi(x) \tag{5}$$

가정 1하에, 본 예제에서는 출력 $y(t)$가 주어진 기준출력 신호 $y_r(t)$를 추종하며, 동시에 $w$에 의한 시스템에 존재하는 불확실성 $\Delta(x)$을 상쇄시켜 제어성능을 실시간으로 향상시킬 수 있는 제어법칙과 적응법칙

$$\text{제어법칙: } u=\mu(\,\cdot\,) \tag{6}$$

$$\text{적응법칙: } \dot{\hat{w}}=-\Gamma\alpha(\,\cdot\,) \tag{7}$$

을 설계한다. 여기서 $\hat{w}(t)$는 매 순간 상기 적응법칙 (7)에 의해 변화되는 값으로, 불확실성 (5)에 대한 $w$의 추정치를 나타내며, 그 추종오차를 $\tilde{w}(t):=\hat{w}(t)-w$로 정의한다. 또한, $\Gamma>0$는 임의의 값을 갖는 양한정(positive definite) 행렬로 적응이득(adaption gain)을 나타내며, $\mu(\,\cdot\,)$, $\alpha(\,\cdot\,)$는 리아프노브 직접법을 통해 결정될, 미지의 파라미터 $w$에 독립적인 비선형 함수들이다.

상기 적응제어 시스템 (6), (7)의 설계를 위해 추종오차(tracking error)를 $e=y-y_r$로 정의하고, [1,13,14,21,30,46,47]에서와 같이 동적 평면 $s(t)$를

$$s(t)=e^{(n-1)}+\lambda_{n-2}e^{(n-2)}+\cdots+\lambda_1\dot{e}+\lambda_0 e \tag{8}$$

와 같이 정의한다. 여기서 $\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-2}$값들은 방정식

$$p^{n-1}+\lambda_{n-2}p^{n-2}+\cdots+\lambda_1 p+\lambda_0=0$$

의 근이 모두 $s$-평면의 좌반면에 위치하도록 결정되며, 따라서 $s(t)=0$로 유지되는 경우, $t\to\infty$ 함에 따라 추종오차 $e(t)$가 "0"으로 수렴하게 된다. 즉, $s(t)\approx 0$를 통해 $y(t)\approx y_r(t)$를 달성할 수 있다[1]. 이를 이용하는 적응제어 시스템 (6)~(7)의 리아프노브 직접법 기반 설계법은 다음과 같이 서술할 수 있다.

• 리아프노브 직접법 기반 적응제어기 설계법: 미분 가능한 양한정 함수 $V(s,\tilde{w})$에 대하여 (9)을 만족시키며 $w$에 독립적인 (6)~(7)의 비선형 함수 $\mu(\,\cdot\,)$, $\alpha(\,\cdot\,)$를 설계한다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(s,\tilde{w}) &\equiv V_s^T\dot{s}+V_{\tilde{w}}^T\dot{\tilde{w}}\\ &=V_s^T\left[\hat{f}(x)+w^T\phi(x)+\mu(\,\cdot\,)-y_r^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-2}\lambda_i e^{(i+1)}\right]\\ &\quad -V_{\tilde{w}}^T\Gamma\alpha(\,\cdot\,)\\ &\le -W(s)\end{aligned} \tag{9}$$

여기서 $V_s$와 $V_{\tilde{w}}$는 각각 $s$, $\tilde{w}$에 대한 $V$의 편미분이며, $W(s)$는 설계절차에 따라 결정되는 양한정 함수이다. ■

상기 서술된 리아프노브 직접법 기반 설계의 첫번째 순서는 (9)을 만족시킬 수 있는 "리아프노브" 함수 $V(s,\tilde{w})$를 선정하는 것이다. 이는 일반적으로는 쉽지 않은 작업이지만, 본 예제의 경우, $V(s,\tilde{w})$를

$$V(s,\tilde{w})=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}\tilde{w}^T\Gamma^{-1}\tilde{w} \tag{10}$$

와 같이 선정하면, $W(s)=-ks^2$ $(k>0)$에 대해 (9)을 만족시키는 함수 $\mu(\,\cdot\,)$, $\alpha(\,\cdot\,)$을 (11), (12)와 같이 도출할 수 있다.

$$\mu(\,\cdot\,)=-ks-\hat{w}^T\phi(x)-\hat{f}(x)+y_r^{(n)}-\sum_{i=0}^{n-2}\lambda_i e^{(i+1)} \tag{11}$$

$$\alpha(\,\cdot\,)=\phi(x)s \tag{12}$$

이와 같이 제어법칙 (6)과 적응법칙 (7)을 결정하게 되면, (9)과 리아프노브 정리 [7, 정리 4.8]에 의하여 폐루프 시스템의 평형점 $(s,\tilde{w})=(0,w)$은 균등 안정(uniformly stable)하여 적응제어 시스템의 안정도가 보장된다. 또한, 전체 시스템이 안정하므로, 상태오차 $e$와 추정오차 $\tilde{w}$를 포함한 모든 신호는 유계(bounded)이며, 이를 통해 $\ddot{V}(e,\tilde{w})$의 유계성을 보인 후, Barbalat의 보조정리 [7, 정리 8.4]를 이용하면, $\dot{V}\to 0$, 즉 $s\to 0$임을 보일 수 있다. 즉, 본 예제의 경우, $y(t)$가 기준신호 $y_r(t)$에 점근적으로 수렴함이 수학적으로 증명된다. 또한, $\hat{w}(t)$의 경우, 다수의 문헌에서 영속 여기조건(persistent excitation condition)하에서 $w$로 수렴함을 증명하고 있다[1,4,5].

## III. 관련 연구동향

본 조사 논문에서 소개하는 리아프노브 직접법(direct method) 기반의 설계 방법은 모두 II 장에서 소개된 기본원리를 일반화된 시스템 및 불확실성에 대해 확장 · 변형한 것으로 여길 수 있으며, 구체적으로는 다음과 같이 분류할 수 있다.

### 1. 입력결합성분 처리방법

시스템 (1)~(3)의 $x_n$에 대한 동적 방정식 (2)는 입력결합성분(input coupling term) $g(x)$을 고려하여 (13)과 같이 확장할 수 있다.

$$\dot{x}_n=f(x)+g(x)u \tag{13}$$

이와 같이 $g(x)$가 고려된 적응제어 법칙의 설계법과 연구결과들은 다음과 같이 요약할 수 있다.

#### 1.1 $g(x)$를 완벽하게 알고 있는 경우

상대적으로 제어기 설계가 용이한 경우로, "$g(x)=1$"인 II 장의 예제도 이에 해당된다. 이 경우, [1,4,16,39] 등에서는 "모든 $x$에 대해 $g(x)\neq 0$"임을 가정하여 $g(x)$를 상쇄하였다. 한 예로 시스템 (1), (13), (3)의 경우, 기존 제어법

칙 (6) 대신 수정된 제어법칙 $u=\mu(\cdot)/g(x)$ 을 이용하면, 설계법 I의 "$\dot{V}(s,\tilde{w}) \le -ks^2$"를 만족시키는 적응제어 법칙을 II 장의 설계원리를 통해 쉽게 구할 수 있음을 알 수 있다. 그 외 [42-44,48-53]에서 소개된 적응제어 기법들에서는, 상기 "$g(x) \neq 0$" 가정 없이 최적/$H_\infty$ 제어 방법을 응용하여 입력결합성분을 처리하였으며, 여기서 제어입력 $u$는, 양한정 행렬 $R$과 가치함수(value function) $V(x)$에 대해 $u=-R^{-1}g^T(x)\nabla V(x)$ 의 형태로 주어져, $g(x)=0$인 지점에 대한 특이점 문제(singularity problem)가 발생하지 않는다는 장점이 있다.

1.2 $g(x)$에 불확실성이 존재하는 경우

본 경우는 일반적으로 II 장의 예제보다 복잡한 절차를 거쳐 적응제어 법칙이 유도된다. 미지의 상수 $b \in \mathbb{R}$에 대해 단순히 입력결합성분이 $g(x)=b$와 같이 표현되는 경우를 먼저 살펴보면, [1,28,30,37,40,41,45] 등에서는 "$b \neq 0$ 이며, $b$의 부호는 알고 있다"라는 가정 하에 여러 적응제어 법칙이 제안되었다. 이와 비슷하게 $g(x)$가 일반적인 Lipschitz 연속 함수로 주어진 경우를 고려한 [14,32-36]에서는 다음과 같은 공통적인 가정을 하고 있다.

가정 2: 양의 상수 $g_c$가 존재하여 $|g(x)| \ge g_c > 0$ 를 만족시키며, $g(x)$는 항상 양, 혹은 항상 음의 값을 갖는다. 또한, $g(x)$의 부호와 $g_c$는 알고 있다.

하지만, $b \neq 0$, 혹은 가정 2에 의해 $g(x) \neq 0$이라 하더라도, 적응법칙에 의해 변화하는 추정치 $\hat{b}$, 혹은 추정함수 $\hat{g}(x)$는 "0"이 될 수 있으며, 따라서 이를 제어법칙의 분모에 사용하게 되면, 상기 언급한 특이점가 발생할 수 있다. [13]에서는 상기 특이점 문제를 해결하기 위해 $g(x)$ 대신 $1/g(x)$을 추정하여 제어기를 구성하는 방법이 이용되었다. 더 나아가 [14]에서는 불확실성 $\Delta(x)$ 대신 $\Delta(x)/g(x)$를 고려한 수정된 리아프노브 함수를 이용하여 이를 해결하였다. 그 외 상기 특이점 문제를 해결하기 위한 방법으로 투영법(projection) [13], 슬라이딩 모드 제어(SMC: Sliding Mode Control) [13-17,28,30] 등을 이용하였으며, 최근 [48-50,54-56]에서는 가정 2를 만족시키지 않는 $g(x)$ 혹은 $b$에 대한 적응제어기 설계에 관한 연구가 최적 적응제어 관점에서 진행되었다.

2. 불확실성의 표현방법에 따른 분류

II 장의 예제에서는 불확실성 $\Delta$가 파라미터 $w$에 대한 선형결합 (5)로 나타내진다는 "가정 1" 하에 적응 제어기를 도출하였으며, 실제 [16,28,30,33,34,40,42-46] 등의 많은 적응제어기가 이러한 가정 하에 설계되었다. 하지만, 실제 상황에서 이러한 가정이 항상 만족되는 것은 아니며, 따라서 보다 완화된 조건에 대한 적응제어기의 연구가 요구된다. 이를 위해 [8,9]에서는, 불확실성 $\Delta$가 어떤 미지의 파라미터 $w$에 대해 선형결합 (5)가 아닌 비선형적인 결합으로 표현되는 경우에 대해서는 Immersion & Invariance (I & I) 접근법에 기반한 설계법을 제시하였다. 또한 보다 더 일반적으로 $\Delta$가 임의의 함수로만 주어지는 경우에는, [13-17,30,32, 35-37,39,41,47]에서와 같이 신경망(neural network)을 이용하여 이를 (14)와 같이 근사화하는 방법을 이용한다.

$$\Delta(x) = w^T\phi(x;v) + \varepsilon(x) \tag{14}$$

여기서 $w \in \mathbb{R}^{N_o}$는 각각 신경망 출력단(output layer)의 미지의 가중치 벡터, $v \in \mathbb{R}^{N_h}$는 신경망 은닉단(hidden layer)의 가중치들과 각 뉴런(neuron)과 연관된 값을 모아놓은 벡터, $\phi(\cdot)$는 활성함수(activation function)이다. $v$의 경우는 랜덤하게, 혹은 최적화 방법 등에 따라 미리 주어지거나, 혹은, 미지의 벡터로 보고 적응법칙을 통해 학습하게 된다. 또한, $\varepsilon(x)$는 $\Delta(x)$의 근사화 오차(approximation error)로, 일반 근사정리(universal approximation theorem) [10-12]에 의해 유계집합 위에서 임의의 작은 값 $\varepsilon_M > 0$에 대해 $|\varepsilon(x)| \le \varepsilon_M$가 성립한다. 이러한 배경 하에서, 신경망 기반 적응제어에 대한 연구들 [13,14,16,35,36,39,41]에서는 불확실성 $\Delta(x)$의 $w^T\phi(x;v)$에 대한 영향을 상쇄시켜 제어성능을 향상시킬 수 있는 "$w$에 대한 적응제어법칙"을 설계하였다. 또한, [15,17,32,37] 등에서는 불확실성 $w^T\phi(x;v)$을 더욱 효과적으로 상쇄시키기 위한 $v$에 대한 적응법칙을 고안하였다. 이러한 신경망 기반 적응제어 법칙의 설계 역시 리아프노브 직접법에 기반하지만, 그 구체적인 방법에 있어서는 $\varepsilon(x)$으로 인해 II 장의 설계 예와 차이가 있으며, 수렴성과 안정도 대신 모든 신호의 유계성과 균등 궁극 유계성(Uniform Ultimate Boundedness: UUB)에 초점을 맞춘 설계를 진행한다 (다음절 "강인 적응제어" 참조).

3. 강인 적응제어

초기 적응 제어기들은 외란/노이즈가 고려되지 않은 시스템을 대상으로 그 연구 및 설계가 진행되었다 (II 장 참조). 하지만, 실제 상황에서는 외란, 노이즈 및 설계 시 고려되지 않았던 불확실성이 존재할 수 있고, 또한 불확실성 $\Delta(x)$이 가정 1을 만족시키지 않는 경우, 본 III 장의 2절에서 설명한 바와 같이 신경망 근사화로 인한 근사오차 $\varepsilon(x)$가 발생한다. 이러한 "외란요소" (외란/노이즈) 와 "오차요소" (근사오차 $\varepsilon(x)$/고려되지 않은 불확실성)는 적응제어기의 안정성 및 수렴속도에 있어 문제를 야기시키며, 따라서 이를 해결하기 위한 1) 강인 적응법칙(robust adaptation law) [4,13-17]과 2) 우수한 강인성과 수렴속도를 지닌 SMC와 접목한 "적응 SMC (Adaptive SMC: ASMC) 기법" [13-17,21-31,33]이 적응제어 분야에서 활발히 연구되었다. 이러한 강인 적응제어 기법들을 설명하기 위해 본 논문에서는 비선형 시스템 (1), (15), (3)을 예시로 활용하기로 한다.

$$\dot{x}_n = \hat{f}(x) + w^T\phi(x;v) + u + \Xi(x,t) \tag{15}$$

(15)에서 기존 $f(x)$는 (4)와 (14)로 표현되었고, $\Xi(x,t)$는 외란 $d(t) \in \mathbb{R}$와 노이즈 $n(t) \in \mathbb{R}$, 근사오차 $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}$ 및 추가적인 불확실성 $\Delta_A(x) \in \mathbb{R}$에 대해

$$\Xi(x,t) := d(t) + n(t) + \varepsilon(x) + \Delta_A(x) \tag{16}$$

와 같이 정의되는 비구조적(unstructured) 불확실성이다. II 장의 가정 1은 (16)에 대한 $\varepsilon(x) \equiv 0$, $\phi(x;v) = \phi(x)$ 인 특수한 형태로 볼 수 있다.

가정 3: $\Xi(x,t)$ 는 유계함수이다. 즉, 어떤 알려진 상수 $c$에 대해 항상 $|\Xi(x,t)| \le c$ 를 만족한다.

현재까지 알려진 강인 적응제어 기법들은 대부분 가정 3을 만족시키는 $\Xi(x,t)$ 에 대해 설계를 진행하였으며, 그 설계절차는 주어진 리아프노브 함수 $V(s,\tilde{w})$ 의 시스템 (1), (15), (3)에 대한 미분

$$\begin{aligned}\dot{V}(s,\tilde{w}) &\equiv V_s^T\dot{s} + V_{\tilde{w}}^T\dot{\tilde{w}} \\ &= V_s^T\left[\hat{f}(x) + w^T\phi(x;v) + \overline{\mu} + \Xi(x,t) - y_r^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2}\lambda_i e^{(i+1)}\right] \\ &\quad - V_{\tilde{w}}^T\Gamma\overline{\alpha}(\cdot)\end{aligned}$$

에 대하여 다음과 같이 서술할 수 있다.

• 리아프노브 직접법 기반 강인 적응제어기 설계법: $w$와 $\Xi(x,t)$ 에 독립적이며, 조건 I 또는 II를 만족시키는

제어법칙 $u = \overline{\mu}(\cdot)$ 과 적응법칙 $\dot{\hat{w}} = -\Gamma\overline{\alpha}(\cdot)$

의 비선형 함수 $\overline{\mu}(\cdot)$ 와 $\overline{\alpha}(\cdot)$ 를 설계한다.

조건 I : $V(s,\tilde{w})$ 의 미분 $\dot{V}(s,\tilde{w})$ 이 (17)을 만족한다.

$$\dot{V}(s,\tilde{w}) \le -W_1(s) - W_2(\tilde{w}) + M \tag{17}$$

조건 II : 적응법칙 $\dot{\hat{w}} = -\Gamma\overline{\alpha}(\cdot)$ 이 $\hat{w}$의 유계성을 보장하며, $V(s,\tilde{w})$ 의 미분 $\dot{V}(s,\tilde{w})$ 이 (18)을 만족한다.

$$\dot{V}(s,\tilde{w}) \le -W_1(s) + M \tag{18}$$

여기서 $W_1(s)$, $W_2(\tilde{w})$ 는 각각 설계절차에 따라 결정되는 $s$와 $\tilde{w}$에 대한 양한정 함수이며, $M$은 양의 상수이다. ■

상기 강인 적응제어 설계법은 비구조적 불확실성 $\Xi(x,t)$ 의 존재로 인해 '0'이 아닌 값 $M$이 발생하게 되며, $M$값은 구속상수(bounding constant) $c$의 크기에 비례한다. 이러한 $M$의 존재로 인해, 강인 적응제어에서는 II 장의 조건 (9)와 같은 안정도와 수렴성 대신 주어진 신호의 유계성만이 증명된다. 조건 I의 경우, (17)과 확장된 리아프노브 정리 [7, 정리 4.18]를 이용하여 추종오차 $s(t)$ 와 추정오차 $\tilde{w}(t)$ 가 UUB임을 보일 수 있다. 또한, 조건 II의 $\hat{w}$의 경우, 적응법칙에 의해 그 유계성이 보장되며, (18)에 의해 추종오차 $s(t)$ 가 UUB임을 보일 수 있다. 여기서 어떤 신호 $\chi(t) \in \mathbb{R}^q$가 UUB라 함은, '0'을 포함하는 어떤 유계집합

$$\Omega := \{\chi \in \mathbb{R}^q : \|\chi\| \le C\}$$

안으로 $\chi(t)$ 가 유한시간 안에 수렴함을 의미하며, 상수 $C > 0$ 는 $M$에 비례하여 결정된다. 본 절에서 소개하는 강인 적응제어 설계 방법은 모두 상기 조건 I, II로 소개되는 기본원리를 확장 · 변형한 것으로 여길 수 있으며, 방법론적으로 다음과 같이 분류된다.

### 3.1 강인 적응법칙: 수정법과 투영법

상기 외란 및 오차요소에 의한 파라미터 추정치 $\hat{w}$의 발산을 방지하기 위한 방법으로 기존 설계된 적응법칙을 외란 및 오차요소에 대해 강인하게 만드는 방법이다. 크게 수정법(modification) [6,18,19]들과 투영법(projection) [6,20]으로 나뉘며, 시스템 (1), (15), (3)에 대한 설계 예로 설명하면 다음과 같다.

수정법의 대표적인 예로는 $\sigma$-수정법($\sigma$-modification) 과 $e$-수정법($e$-modification)이 있으며 [6,18], 이는 기존 시스템 (1)~(3)에 대해 설계된 적응법칙 (12)에 대해 다음을 만족시키는 적응법칙 $\dot{\hat{w}} = -\Gamma\overline{\alpha}(\cdot)$ 으로 설명할 수 있다.

$$\sigma\text{-수정법: } \overline{\alpha}(\cdot) = \alpha(\cdot) - \sigma(\hat{w} - w^0) \tag{19}$$

$$e\text{-수정법: } \overline{\alpha}(\cdot) = \alpha(\cdot) - \sigma|s|(\hat{w} - w^0) \tag{20}$$

여기서 $\sigma > 0$ 는 상수이며, $w_0$는 $w$에 대한 근사값이다. 이러한 수정법들의 $\sigma$-항은 모두 (17)의 $W_2(\tilde{w})$ 항을 형성하며, 상기 강인 적응제어 설계법의 조건 I을 만족시켜 추종오차 $s(t)$ 와 추정오차 $\tilde{w}(t)$ 가 UUB가 되도록 한다. 또한, $w^0 \approx w$ 일 때 그 오차가 가장 작다. [16,17,27,32,35-37,39,41]에서는 $\sigma$-수정법을 이용하여 비구조적 불확실성 $\Xi(x,t)$ 에 대한 강인 적응제어기를 설계하였고, $e$-수정법을 사용한 예로는 [15]와 같은 강인 적응제어 기법이 있다.

또한, (19), (20)의 $\sigma$-항 없이 $\hat{w}$의 유계성을 보장하는 대표적 방법인 "투영법"은 (21)과 같은 적응법칙으로 설명할 수 있다[6,20].

$$\overline{\alpha}(\cdot) = \mathrm{Proj}\{\alpha(\cdot)\} \tag{21}$$

여기서 $\mathrm{Proj}\{X\}$ 는 충분히 큰 $w_m > 0$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{Proj}\{X\} := \begin{cases} X & (\text{if } \|\hat{w}\| < w_m \text{ or } \|\hat{w}\| = w_m \text{ and } X \le 0) \\ X - \dfrac{\hat{w}\hat{w}^T X}{\|\hat{w}\|^2} & (\text{if } \|\hat{w}\| = w_m \text{ and } X > 0) \end{cases}$$

위와 같이 정의된 투영법에 기반한 적응법칙 (21)은 불확실성 파라미터 $w$와 초기 추정치 $\hat{w}(0)$가 모두 집합 $\Omega_w := \{\varpi \in \mathbb{R}^N : \|\varpi\| \le w_m\}$ 위에 있는 경우, 모든 $t \ge 0$ 에 대해 $\hat{w}(t) \in \Omega_w$가 되어 추정치 $\hat{w}$가 유계임이 증명되었다[6,20]. 또한, [13,14,25,29,47,52] 등에서는 이러한 투영법을 이용하는 강인 적응제어 시스템을 제안하였고, 이들은 조건 II와 같은 설계조건을 만족시키도록 설계되었다. 한편, 상기 방법들의 수렴성능을 동시적응(concurrent adaptation)과 최소자승법 등을 이용하여 개선한 $Q$-수정법($Q$-modification) 방법이 [19]에서 제안되었으며, 이는 아래와 같은 식으로 설명할 수 있다.

$$\overline{\alpha}(\cdot) = \mathrm{Proj}\{\alpha(\cdot) - kQ(t)\} \quad (k > 0)$$

여기서 $Q(t)$ 는 오차 동적방정식과 최소자승법에 의해 주어지는 항으로, 이를 통해 강인 적응제어 시스템의 수렴성능과 정확성을 높일 수 있다[19].

3.2 적응 슬라이딩 모드 제어

3.1절의 수정법 및 투영법이 적응법칙에 대한 강인화 방법이었다면, ASMC의 경우는 제어법칙에 대한 강인화 방안이다. 이는 강인 적응제어법칙 $u=\overline{\mu}(\cdot)$ 을 슬라이딩 평면 $s(t)$ 에 대해

$$\overline{\mu}(\cdot)=\mu(\cdot)-K\,\mathrm{sgn}(s(t)) \quad (K>0) \tag{22}$$

와 같이 설계하여, 이를 통해 접근법칙(reaching law)

$$\dot{s}=-K\,\mathrm{sgn}(s(t)) \tag{23}$$

을 유도하는 방법으로 설명할 수 있으며, 이를 통해 불확실성 $\Xi(x,t)$ 가 존재하는 상황에서도 상기 강인 적응제어기 설계법의 리아프노브 안정도 조건 (17) 혹은 (18)을 만족시키는 제어기 설계가 가능하다[1,13-17,21-31,33]. (22)에서 $\mu(\cdot)$ 는 (11)과 같은 기존 제어 법칙이며, 양의 상수 $K$는 불확실성 $\Xi$의 구속상수 $c$ (가정 3 참조)에 비례하여 결정되는 값이다. $\mathrm{sgn}(s)$ 는 부호함수로 $\mathrm{sgn}(s)=1$ $(s>0)$, $\mathrm{sgn}(s)=0$ $(s=0)$, $\mathrm{sgn}(s)=-1$ $(s<0)$와 같이 정의된다. SMC에서 슬라이딩 평면 $s(t)$ 는 일반적으로 동적 평면 (8)과 같이 정의한다. 또한 [24-28]에서와 같이 시스템의 오차 동역학(error dynamics)이나 모델 특성에 따라 삼각함수 혹은 특정 매트릭스와의 내적으로 $s(t)$ 를 정의하여 그 안정도와 제어성능 향상을 도모하기도 한다.

ASMC 제어기의 경우, $\Xi$와 같은 비구조적 불확실성에 대한 강인성을 확보하기 위한 $K\mathrm{sgn}(s)$ 항에 의해 채터링(chattering) 현상이라는 문제가 발생한다[1]. 이를 해소하기 위해 $\mathrm{sgn}(s)$ 함수를 $\mathrm{sat}(s/\rho)$ , $\tanh(s/\rho)$ (여기서 $\rho$는 경계영역(boundary layer)의 두께를 의미한다) 등과 같은 연속함수로 근사화하는 방법들이[1,16,22,27] 등에서 이용되었지만, 이는 제어기 수렴성능 저하를 필연적으로 수반하게 된다. 따라서 이를 보완하기 위한 방안으로 $\rho$를 불확실성의 크기에 따라 변화시켜 적절한 경계영역을 찾아 채터링 문제를 해소함과 동시에 그 성능을 최대로 유지시키는 형태의 ASMC 기법 연구가 진행되었다[1,21]. 한편, 채터링 현상을 완화시키기 위한 또 다른 연구로는 F-ASMC (Fuzzy ASMC)이 있다[13,29-31]. 이는, 기존 ASMC에 퍼지(fuzzy) 이론을 접목한 제어 이론으로, 퍼지 로직을 통해 SMC의 $\mathrm{sgn}(s)$ 등으로 인한 불연속 제어입력을 연속 제어입력으로 근사화하여 채터링 현상을 해소하는 방법이다.

또한 ASMC 제어기 (22)의 $K$ 값이 지나치게 클 경우 채터링 현상을 악화시키며, 반대로 $K$가 너무 작을 경우 불확실성 $\Xi$의 영향을 효과적으로 상쇄시키지 못하게 되어 수렴성능 및 안정도에 악영향을 미치게 된다. 따라서 ASMC의 $K$값의 선정은 보통 불확실성 $\Xi$의 크기를 나타내는 값 $c$ (가정 3 참조)에 따라 결정되거나, 혹은 신경망[13,16,27,30]의 사용 등에 따라 $c$값을 사전에 알기 어려운 경우, 적응법칙을 통해 적절한 $K$ 값이 결정되도록 설계된다[16].

4. 眞-궤환 시스템에 대한 적응제어

상기 II, III 장의 설계 예에서는 정합조건(matching condition)을 만족시키는 (1), (15), (3) (혹은 (1)~(3))과 같은 비선형 시스템을 대상으로 적응제어 법칙을 유도하였다. 하지만 진-궤환(strict-feedback) 시스템과 같이 비선형성 및 불확실성이 정합조건을 만족하지 않는 경우, 상기 II, III 장의 방법만으로 적응제어 법칙을 설계하기에는 한계가 있다. 이러한 시스템의 예로 비정합(unmatched) 성분인 비선형 함수 $h(x_1)$와 외란 $\delta(t)$, 노이즈 $\nu(t)$를 포함하는 다음과 같은 2차 진-궤환 시스템 (24), (25), (3)을 들 수 있다.

$$\dot{x}_1=\hat{h}(x_1)+\theta^T\psi(x_1;\vartheta)+x_2+\Sigma(x_1,t) \tag{24}$$

$$\dot{x}_2=\hat{f}(x)+w^T\phi(x;v)+u+\Xi(x,t) \tag{25}$$

(24)에서 $h(x_1)$는 (4)와 (14)로 표현된 (15)의 $f(x)$와 비슷하게 (26)과 같이 표현되었고, 비구조적 비정합 불확실성 $\Sigma(x,t)\in\mathbb{R}$는 (16)과 비슷하게 외란 $\delta(t)\in\mathbb{R}$, 노이즈 $\nu(t)\in\mathbb{R}$, 근사오차 $\epsilon(x)\in\mathbb{R}$에 대해 (27)과 같이 정의되었다.

$$h(x_1)=\hat{h}(x_1)+\theta^T\psi(x_1;\vartheta)+\epsilon(x_1) \tag{26}$$

$$\Sigma(x,t)=\epsilon(x)+\delta(t)+\nu(t) \tag{27}$$

여기서 $\Sigma(x,t)$ 는 어떤 $\sigma>0$ 에 대해 항상 $|\Sigma(x,t)|\le\sigma$ 를 만족시키는 유계의 함수로 가정한다 (가정 2 참조). 시스템 (24), (25), (3)은 $i=2$ 에 대한 비선형 시스템 (1), (15), (3)의 확장판으로 여길 수 있고, 본 장에서는 이러한 2차 진-궤환 비선형 시스템에 대한 다음과 같은 적응제어 법칙 설계 방법을 소개한다.

4.1 적응 백스테핑 제어

백스테핑(backstepping) 제어 기법은 비정합 성분을 다루기 위해 진-궤환 시스템 (24), (25), (3)에 대해 단계적으로 각 가상제어 입력 $(\overline{x}_2)$을 설계하여, 이를 통해 최종적으로 시스템을 안정화시키는 제어기 $u$를 도출하는 방법이다[32-34]. 이를 확장시킨 적응 백스테핑 제어는 상기 2차 진-궤환 비선형 시스템에 대한 추종문제($e=y-y_r$ 의 안정화)를 예로 들어 다음과 같이 설명할 수 있다.

- 1단계: 가상제어기 $\overline{x}_2(e,\hat{\theta})$ 설계

추종오차 $e=y-y_r$ 와 $\tilde{\theta}:=\hat{\theta}-\theta$ 로 정의되는 불확실성 추정오차에 대한 리아프노브 함수 $V_1(e,\tilde{\theta})$가 (24), (3)에 대한 $x_1$-가상제어 시스템

$$\dot{x}_1=\hat{h}(x_1)+\theta^T\psi(x_1;\vartheta)+\overline{x}_2+\Sigma(x_1,t)\ ,\ y=x_1$$

에 대해 $\dot{V}_1(e,\tilde{\theta})\equiv V_{1,e}^T\ (\dot{x}_1-\dot{y}_r)+V_{1,\tilde{\theta}}^T\ \dot{\hat{\theta}}$

$$\le -W_{11}(e)-W_{12}(\tilde{\theta})+M_1 \tag{28}$$

을 만족하도록 하는 가상 제어 입력 $\overline{x}_2(x_1,\hat{\theta},y_r)$와 적응법칙 $\dot{\hat{\theta}}(x_1,\overline{x}_2,\hat{\theta},y_r)$를 설계한다. 강인 적응제어기 설계법 조건 I의 (17)과 같이, (28)에서 $W_{11}(e)$와 $W_{12}(\tilde{\theta})$는 양한정 함수로 주어지며, $M_1>0$ 은 상수, $V_{1,e}$과 $V_{1,\tilde{\theta}}$는 각각 $e$와 $\tilde{\theta}$에 대한 $V_1$의 편미분이다.

- 2단계: 백스테핑

1단계에서 설계된 가상 제어기 $\overline{x}_2$와 상태변수 $x_2$와의

오차를 $e_2 := x_2 - \bar{x}_2$로 정의하고, (28)을 이용하여, $V_1$과 $e_2$, 추정오차 $\tilde{w}$에 의존하는 합성 리아프노브 함수

$$V_2(e, e_2, \tilde{\theta}, \tilde{w}) = V_1(e, \tilde{\theta}) + e_2^2/2 + \tilde{w}^T \Gamma \tilde{w} \quad (\Gamma > 0)$$

가 전체 비선형 시스템 (24), (25), (3)에 대해

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(e, e_2, \tilde{\theta}, \tilde{w}) \\
&\equiv V_{1,e}^T (\dot{x}_1 - \dot{y}_r) + V_{1,\tilde{\theta}}^T \dot{\hat{\theta}} + e_2(\dot{x}_2 - \dot{\bar{x}}_2) + \tilde{w}^T \Gamma \dot{\hat{w}} \\
&\le -W_{11}(e) - V_{1,e}^T e_2 - W_{12}(\tilde{\theta}) + M_1 + e_2(\dot{x}_2 - \dot{\bar{x}}_2) + \tilde{w}^T \Gamma \dot{\hat{w}} \\
&\le -W_{11}(e) - W_{21}(e_2) - W_{12}(\tilde{\theta}) - W_{22}(\tilde{w}) + M_1 + M_2 \quad (29)
\end{aligned}$$

를 만족시키는 제어법칙 $u(x_1, x_2, \hat{\theta}, \hat{w}, y_r)$과 두 번째 적응법칙 $\dot{\hat{w}}(x_1, x_2, \hat{\theta}, \hat{w}, y_r)$을 최종 도출한다. 1단계에서와 같이 $W_{21}(e_2)$와 $W_{w2}(\tilde{w})$는 양한정 함수로 주어지며, $M_2 > 0$는 상수이다. ■

상기 백스테핑 설계법은 리아프노브 관계식 (29)와 확장된 리아프노브 정리 [7, 정리 4.18]에 의해 추종오차 $e$와 가상제어 오차 $e_2$, 추정오차 $\tilde{\theta}$, $\tilde{w}$가 모두 UUB임을 보일 수 있으며, [22,32-37]에서와 같이 상기 적응 백스테핑 설계방법을 차수가 더 높은 임의의 $n$차 진-궤환 시스템에 대해 확장할 수 있다. 또한, 상기 설계법은 불확실성 $\Sigma$와 $\Xi$를 처리하기 위한 조건 I의 식 (17)과 같은 형태를 기준으로 제시되었다. 이는 투영법 등에 기반한 적응법칙을 사용하는 경우, 3.1절에서 설명한 바와 같이 (17)과 같은 형태를 띄는 (28), (29) 대신 조건 II의 (18)과 같은 형태를 띄는 리아프노브 관계식에 기반하여 적응 백스테핑 제어기 설계를 진행할 수 있다. 이러한 진-궤환 비선형 시스템에 대한 적응 백스테핑 제어기 설계는 다른 적응제어 방법과 마찬가지로 신경망 및 퍼지 등을 이용한 함수 근사화 방법 [32,35-37], SMC 기법 [33] 및 강인 적응법칙 [32,35-37]을 응용한 강인화 방법, 역최적 적응제어 방법 [42,43,45]등을 이용하여 설계를 진행하였으며, 진-궤환 시스템의 일반화된 형태인 순수-궤환(pure-feedback) 시스템 [36,37] 및 로봇 매니퓰레이터 [41], 이동로봇, 자율비행제어 등의 다양한 시스템으로 확장되어 그 연구가 진행되었다.

### 4.2 적응 동적표면 제어

상기 소개된 백스테핑 방법은 시스템의 차수가 증가할수록 가상 제어기의 수와 미분항이 증가하여 최종 설계된 제어기의 복잡성을 증가시키는 "explosion of complexity"라 불리는 단점을 지닌다[38]. 따라서 적응 백스테핑 방법의 상기 "explosion of complexity" 문제를 효과적으로 극복할 수 있는 동적표면(dynamic surface) 제어이론 [38]에 기반한 적응제어 기법이 [39-41]에서 제안되었다. 동적표면 제어는 백스테핑 기법의 각 단계에서 설계된 가상 제어기 ($\bar{x}_2$)를

$$\tau \dot{x}_{2f} + x_{2f} = \bar{x}_2, \quad (\tau > 0, x_{2f}(0) = \bar{x}_2(0))$$

와 같은 1차 저역필터를 통과 시킨 후, 최종 제어입력 $u$에서 $\bar{x}_2$ 대신 이에 대한 필터신호 $x_{2f}$를 사용하여, 가상 제어기의 미분항을 제거하여, 이를 통해 적응 백스테핑의 단점을 극복한다. 또한 리아프노브 분석에서는 가상제어 오차 $e_2 = x_2 - \bar{x}_2$ 대신 필터신호 $x_{2f}$에 대한 오차

$$e_{2f} = x_{2f} - x_2 \text{와 } \bar{e}_{2f} = x_{2f} - \bar{x}_2$$

에 대해 리아프노브 함수를

$$V_2(e, e_{2f}, \bar{e}_{2f}, \tilde{\theta}, \tilde{w}) = V_1(e, \tilde{\theta}) + e_{2f}^2/2 + \bar{e}_{2f}^2/2 + \tilde{w}^T \Gamma \tilde{w}$$

와 같이 정의하여 상기 백스테핑 단계와 유사한 절차를 통해 UUB 및 유계성을 보장할 수 있는 제어기 설계를 진행한다[39-41].

## 5. 최적/$H_\infty$ 적응제어

적응제어기의 제어성능을 향상시키기 위해 비선형 최적/$H_\infty$ 성능을 고려한 적응제어 설계방법이 현재까지 다양하게 연구되고 있다[42-57]. 최적 적응제어 설계에 있어서는 공통적으로 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 방정식 혹은 HJI (Hamilton-Jacobi-Isaac) 방정식의 해석적인 해법의 부재로 인해 어려움이 있으며, 따라서 이를 완화시키거나 극복하기 위한 적응 예측제어(predictive control) [57], 역최적(inverse optimal) 적응제어 방법[42-46], 적응 동적계획법(adaptive dynamic programming) 기반 설계[48-56] 등이 제안되었다.

### 5.1 역최적 적응제어 기법

적응제어 법칙이 특정 비용함수(cost function)에 대한 역최적해가 되도록 설계하는 방법이다. 주어진 비용함수에 대한 최적/$H_\infty$ 제어법칙을 도출하는 일반 설계와 달리, 역최적 적응제어에서는 설계된 적응제어 법칙에 따라 최소화되는 비용함수(cost function)가 결정된다. [42-44] 등에서는 (31)와 같은 시스템의 역최적 적응제어 방법에 대해 연구하였다.

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + w^T \Phi(x) + G(x) u \tag{31}$$

여기서 $\hat{f}(x) \in \mathbb{R}^n$와 $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$는 비선형 함수, $u \in \mathbb{R}^m$는 제어입력, $G(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$는 입력결합 행렬, $w \in \mathbb{R}^N$는 불확실성 파라미터이다. 이러한 시스템 (31)에 관한 연구에서는 모두 제어-리아프노브 함수(control Lyapunov function)를 이용하여 안정도와 역최적성 [42-44] (역최적 $H_\infty$ 성능 [42])이 보장된 제어법칙과 적응법칙을 유도하였다. [44]에서는 시스템 (31)에 대한 역최적 적응 추종제어 방법을 제시하였으며, 특히 [42,43,45]에서는 Z-엔진 압축 시스템[42], 위성/우주선의 자세제어[43], 미사일 자동제어 시스템[45] 등에 응용된 "진-궤환 시스템에 대한 역최적 적응 백스테핑 설계법"들을 제안하였다. 또한 [46,47]에서는, 오일러-라그랑지(Euler-Lagrange) 시스템의 보조 제어법칙을 역최적[46] 및 최적 적응제어[47] 관점에서 설계하였다.

### 5.2 적응 동적계획법 기반 최적 적응제어 기법

주어진 비용함수에 대한 최적/$H_\infty$ 적응제어 법칙을 도출하기 위한 적응 동적계획법 기반의 비선형 최적 적응제어 방법에 대한 연구가 최근 활발히 진행되고 있다[48-56]. 이는 상기 역최적 설계에서와 같은 비용함수 선정에 있어 발생되는 제약사항이 발생하지 않는다는 장점이 있다. 이들은

신경망 등을 통하여 주어진 "비용함수 및 제어입력에 대한 가치함수(value function)"와 "가치함수에 따라 주어지는 제어입력 함수"을 근사화하고, 이들에 대한 실시간 학습 또는 적응법칙을 통해 제어성능을 최적에 가깝도록 만드는 방법이다 [48-50]. 이러한 적응 동적계획법 방법 기반 최적 적응제어는 그 학습형태에 따라 비용함수와 제어입력함수를 교대로 학습하는 순차적 방법[50,54-56]과 두 함수를 동시에 연속적으로 학습하는 적응적 방법 [51-53]으로 나뉠수 있으며, 전자의 경우 순차적인 리아프노브 분석에 의해, 후자의 경우 [52,53] (강인) 적응제어 설계법과 비슷한 리아프노브 직접법에 기반하여 그 안정도와 수렴성, 신호의 UUB를 보일 수 있다. 이러한 결과 및 제어기의 성능은 학습 및 안정도 보장을 위한 영속여기조건 및 탐색문제(exploration issue)와 밀접한 관련이 있으며, 이를 포함한 이론적인 연구 [49,52-56] 및 응용연구 [49]가 현재 진행 중이다.

## REFERENCES


[1] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall New Jersey, 1991.

[2] K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1998.

[3] F. L. Lewis, *Optimal Estimation: with an Introduction to Stochastic Control Theory*, Wiley New York et al., 1986.

[4] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons NY, 1995.

[5] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall, Inc., 1989.

[6] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc., 1989.

[7] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice hall Upper Saddle River, 2002.

[8] X. Liu, R. Ortega, H. Su, and J. Chu, "Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 55, no. 9, pp. 2209-2214, 2010.

[9] A. Astolfi and R. Ortega, "Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of non-linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, no. 4, pp. 590-606, 2003.

[10] K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural Netw.*, vol. 2, no. 5, pp. 359-366, 1989.

[11] J. Park and I. W. Sandberg, "Universal approximation using radial-basis-function networks," *Neural Comput.*, vol. 3, no.2, pp. 246-257, 1991.

[12] J. Zhang, G. G. Walter, Y. Miao, W. N. W. Lee, "Wavelet neural networks for function learning," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 6, pp. 1485-1497, 1995.

[13] J. T. Spooner and K. M. Passino, "Stable adaptive control using fuzzy systems and neural networks," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 3, pp. 339-359, 1996.

[14] T. Zhang, S. S. Ge, and C. C. Hang, "Stable adaptive control for a class of nonlinear systems using a modified Lyapunov function," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 1, pp. 129-132, 2000.

[15] A. Yesidirek and F. L. Lewis, "Feedback linearization using neural networks," *Automatica*, vol. 31, no. 11, pp. 1659-1664, 1995.

[16] M. M. Polycarpou, "Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 447-451, 1996.

[17] M. M. Polycarpou and M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators," *Int. J. Control*, vol. 70, no. 3, pp. 363-384, 1998.

[18] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, "A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, pp. 134.145, Feb. 1987.

[19] K. Y. Volyanskyy, W. M. Haddad, and A. J. Calise, "A new neuroadaptive control architecture for nonlinear uncertain dynamical systems: beyond $\sigma$- and $e$ -modifications," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 20, no. 11, pp. 1707-1723, 2009.

[20] S. M. Naik, P. R. Kumar, and B. E. Ydstie, "Robust continuous-time adaptive control by parameter projection," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 2, pp. 182-197, 1992.

[21] J.-J. E Slotine and J. A. Coetsee, "Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems," *Int. J. Control*, vol. 43, no. 6, pp. 1631-1635, 1986.

[22] B. Yao and M. Tomizuka, "Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form," *Automatica*, vol. 33, no. 5, pp. 893-900, 1997.

[23] B. Yao, F. Bu, and G. T. C. Chiu, "Non-linear adaptive robust control of electro-hydraulic systems driven by double-rod actuators," *Int. J. Control*, vol. 74, no. 8, pp. 761-775, 2001.

[24] H. Xu, M. D. Mirmirani, and P. A. Ioannou, "Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle," *J. Guid., Control, Dyn.*, vol. 27, no. 5, pp. 829-838, 2004.

[25] L. Fiorentini, A. Serrani, M. A. Bolender, and D. B. Doman, "Nonlinear robust adaptive control of flexible air-breathing hypersonic vehicles," *J. Guid., Control, Dyn.*, vol. 32, no. 2, pp. 402-417, 2009.

[26] D. Lee, H. J. Kim, and S. Sastry, "Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter," *Int. J. Control, Autom., Syst. (IJCAS)*, vol. 7, no. 3, pp. 419-428, 2009.

[27] B. S. Park, S. J. Yoo, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Adaptive neural sliding mode control of nonholonomic wheeled mobile robots with model uncertainty," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 17, no. 1, pp. 207-214, 2009.

[28] M. Zeinali and L. Notash, "Adaptive sliding mode control with uncertainty estimator for robot manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, no. 1, pp. 80-90, 2010.

[29] S. Tong and H.-X. Li, "Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 3, pp. 354-360, 2003.

[30] M. Zeinali and L. Notash, "Robust adaptive neural fuzzy controller with model uncertainty estimator for manipulators," *Special Ed., CSME Trans.*, vol. 28, no. 2A, pp. 197-219, 2004.

[31] B. Yoo, and W. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 6, no. 2, pp. 315-321, 1998.

[32] T. Zhang, S. S. Ge, and C. C. Hang, "Adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems using backstepping design," *Automatica*, vol. 36, no. 12, pp. 1835-1846, 2000.

[33] A. J. Koshkouei and A. S. I. Zinober, "Adaptive backstepping control of nonlinear systems with unmatched uncertainty," *Proc. of IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 4765-4770, 2000.

[34] I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, and A. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 11, pp. 1241-1253, 1991.

[35] H. Du, H. Shao, and P. Yao, "Adaptive neural network control for a class of low-triangularstructured nonlinear systems," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 17, no. 2, pp. 509-514, 2006.

[36] C. Wang, D. J. Hill, S. S. Ge, and G. Chen, "An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 42, no. 5, pp. 723-731, 2006.

[37] D. Wang and J. Huang, "Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form," *Automatica*, vol. 38, no. 8, pp. 1365-1372, 2002.

[38] D. Swaroop, J. C. Cerdes, P. P. Yip, and J. K. Hedrick, "Dynamic surface control of nonlinear systems," *Proc. of Am. Control Conf.*, pp. 3028-3036, 1997.

[39] D. Wang and J. Huang, "Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 16, no. 1, pp. 195-202, 2005.

[40] S. J. Yoo, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Adaptive dynamic surface control for stabilization of parametric strict-feedback nonlinear systems with unknown time delays," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 52, no. 12, pp. 2360-2365, 2007.

[41] S. J. Yoo, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Adaptive dynamic surface control of flexible-joint robots using self-recurrent wavelet neural networks," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B, Cybern.*, vol. 36, no. 6, pp. 1342-1355, 2006.

[42] J. L. Fausz, V.-S. Chellaboina, and W. Haddad, "Inverse optimal adaptive control for nonlinear uncertain systems with exogenous disturbances," *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, vol. 14, no. 1, pp. 1-38, 2000.

[43] W. Luo, Y. Chu, and K. Ling, "Inverse optimal adaptive control for attitude tracking of spacecraft," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 11, pp. 1639-1654, Nov. 2005.

[44] Z. Li and M. Krstic, "Optimal design of adaptive tracking controllers for nonlinear systems," *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 1459-1473, 1997.

[45] L. Sonneveldt, E. Van Oort, Q. P. Chu, and J. A. Mulder, "Comparison of inverse optimal and tuning functions designs for adaptive missile control," *J. Guid., Control, Dyn.*, vol. 31, no. 4, pp. 1176-1182, 2008.

[46] K. Dupree, P. M. Patre, M. Johnson, and W. E. Dixon, "Inverse optimal adaptive control of a nonlinear Euler-Lagrange system, part I: full state feedback," *Proc. of IEEE Conf. Decis. Control Held Jointly with Chinese Control Conference*, pp. 321-326, 2009.

[47] K. Dupree, P. M. Patre, Z. D. Wilcox, and W. E. Dixon, "Asymptotic optimal control of uncertain nonlinear Euler-Lagrange system," *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 99-107, 2011.

[48] F.-Y. Wang, H. Zhang, and D. Liu, "Adaptive dynamic programming: an introduction," *IEEE Comput. Intell. Mag.*, vol. 4, no. 2, pp. 39-47, 2009.

[49] F. L. Lewis and D. Liu, *Reinforcement Learning and Approximate Dynamic Programming for Feedback Control*, IEEE Press, John Wiley & Sons, 2013,

[50] F. L. Lewis and D. Vrabie, "Reinforcement learning and adaptive dynamic programming for feedback control," *IEEE Circuits Syst. Mag.*, vol. 9, no. 3, pp. 32-50, 2009.

[51] T. Hanselmann, L. Noakes, and A. Zaknich, Continuous-time Adaptive Critics, *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 18, no. 3, pp. 631-647, 2007.

[52] S. Bhasin, R. Kamalapurkar, M. Johnson, K. G. Vamvoudakis, F. L. Lewis, and W. E. Dixon, "A novel actor-critic-identifier architecture for approximate optimal control of uncertain nonlinear systems," *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 82-92, 2013.

[53] K. G. Vamvoudakis, D. Vrabie, and F. L. Lewis, "Online adaptive algorithm for optimal control with integral reinforcement learning," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2013.
[54] J. Y. Lee, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Integral Q-learning and explorized policy iteration for adaptive optimal control of continuous-time linear systems," *Automatica*, vol. 48, no. 11, pp. 2850-2859, 2012.
[55] J. Y. Lee, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Integral reinforcement learning with explorations for continuous-time nonlinear systems," *Proc. of Int. Jt. Conf. Neural Netw. (IJCNN)*, pp. 1042-1047, 2012.
[56] J.-H. Kim and F. L. Lewis, "Model-free $H_\infty$ control design for unknown linear discrete-time systems via Q-learning with LMI," *Automatica*, vol. 46, no. 8, pp. 1320-1326, 2010.
[57] K. K. Tan, T. H. Lee, S. N. Huang, and F. M. Leu, "Adaptive predictive control of a class of SISO nonlinear systems," *Dynamics and Control*, vol. 11, no. 2, pp. 151-174, 2001.

**박 진 배**

1977년 연세대학교 전기공학과(공학사). 1985년 Kansas 주립대학교 전기공학과(공학석사). 1990년 Kansas 주립대학교 전기공학과(공학박사). 1992년~현재 연세대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인 제어, 필터, 비선형 제어, 로보틱스, 퍼지이론, 신경망 회로 이론. 2006년~2010년 국제저널 International Journal of Control, Automation, and Systems (IJCAS)의 Editor-in-Chief 역임. 2013년 제어 · 로봇 · 시스템학회 회장 역임.

**이 재 영**

2006년 광운대학교 정보제어공학과(공학사), 2007년~현재 연세대학교 전기전자공학과 박사과정. 관심분야는 적응형 최적제어, 강화학습, 근사 동적 계획법, 비선형 제어, 다개체 시스템, 로봇 제어, 무인 자동차 및 전력 시스템 응용.