한국초등수학교육학회지 18(1) 105-122. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 18(1) 105-122.
2014. 04. 30 April 30. 2014.

우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정 분석

박교식[1]

본 논문에서는 분수 나눗셈 알고리즘 지도 방법 개선을 위한 기초 작업의 일환으로, 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정을 분석한다. 교과서에서는 간접적인 방법으로 분수 나눗셈식을 분수 곱셈식으로 변환시켜 알고리즘을 정당화하고 있다. 그 방법으로 추이성을 이용하는 것, 수 막대나 직사각형 모델을 이용하는 것의 두 가지가 있다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학 교과서 ≪5-2≫, ≪6-1≫에서 분수 나눗셈 알고리즘은 외형상 6개이다. 그 중 4개는 형태상 제수의 역수를 곱하는 표준 알고리즘이다. 본 논문에서는 이러한 분석 결과를 바탕으로 다음의 세 가지 제언을 결론으로 제시한다. 첫째, 초등학교 5학년에서 역수라는 용어의 사용을 전향적으로 고려할 필요가 있다. 둘째, 비표준 알고리즘을 표준 알고리즘 형태로 도입하는 것을 고려할 필요가 있다. 셋째, 차후의 교육과정에서 분모가 1인 분수의 취급에 관해 논의할 필요가 있다.

주제어: 분수 나눗셈 알고리즘, 분수 나눗셈의 의미, 역수, 표준 알고리즘

Ⅰ. 서 론

본 논문에서는 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘이 세분화되어 지도되고 있는 상황을 개선하기 위한 기초 작업의 일환으로 현재 우리나라 초등학교 수학 교과서에서 분수 나눗셈 알고리즘을 어떻게 정당화하고 있는지 그 과정을 분석한다. 분수 나눗셈의 지도에서는 먼저 분수 나눗셈으로 나타내어지는 상황(이하, 분수 나눗셈 상황)을 이해시키는 것에 초점을 맞춘다. 분수 나눗셈 상황을 이해한다면, 예를 들어 “길이가 $2\frac{3}{5}$m인 끈을 $\frac{2}{3}$m씩 자르면 몇 도막이 생기는가?”와 같은 문제에서, 몇 도막이 생기는지를 구하기 위한 분수 나눗셈식 $2\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}$를 만들 수 있다. 이렇게 분수 나눗셈식을 만들면, 그 다음으로는 이러한 분수 나눗셈식을 실제로 계산하는 것에 초점을 맞춘다. 이러한 계산을 위해, 예를 들어 $2\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}$를 $2\frac{3}{5}\times 3/2$으로 바꾸어 계산할 수 있게 해 주는 분수 나눗셈 알고리즘을 사용한다.

이렇게 보면 분수 나눗셈의 지도는 분수 나눗셈 상황을 분수 나눗셈식으로 나타낼 수 있도록 지도하는 것(이하, 분수 나눗셈식 만들기 지도)과 분수 나눗셈 알고리즘을 사용하여 분수 나눗셈식을 계산할 수 있도록 지도하는 것(이하, 분수 나눗셈 알고리즘 사용 지도)의 두 과정으로 이루어진다고 할 수 있다. 본 논문에서는 후자에 초점을 맞추는 바,

---

1) 경인교육대학교 수학교육과

2007 개정 교육과정에 따른 수학 교과서 ≪5-2≫, ≪6-1≫(이하, 간단히 각각 ≪5-2≫, ≪6-1≫)에서 분수 나눗셈 알고리즘을 정당화하는 과정을 분석한다. 본 논문에서는 이러한 분석을 위해 분수 나눗셈에서 피제수에 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 표준 알고리즘으로, 그 이외의 알고리즘은 비표준 알고리즘으로 분류한다. 본 논문에서 2007 개정 교육과정은 2006년에 고시된 수학과 교육과정을 의미한다.[2)]

분수 나눗셈을 하기 위한 표준 알고리즘 또는 비표준 알고리즘의 지도와 관련한 다양한 연구가 있다(Ott, Snook, Gibson, 1991; Ma, 1999/2002; Tirosh, 2000; 박만구, 2002; Flores, 2002; Siebert, 2002; Sinicrope, Mick, Kolb, 2002; 전평국, 박혜경, 2003; 강문봉, 2004; 백선수, 2004; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 임재훈, 2007; Li, 2008; Peck, Wood, 2008; 김명운, 장경윤, 2009; 김민경, 2009; 방정숙, 이지영, 2009; 이용률, 2010; Cengiz, Rathouz, 2011; 片桐重男, 2012; Tyminski, Dogbey, 2012; 조용진, 홍갑주, 2013; 신준식, 2013; Dixon, Tobias, 2013). 이러한 연구에서는 분수 나눗셈의 의미를 밝히거나, 분수 나눗셈을 하기 위한 표준 알고리즘의 정당화 과정의 설명이 어렵거나 미흡하다는 것을 지적한다. 또, 분수 나눗셈에서 피제수에 제수의 역수를 곱하는 표준 알고리즘에 한정하지 말거나, 나눗셈 상황으로부터 나타나는 자연스런 비표준 알고리즘을 도입하거나, (표준 및 비표준) 알고리즘의 정당화를 위한 다양한 방법을 제시하고 있다. 이 중에는 알고리즘의 정당화라는 관점에서 ≪5-2≫, ≪6-1≫의 재구성을 제안하는 연구도 있다(신준식, 2013; 조용진, 홍갑주, 2013). 그러나 이러한 연구들은 우리나라 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정을 분석하는 본 논문과 직접적인 관련이 없다.

본 논문에서는 문헌 연구 방법을 사용하는 바, 주된 분석 대상 문헌은 2007 개정 교육과정에 따른 ≪5-2≫, ≪6-1≫과 ≪5-2(지도서)≫, ≪6-1(지도서)≫이다. 본 논문에서는 제수가 자연수일 때의 분수 나눗셈 알고리즘 지도 내용과 제수가 분수일 때의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정을 각각 분석한다. 그리고 ≪5-2≫, ≪6-1≫에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정에서 드러나는 논리적인 문제점을 제기하고, 그것의 해소를 위한 의견을 제시한다.

Ⅱ. 제수가 자연수인 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정의 분석

본 절에서는 제수가 자연수인 경우에 분수 나눗셈 알고리즘을 정당화하는 과정을 분석한다. 제수가 자연수인 경우의 분수 나눗셈은 현재 ≪5-2≫에서 취급하는 바, 그것은 (자연수)÷(자연수)와 (분수)÷(자연수)로 구분할 수 있다. ≪5-2(지도서), p.115≫에 따르면, 5학년에서는 분수 나눗셈을 5차시로 나누어 점진적으로 지도한다.[3)] 1차시에서는 1÷(자연수), 2차시에서는 (자연수)÷(자연수)와 같이 피제수가 자연수인 경우를 취급한다. 이 두 가지는 형태상 분수 나눗셈이 아니지만, 몫이 분수로 표현된다는 점에서 분수 나눗셈으로 간주한다. 또, 3차시에서는 (진분수)÷(자연수), 4차시에서는 (가분수)÷(자연수), 5차시에서

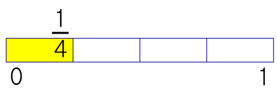
2) 교육과정 해설서(교육과학기술부, 2008)에서는 2006년에 고시된 수학과 교육과정을 '2006년 개정 교육과정'이라 하고 있다. 본 논문에서는 이것을 '2007 개정 교육과정'이라 하고 있다. 이것은 2007년에 개정된 교육과정 총론에 따른 수학과 교육과정으로, 실제로는 2006년에 고시되었다.
3) 이때의 차시는 분수 나눗셈 알고리즘 지도 내용에만 초점을 맞춘 것으로, 분수 나눗셈의 응용 등에 관한 것은 포함되지 않았다.

는 (대분수)÷(자연수)와 같이 피제수가 분수인 경우를 취급한다.

1. (자연수)÷(자연수)

가. (자연수)÷(자연수)의 지도 과정

1차시에서는 1÷(자연수)를 취급하는 바, 제수는 2 이상인 자연수이다. 먼저 1÷4의 의미를 등분제의 맥락에서 '1을 4등분한 한 몫'으로 도입한다. 이때 [그림 1]과 같이 길이가 1인 수 막대를 사용하는 바, 색칠한 부분이 1을 4등분한 한 몫을 나타낸다(≪5-2(지도서), p.119≫). 이것을 분수 $\frac{1}{4}$로 나타낼 수 있으므로, 결국 $1\div4=\frac{1}{4}$로 나타낼 수 있다. 이 $\frac{1}{4}$은 1÷4의 의미로부터 얻은 것이다.



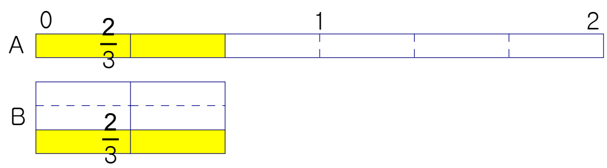
[그림 1] 1÷4의 의미

다음으로 1÷4를 계산하는 과정을 설명하면서 알고리즘을 정당화한다. 위에서 $1\div4=\frac{1}{4}$임을 알았다. 그런데 $\frac{1}{4}=1\times\frac{1}{4}$이므로 1÷4를 $1\times\frac{1}{4}$로 바꾸어 계산할 수 있다. 즉, $1\div4=1\times\frac{1}{4}$이다. 이 예를 통해 1÷(자연수)=1×(자연수의 역수)라는 알고리즘을 얻는다. 하지만 초등학교 수학에서 역수라는 용어를 사용하지 않으므로, ≪5-2(지도서), p.119≫에서는 이 알고리즘을

$$1\div(\text{자연수})=1\times\frac{1}{(\text{자연수})} \quad \cdots\cdots \ (\text{알고리즘 } 1)$$

과 같이 표현한다. 알고리즘 1은 형태상 표준 알고리즘으로 분류할 수 있다.

2차시에서는 (자연수)÷(자연수)를 취급하는 바, 피제수와 제수가 모두 2 이상인 자연수이고, 피제수가 제수보다 작다. 피제수가 제수보다 큰 경우, 예를 들어 4÷3과 같은 것은 취급하지 않고 있다. 먼저 2÷3의 의미를 등분제의 맥락에서 '2를 3등분한 한 몫'으로 도입한다. 이때 [그림 2]와 같이 길이가 2인 수 막대(A)와 단위정사각형을 가로 방향으로 2개 붙인 직사각형(B)을 사용하는 바, 색칠한 부분이 2를 3등분한 한 몫을 나타낸다(≪5-2(지도서), pp.120-121≫). 이것을 분수 $\frac{2}{3}$로 나타낼 수 있다. 따라서 $2\div3=\frac{2}{3}$와 같이 나타낼 수 있다. 이 $\frac{2}{3}$는 2÷3의 의미로부터 얻은 것이다.



[그림 2] 2÷3의 의미

다음으로 2÷3을 계산하는 과정을 설명하고 알고리즘을 정당화한다. 위에서 $2\div3=\frac{2}{3}$임을 알았다. 그런데 $\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3}$이므로 2÷3을 $2\times\frac{1}{3}$로 바꾸어 계산할 수 있다. 즉, $2\div3=2\times\frac{1}{3}$이다. 이 예를 통해 (자연수)÷(자연수)=(자연수)×(자연수의 역수)라는 알고리즘을 정당

화하고 있다. 하지만 초등학교 수학에서 역수라는 용어를 사용하지 않으므로, ≪5-2(지도서), p.121≫에서는 이 알고리즘을

$$(\text{자연수})\div(\text{자연수})=(\text{자연수})\times\frac{1}{(\text{자연수})} \quad \cdots\cdots \ (\text{알고리즘 2})$$

와 같이 표현한다. 알고리즘 2는 알고리즘 1을 포괄하며, 형태상 표준 알고리즘으로 분류할 수 있다.

≪5-2≫에서는 (자연수)÷(자연수)의 경우, 제수가 1이 아니고 (피제수)<(제수)일 때, 모델(수 막대 모델, 직사각형 모델)을 사용하여 알고리즘 1, 2로 이끌고 있다.

나. (자연수)÷(자연수)의 계산

여기서는 ≪5-2≫에서 (자연수)÷(자연수)를 곱셈으로 바꾸는 과정에 관해 논의한다. ≪5-2≫에서는 1÷4, 2÷3을 각각 1×¼, 2×⅓과 같이 곱셈으로 바꾸어 계산하게 하는 알고리즘 1, 2에 초점을 맞추고 있다. 이때 일차적으로 나눗셈의 의미에 바탕을 두어 각각 1÷4=¼, 2÷3=⅔와 같이 분수로 나타낸다. 그 다음에 각각 ¼=1×¼, ⅔=2×⅓이라는 사실에서 1÷4=1×¼, 2÷3=2×⅓이라고 정당화한다. 그러나 1÷4=1×¼, 2÷3=2×⅓임을 직접적으로 설명하는 것은 아니다. 교과서의 정당화 과정을 다음과 같이 표현할 수 있다. a, $b(a<b)$가 자연수일 때

$$a\div b=\frac{a}{b}\text{이고, }\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}\text{이므로 }a\div b=a\times\frac{1}{b} \quad \cdots\cdots \ (\text{방법 1})$$

교과서에서는 몇 개의 예를 사용하여 방법 1을 귀납하게 하며, 결국 일반적으로 a, b가 자연수일 때

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

로 계산하게 한다.

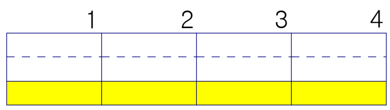
방법 1을 사용하기 위하여 ≪5-2≫에서는 먼저 나눗셈의 의미에 따른 모델을 사용하여 1÷4=¼, 2÷3=⅔임을 알게 하고 있다. 그러나 이 과정에는 비약이 있다. 등분제 맥락을 이용하기 위해 1÷4는 [그림 1]과 같이, 2÷3은 [그림 2]와 같이 나타낼 수 있지만, 이들이 곧바로 1÷4=¼, 2÷3=⅔임을 말해 주는 것은 아니다. [그림 1]과 [그림 2]를 해석하는 첫째 방식은 각각 [그림 1]에서는 ¼이 1개, [그림 2]에서는 ⅓이 2개 있다고 보는 것이다. 이렇게 해서 각각 1÷4=¼, 2÷3=⅓+⅓=⅓×2=⅔라고 정당화할 수 있다. 비록 이 첫째 방식이 1÷4와 2÷3을 각각 분수 ¼, ⅔로 나타내는 것을 보여주기는 하지만, 각각 알고리즘 1, 2로 연결되지는 않는다.

[그림 1], [그림 2]를 각각 알고리즘 1, 2와 연결하기 위해 [그림 1]과 [그림 2]를 해석하는 둘째 방식을 생각해 볼 수 있다. 이 방식은 ≪5-1≫에서 이미 학습한 분수의 곱셈을 이용하는 것이다. 그러나 ≪5-2≫에서는 이 방식을 채택하고 있지 않다. 이 방식에 따르면, [그림 1]은 1의 ¼ 즉, 1×¼을 뜻하며 [그림 2]는 2의 ⅓ 즉, 2×⅓을 뜻한다. 따라서 1÷4, 2÷3은 각각 [그림 1]과 [그림 2]를 매개로 하여 1×¼, 2×⅓로 표현된다. 이렇게 해서 각각 1÷4=1×¼=¼, 2÷3=2×⅓=⅔와 같이 계산할 수 있다. 이 방법은 1÷4=1×¼, 2÷3=2×⅓임을 모델을 이용하여 간접적으로 설명하는 것이다. 이 과정을 다음과 같이 표현할 수 있다. a, b가 자연수일 때

$$a\div b\text{를 모델로 표현, 그 모델을 }a\times\frac{1}{b}\text{로 해석. 따라서 }a\div b=a\times\frac{1}{b} \quad \cdots\cdots \ (\text{방법 2})$$

방법 1과 방법 2의 차이는, 예를 들어 $2\div3$에 대해 $2\div3=\frac{2}{3}$임을 먼저 알아야 하는가의 여부이다. 방법 1에서는 그것이 먼저 알아야 하는 것이지만, 방법 2에서는 그것이 구해야 하는 것이다. $2\div3=2\times\frac{1}{3}$이라는 알고리즘을 도입하는 것은, 그렇게 해서 최종적으로 $2\div3=\frac{2}{3}$로 계산하게 하기 위한 것이다. 따라서 이렇게 보면 방법 1에서는 주객이 전도되어 있다고 할 수 있다.

방법 2는 방법 1의 불완전함을 해소할 뿐만 아니라, 알고리즘 1과 2를 자연스럽게 정당화한다. 방법 2를 사용하면, 피제수 a가 제수 b로 나누어떨어지는 경우에는 자연수의 나눗셈으로 환원되므로, 자연수 a, b에 어떤 제한을 둘 필요가 없다. 피제수가 제수보다 큰 경우에도 이러한 방식을 사용할 수 있다. 예를 들어 $4\div3$은 등분제의 맥락에서 4를 3등분한 한 몫이므로 [그림 3]과 같이 나타낼 수 있다. 그런데 분수의 곱셈으로 보면 [그림 3]은 4의 $\frac{1}{3}$ 즉, $4\times\frac{1}{3}$을 뜻한다. 따라서 $4\div3=4\times\frac{1}{3}=4/3$이다.

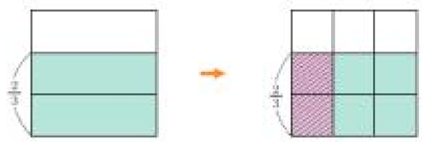


[그림 3] 4÷3의 의미

2. (분수)÷(자연수)

가. (분수)÷(자연수)의 지도 과정

3차시에서는 (진분수)÷(자연수)를 취급하는 바, 제수는 2 이상인 자연수이다. 먼저 $\frac{2}{3}\div3$의 의미를 등분제의 맥락에서 '$\frac{2}{3}$를 3등분한 한 몫'으로 도입한다. 이때 [그림 4]와 같이 단위정사각형을 사용하는 바, 가로 방향으로 3등분한 두 몫을 $\frac{2}{3}$로 나타낸 다음, 그것을 다시 세로 방향으로 3등분해서 전체를 9등분한다. 그러면 빗금친 부분은 전체를 9등분한 두 몫을 나타내며, 그것을 분수 2/9로 나타낼 수 있다. 따라서 $\frac{2}{3}\div3=2/9$와 같이 나타낼 수 있다. 이 2/9는 $\frac{2}{3}\div3$의 의미로부터 얻은 것이다.



[그림 4] $\frac{2}{3}\div3$(≪5-2≫ 교과서, p.20)

다음으로 $\frac{2}{3}\div3$을 계산하는 과정을 설명하고 알고리즘을 정당화한다. 등분제 맥락을 이용하기 위해 $\frac{2}{3}\div3$을 [그림 4]의 오른쪽과 같이 나타낸 다음, 빗금친 부분이 $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{3}$이고, 그것은 ≪5-1≫에서 이미 학습한 분수의 곱셈을 이용하면 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$이 된다는 것에서 $\frac{2}{3}\div3=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$이라고 정당화한다(≪5-2(지도서), p.122≫). 한편, $\frac{4}{5}\div3$의 계산에서 분모 $\frac{4}{5}$의 분모 5에 3을 곱하게 하여 $\frac{4}{5}\div3=4/(5\times3)$라고 정당화하고 있지만, 여기서 왜 분모 5에 3을 곱하는지 충분히 설명하지 않고 있다.

이 두 예를 통해 각각 (진분수)÷(자연수)=(진분수)×(자연수의 역수), (진분수)÷(자연

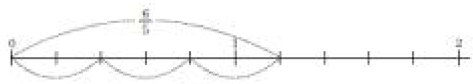
수)=(진분수)/(피제수의 분모×자연수)라는 알고리즘을 정당화하고 있다. ≪5-2(지도서), pp.122-123≫에서는 이 알고리즘을 각각

$$(\text{진분수})\div(\text{자연수})=(\text{진분수})\times\frac{1}{(\text{자연수})} \quad \cdots\cdots \ (\text{알고리즘 3})$$

$$\frac{\triangle}{\square}\div☆=\frac{\triangle}{\square\times☆} \quad \cdots\cdots \ (\text{알고리즘 4})$$

와 같이 표현한다. 알고리즘 3은 형태상 표준 알고리즘으로 분류할 수 있다. 알고리즘 4는 알고리즘 3을 간단히 한 형태이지만, 형태상 표준 알고리즘으로 볼 수 없다.

4차시에서는 (가분수)÷(자연수)를 취급하는 바, 제수는 2 이상의 자연수이다. 먼저 6/5÷3의 의미를 등분제의 맥락에서 '6/5을 3등분한 한 몫'으로 도입한다. 이때 [그림 5]와 같이 수직선을 사용하는 바, 6/5을 3등분한 한 몫은 ⅖이다. 따라서 6/5÷3=⅖와 같이 나타낼 수 있다. 이 ⅖는 6/5÷3의 의미로부터 얻은 것이다. 이때 피제수의 분자 6은 제수 3으로 나누어떨어진다.



[그림 5] 6/5÷3 (≪5-2≫ 교과서, p.22)

다음으로 6/5÷3을 계산하는 알고리즘을 정당화한다. 6/5÷3의 계산에서 분모 6/5의 분모 5에 3을 곱하게 하여 6/5÷3=6/(5×3)이라고 정당화하고 있다. 그러나 이 과정에서 왜 분모 5에 3을 곱하는지 설명하지 않고 있다. 이 예를 통해 (가분수)÷(자연수)=(가분수)/(피제수의 분모×제수인 자연수)라는 알고리즘을 정당화한다. ≪5-2(지도서), p.125≫에서는 이 알고리즘을

$$\frac{\triangle}{\square}\div☆=\frac{\triangle}{\square\times☆} \quad \cdots\cdots \ (\text{알고리즘 5})$$

와 같이 표현한다. 알고리즘 5는 알고리즘 4와 동일하며, 형태상 표준 알고리즘으로 분류할 수 없다.

5차시에서는 (대분수)÷(자연수)를 취급한다. 이때 제수는 2 이상인 자연수이다. 5차시에서는 의미나 계산 과정에 관한 설명이 없이, 대분수를 가분수로 고쳐서 알고리즘 5를 적용하게 하고 있다.

≪5-2≫ 교과서에서는 (분수)÷(자연수)의 경우에, 제수가 1이 아닐 때, 모델(직사각형 모델, 수직선 모델)을 사용하여 알고리즘 3, 4, 5로 이끌고 있다.

나. (분수)÷(자연수)의 계산

여기서는 ≪5-2≫에서 (분수)÷(자연수)를 계산하게 해 주는 알고리즘 3, 4에 관해 논의한다. ≪5-2≫에서 피제수가 진분수이고, 제수가 자연수인 경우에 알고리즘 3, 4를 정당화하고 있다. 피제수가 가분수인 경우의 알고리즘 5는 알고리즘 4와 같으므로, 여기서는 주로 알고리즘 3과 4에 초점을 맞추기로 한다. 교과서에서는 ⅘÷3, 6/5÷3, 8/7÷4를 각각 ⅘÷3=4/(5×3), 6/5÷3=6/(5×3), 8/7÷4=8/(7×4)과 같이 계산하게 해 주는 알고리즘 4에 더 무게를 두고 있다. ⅔÷3=⅔×⅓, ⅘÷3=⅘×⅓과 같이 제수의 역수를 곱하는 알고리즘 3도 정당화하기는 하지만, 그것을 넘어 알고리즘 4를 정당화하고 있다.

교과서에서 알고리즘 3을 정당화하는 과정에서 외형적으로는 방법 1에서 보았던 추이성을 사용하지 않는 것으로 보이지만, 실제로는 방법 1에서와 마찬가지로 추이성을 사용한다. (이하, 방법 1은 "A=B이고 B=C이므로 A=C이다."와 같은 추이성을 이용하는 방법을 지칭한다.) [그림 4]를 이용하여 ⅔÷3=2/9임을 답하게 하고 있지만, [그림 4]가 곧바로 ⅔÷3=2/9임을 말해주는 것은 아니다. [그림 4]를 해석하는 첫째 방식은 [그림 4]에서 1/9이 2개 있다고 보는 것이다. 이렇게 해서 ⅔÷3=1/9+1/9=2/9임을 설명할 수 있다. 비록 이 첫째 방식이 ⅔÷3을 분수 2/9로 나타내는 것을 보여주기는 하지만, 알고리즘 3으로 연결되지는 않는다.

[그림 4]를 알고리즘 3과 연결하기 위해 [그림 4]를 해석하는 둘째 방식을 생각해 볼 수 있다. 이 방식은 ≪5-1≫에서 이미 학습한 분수의 곱셈을 이용하는 것이다. 이 방식에 따르면, [그림 4]는 ⅔의 ⅓ 즉, ⅔×⅓을 뜻한다. 따라서 ⅔÷3은 [그림 4]를 매개로 하여 ⅔×⅓로 표현된다. 이렇게 해서 결국 ⅔÷3=⅔×⅓=2/9와 같이 계산할 수 있는 것이다. 이 과정은 방법 2를 사용한 것이다. (여기서 방법 2는 "A는 모델 B로 나타낼 수 있고, 모델 B를 C로 해석할 수 있으므로 A=C이다."를 이용하는 방법을 지칭한다.) ≪5-2(지도서), p.122≫에 따르면, ≪5-2≫는 분수의 곱셈을 이용하는 둘째 방식을 택하고 있는 것처럼 보이지만, 그렇다고 하면 [그림 4]를 이용하여 먼저 ⅔÷3=2/9임을 답하게 하는 것은 무용하다. 따라서 이렇게 보면 ≪5-2≫에서는 이 방식을 채택하고 있지 않다고 할 수 있다.

한편, 교과서에서 알고리즘 4를 정당화할 때, ⅘÷3을 알고리즘 3을 이용하여 먼저 ⅘÷3=⅘×⅓로 나타내게 하고 있다. 그 다음에 ⅘의 분모 5에 분모 3을 곱하게 하고 있다. 그러나 이때 ⅘÷3=⅘×⅓임을 어떻게 이용하고 있는 것인지 분명하지 않다. 첫째로는 ⅘÷3=⅘×⅓=4/15임을 이용하는 것으로 생각해 볼 수 있다. 이때 4/5×3=4/15이므로, ⅘÷3=4/5×3라고 정당화할 수 있다. 이 방법은 ⅘÷3=4/5×3임을 직접적으로 설명한 것이 아니며, 또한 앞에서 본 방법 1이나 방법 2의 형태와도 다르다. 이것을 방법 3이라고 하면, 그것은

A=(B=)C이고, D=C이므로 A=D이다. …… (방법 3)

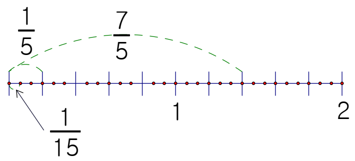
와 같이 나타낼 수 있다. 방법 3도 추이성을 이용한 것으로 볼 수 있다. 이때 ⅘÷3=4/(5×3)와 같이 나타내는 것은 결국 ⅘÷3=4/(5×3)=4/15와 같이 계산하게 하려는 것이다. 즉, 방법 3은 단지 ⅘×⅓을 간단히 하는 것에 불과하다. 둘째로는 ⅘÷3=⅘×⅓=(4×1)/(5×3)=4/(5×3)라고 정당화하는 것으로 생각해 볼 수 있다. 그러나 이것도 ⅘×⅓을 간단히 하는 것에 불과하다.

알고리즘 4는 40여 년 전인 제1차 및 제2차 교육과정에 따른 교과서에서 제시했던 것이다. 특히 제2차 교육과정에 따른 교과서(문교부, 1966, p.27)에서는 "진분수나 가분수를 정수로 나누는 계산에서는, 분모에 그 정수를 곱하여 계산한다."와 같이 알고리즘 4를 제시하였다. 그러나 제3차 교육과정 이후 제7차 교육과정까지에 따른 교과서에서는 알고리즘 3을 제시해 왔다[4]. 그런데 (분수)÷(자연수)도 종국에는 (분수)÷(분수)로 통합되며, 그 결과 알고리즘 8이 분수 나눗셈을 위한 최종적인 알고리즘이 된다. 이런 관점에서 보면, 알고리즘 3은 알고리즘 8로 쉽게 통합되는 반면에, 알고리즘 4는 알고리즘 8로 통합되지 않은

4) 이를 위해 본 논문에서는 제1차 교육과정~제7차 교육과정에 따른 교과서를 조사했다. 각 교육과정에 따른 교과서는 다음과 같다: (1차 교과서) 문교부, 1962, 산수 5-1; (2차 교과서) 문교부, 1966, 산수 5-2; (3차 교과서) 문교부, 1973, 산수 5-1; (4차 교과서) 교육부, 1983, 산수 5-2; (5차 교과서) 교육부, 1991, 산수 5-2; (6차 교과서) 교육부, 1997, 수학 5-2; (7차 교과서) 교육인적자원부, 2004, 수학 5-나.

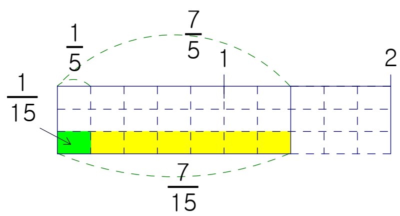
채 사실상 알고리즘 8과 무관한 독립적인 알고리즘으로 존재한다. 알고리즘 4는 알고리즘 2를 포괄하지 않는 반면에, 알고리즘 3은 알고리즘 2를 포괄한다. 알고리즘 2와 알고리즘 3은 알고리즘 8로의 통합을 일관되게 지향하고 있지만, 알고리즘 4는 그렇지 않다. 알고리즘 3을 적용해도 알고리즘 4와 마찬가지로 결과를 얻기까지 추가적인 계산을 한 번만 더 하면 된다.

알고리즘 5를 도입하기에 앞서 ≪5-2≫에서는, 피제수의 분자가 제수로 나누어떨어지는 예 6/5÷3에 대하여 [그림 5]와 같은 수직선을 이용해서 6/5÷3의 의미에 바탕을 두어 6/5÷3=⅖임을 알게 하고 있다. 그러나 피제수의 분자가 제수로 나누어떨어지지 않는 경우, 예를 들어 7/5÷3의 경우에는, 수직선을 이용해서 그 의미에 바탕을 두어 몫을 구하는 것은 피제수의 분자가 제수로 나누어떨어지는 경우처럼 쉽지 않다. 그 몫을 구하기 위해서는, [그림 6]과 같이 수직선에서 ⅕을 나타내는 각 칸을 3등분해서, 1을 나타내는 칸에 1/15이 15개 있도록 수직선을 등분해야 하기 때문이다. 그런 다음 7/5을 나타내는 칸에는 1/15이 21개 있으므로, 7/5÷3을 구하기 위해서 7개의 1/15을 택해 7/15을 얻을 수 있다.



[그림 6] 7/5÷3

피제수의 분자가 제수로 나누어떨어지지 않는 경우에는, [그림 7]과 같은 직사각형을 사용하는 것이 [그림 6]과 같은 수직선을 사용하는 것보다 편리하다. 직사각형을 사용하면, 7/5÷3=7/15임을 수직선을 사용할 때 보다 시각적으로 쉽게 확인할 수 있기 때문이다. 이러한 직사각형은 6/5÷3과 같이 피제수의 분자가 제수로 나누어떨어지는 경우에도 물론 이용할 수 있다.



[그림 7] 7/5÷3

Ⅲ. 제수가 분수인 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정의 분석

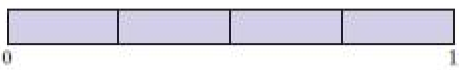
본 절에서는 제수가 분수인 경우에 분수 나눗셈 알고리즘을 정당화하는 과정을 분석한다. 제수가 분수인 경우의 분수 나눗셈은 현재 ≪6-1≫에서 취급하는 바, 그것은 (자연수)÷(분수)와 (분수)÷(분수)로 구분할 수 있다. ≪6-1(지도서), p.89≫에 따르면, 6학년에서

는 분수 나눗셈을 5차시로 나누어 점진적으로 지도한다.[5] 1차시에서는 (자연수)÷(단위분수), 2차시에서는 피제수, 제수의 분모가 서로 같은 경우의 (진분수)÷(진분수), 3차시에서는 피제수, 제수의 분모가 서로 다른 경우의 (진분수)÷(진분수), 4차시에서는 (자연수)÷(진분수), 5차시에서는 (대분수)÷(대분수)를 취급한다.

1. (자연수)÷(단위분수)

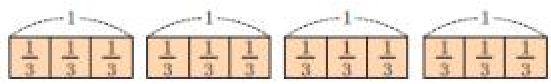
가. (자연수)÷(단위분수)의 지도 과정

1차시에서는 (자연수)÷(단위분수)를 취급한다. 활동 1에서 피제수가 1인 경우 즉, 1÷(단위분수)를 취급하는 바, 먼저 1÷$\frac{1}{4}$의 의미를 포함제의 맥락에서 '1에 $\frac{1}{4}$이 포함되는 횟수'로 도입한다. 이때 [그림 8]과 같은 '분수 막대 모델(≪6-1(지도서), p.93≫)'을 사용하는 바, 분수 막대를 4등분한 한 개는 $\frac{1}{4}$이고 그것이 4개 있으므로, 1이 $\frac{1}{4}$을 4번 포함한다. 따라서 1÷$\frac{1}{4}$=4임을 알 수 있다. 이 4는 1÷$\frac{1}{4}$의 의미로부터 얻은 것이다. 이 활동 1에서는 1÷$\frac{1}{4}$을 계산하는 과정을 설명하고 있지는 않다.



[그림 8] 1÷$\frac{1}{4}$ (≪6-1≫ 교과서, p.5)

활동 2에서는 (2보다 큰 자연수)÷(단위분수)를 취급하는 바, 먼저 4÷$\frac{1}{3}$의 의미를 포함제의 맥락에서 '4에 $\frac{1}{3}$이 포함되는 횟수'로 도입한다. 이때 [그림 9]와 같이 분리된 막대 4개를 사용한다. 각 막대를 3등분한 한 개는 $\frac{1}{3}$이고 그것이 3개 있으므로, 1은 $\frac{1}{3}$을 3번 포함한다. 그런데 막대가 4개 있으므로 4는 $\frac{1}{3}$을 12번 포함한다. 따라서 4÷$\frac{1}{3}$=12임을 알 수 있다. 이 12는 4÷$\frac{1}{3}$의 의미로부터 얻은 것이다.



[그림 9] 4÷$\frac{1}{3}$(≪6-1≫ 교과서, p.5)

다음으로 4÷$\frac{1}{3}$을 계산하는 과정을 설명하고 알고리즘을 정당화한다. 위에서 4÷$\frac{1}{3}$=12임을 알았다. 그런데 4÷$\frac{1}{3}$=4×(1÷$\frac{1}{3}$)=4×3=12이므로(≪6-1(지도서), p.93≫), 4÷$\frac{1}{3}$을 4×3으로 바꾸어 계산할 수 있다. 즉, 4÷$\frac{1}{3}$=4×3이다. 이 예를 통해 (자연수)÷(단위분수)=(자연수)×(단위분수의 역수)라는 알고리즘을 얻는다. 하지만 초등학교 수학에서 역수라는 용어를 사용하지 않으므로, ≪6-1(지도서), p.93≫에서는 이 알고리즘을

(자연수)÷(단위분수)=(자연수)×(단위분수의 분모) …… (알고리즘 6)

과 같이 표현한다. 알고리즘 6은 형태상 표준 알고리즘으로 분류할 수 있다.

≪6-1≫에서는 (자연수)÷(분수)의 경우에, 제수가 단위분수일 때, 모델(수 막대 모델, 직

5) 이때의 차시도 분수 나눗셈 알고리즘 지도 내용에만 초점을 맞춘 것으로, 분수 나눗셈의 응용 등에 관한 것은 포함되지 않았다.

사각형 모델)을 사용하여 알고리즘 6으로 이끌고 있다.

나. (자연수)÷(단위분수)의 계산

여기서는 ≪6-1≫에서 (자연수)÷(단위분수)를 곱셈으로 바꾸는 과정에 관해 논의한다. 사실 교과서에서 (자연수)÷(단위분수)를 1차시에서 취급하는 것은 그 이전의 제7차 교육과정에 따른 ≪6-나≫에서의 분수 나눗셈 알고리즘 지도 순서를 크게 바꾼 것이다. ≪6-나(지도서)≫에 따르면, 분수 나눗셈 알고리즘 지도는 전체 7차시(응용 등은 제외)로 이루어지는 바, (자연수)÷(단위분수)는 6차시에서 취급했었다.

2007 개정 교육과정에 따른 ≪6-1≫의 활동 1에서는, [그림 8]을 이용하여 포함제의 맥락에서 $1\div\frac{1}{4}=4$임을 답하게 하고 있지만, $1\div\frac{1}{4}$을 1×4로 바꾸어 계산할 수 있다는 것은 취급하고 있지 않다. 활동 2에서는 [그림 9]를 이용하여 먼저 포함제의 맥락에서 $4\div\frac{1}{3}=12$임을 답하게 하고 있다. 그러고 나서 $4\div\frac{1}{3}$을 4×3으로 바꾸어 계산하게 하고 있다. 교과서에서 이 과정은 방법 3 즉,

$4\div\frac{1}{3}=12$이고, $4\times3=12$이므로 $4\div\frac{1}{3}=4\times3$

을 사용하는 것으로 보이지만, ≪6-1(지도서), p.93≫에서는 그렇게 설명하고 있지 않다. 거기에서는 $4\div\frac{1}{3}$을 4×3으로 바꾸어 계산해도 되는 이유로

$$4\div\frac{1}{3}=4\times(1\div\frac{1}{3})=4\times3=12$$

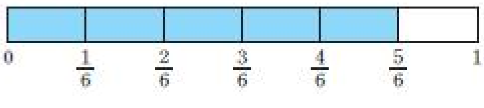
를 제시하고 있지만, 이 과정에서 $4\div\frac{1}{3}=4\times(1\div\frac{1}{3})$은 자연스럽지 않다. [그림 9]는 $1\div\frac{1}{3}$이 4번 반복된다는 것을 의미하며, 4가 $(1\div\frac{1}{3})$번 반복된다는 것을 의미하지 않는다. [그림 9]는 $(1\div\frac{1}{3})\times4$로 표현될 수는 있어도 $4\times(1\div\frac{1}{3})$로 표현될 수는 없다.

또한, 여기서는 3을 3/1으로 나타낼 수 있다는 것을 취급하지 않기 때문에, 제수의 역수를 곱한다는 알고리즘 대신 알고리즘 6 즉, (자연수)÷(단위분수)=(자연수)×(단위분수의 분모)를 제시하고 있다. 자연수를 분모가 1인 분수로 나타낼 수 있다는 것을 취급하지 않는 한, 알고리즘 6은 알고리즘 8로 온전히 통합되기 어렵다.

2. (분수)÷(분수)

가. (분수)÷(분수)의 지도 과정

2차시에서는 분모가 서로 같고, 피제수가 제수보다 크며, 피제수의 분자가 제수의 분자로 나누어떨어지는 경우의 (진분수)÷(진분수)를 취급한다. 활동 1에서 먼저 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$의 의미를 포함제의 맥락에서 '$\frac{5}{6}$에 $\frac{1}{6}$이 포함되는 횟수'로 도입한다. 이때 [그림 10]과 같은 분수 막대 모델을 사용하는 바, 분수 막대를 6등분한 한 개는 $\frac{1}{6}$이므로, $\frac{5}{6}$는 $\frac{1}{6}$을 5번 포함한다. 따라서 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5$임을 알 수 있다. 이 5는 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$의 의미로부터 얻은 것이다.



[그림 10] $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$ (≪6-1≫ 교과서, p.5)

다음으로 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$을 계산하는 과정을 설명하고 알고리즘을 정당화한다. 위에서 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5$임을 알았다. 그런데 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5$이고 $5\div1=5$이므로 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$을 $5\div1$로 바꾸어 계산할 수 있다. 즉, $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5\div1$이다. ≪6-1(지도서), p.94≫에서는 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$을 $5\div1$로 바꾸어 계산할 수 있는 것은 '두 식 모두 똑같은 수를 똑같은 횟수만큼 뺐을 때 그 값이 같아지기 때문'이라 하고 있다. 이 예를 통해 (자연수)÷(단위분수)=(피제수의 분자)÷(제수의 분자)라는 알고리즘을 얻는다. ≪6-1(지도서), p.95≫에서는 이 알고리즘을

분자끼리 나눗셈을 한다. …… (알고리즘 7)

과 같이 표현한다. 활동 2와 활동 3에서도 이와 유사한 설명을 하고 있다. 알고리즘 7은 비표준 알고리즘으로 분류할 수 있다.

3차시에서는 분모가 서로 다른 경우의 (진분수)÷(진분수)를 취급한다. 피제수와 제수의 분모를 통분하면, 분모가 같은 경우의 (진분수)÷(진분수)로 환원되므로, 그것의 의미에 관한 별도의 설명은 없다. 활동 1에서는 통분해서 알고리즘 7을 적용하게 하고 있다. 활동 2에서는 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$의 계산을 할 때

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3\times5}{4\times5}\div\frac{2\times4}{5\times4}=(3\times5)\div(2\times4)=\frac{3\times5}{2\times4}\text{이고 }\frac{3\times5}{2\times4}=\frac{5\times3}{4\times2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

이므로 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 $\frac{3}{4}\times5/2$로 바꾸어 계산할 수 있다. 즉, $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times5/2$이다. 이러한 예를 통해 분모가 다른 경우의 (진분수)÷(진분수)=(진분수)×(진분수의 역수)라는 알고리즘을 정당화한다. 하지만 초등학교 수학에서 역수라는 용어를 사용하지 않으므로, ≪6-1(지도서), p.97≫에서는 이 알고리즘을

나누는 분수의 분자와 분모를 바꾼 후 곱한다. …… (알고리즘 8)

과 같이 표현한다. 알고리즘 8은 형태상 표준 알고리즘으로 분류할 수 있고, 이것은 사실상 분수 나눗셈에서의 최종적인 표준 알고리즘이다.

4차시에서는 (자연수)÷(진분수)를 취급한다. 피제수인 자연수를 제수의 분모와 같은 분모를 갖는 가분수로 바꾸면 분모가 같은 경우의 (가분수)÷(진분수)로 환원된다. 이것은 2차시에서 취급한 '분모가 같은 경우의 (진분수)÷(진분수)'를 확장한 것이므로, 그것의 의미에 관한 별도의 설명은 없다. 활동 1에서는 통분해서 알고리즘 7을 적용하게 하고 있다. 활동 2에서는 알고리즘 8을 적용하게 하고 있다.

5차시에서는 대분수의 나눗셈을 취급한다. 5차시에서는 의미나 계산 과정에 관한 설명이 없이, 대분수를 가분수로 고쳐서 알고리즘 7과 8을 적용하게 하고 있다.

≪6-1≫에서는 (분수)÷(분수)의 경우에, 먼저 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈에서 모델(수 막대 모델)을 사용하여 알고리즘 7로 이끌고 있고, 다음으로 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈에서 알고리즘 8로 이끌고 있다. 한편, 피제수가 자연수이고 제수가 단위분수가 아닌 진분수일 때는 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 이용하게 하고 있다.

나. (분수)÷(분수)의 계산

여기서는 ≪6-1≫에서 (분수)÷(분수)를 계산하는 과정에 관해 논의한다. 교과서에서는 먼저 2차시에서 분모가 같을 때의 (진분수)÷(진분수)를 계산하는 과정을 설명하면서, (진분수)÷(진분수)=(피제수의 분수)÷(제수의 분수)라는 알고리즘 7을 정당화하고 있다(≪6-1(지도서), p.95≫). 이것은 (진분수)÷(진분수)를 ≪5-2≫에서 취급한 (자연수)÷(자연수)=(분수)로 환원하는 것처럼 보인다. 그러나 실제로는 그렇지 않다. ≪6-1≫에서는 모두 분모가 서로 같고, 피제수가 제수보다 크며, 피제수의 분자가 제수의 분자로 나누어떨어지는 경우

만을 제시하고 있다. 이렇게 되면 언제나 몫이 자연수이고 나머지가 0이 된다. 이것은 (진분수)÷(진분수)를 (자연수)÷(자연수)=(자연수)로 환원한 것이다. 따라서 이러한 한계를 피하기 위해서는 ≪6-1≫에서 피제수의 분자가 제수의 분자로 나누어떨어지지 않는 경우, 예를 들어 $\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}$과 같은 것을 제시할 필요가 있다. 또, $\frac{3}{8}\div\frac{7}{8}$과 같이 피제수가 제수보다 작은 경우도 제시할 필요가 있다. ≪6-1≫에서는 이러한 예를 2차시가 아닌 3차시에서 분모가 다를 때의 (진분수)÷(진분수)를 취급하면서 제시하고 있다.

≪6-1≫에서는 2차시에서 분모가 같을 때의 (진분수)÷(진분수)를 계산하는 과정을 설명하면서 방법 3을 사용하여 알고리즘 7 즉, "분자끼리 나눗셈을 한다."를 정당화하고 있다. 예를 들어

$\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5$이고 $5\div1=5$이므로 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5\div1$

과 같이 방법 3 즉, "A=C, B=C이므로 A=B이다."를 사용하여 설명하고 있다. 그러나 이것이 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5\div1$임을 직접적으로 설명한 것은 아니다. 알고리즘 7은 알고리즘 8과 무관한 독립적인 알고리즘이다. 이때

$$\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=\frac{5\div1}{6\div6}=\frac{5\div1}{1}=5\div1$$

과 같이 직접적으로 설명하는 방식을 생각할 수 있지만, 이 방식은 2007 개정 교육과정의 범위를 벗어난다. '분자끼리 그리고 분모끼리 나누는 것'과 '분모가 1인 분수'는 2007 개정 교육과정에서 공식적으로 취급하는 것이 아니다.

또, 피제수와 제수에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 몫은 변하지 않는다는 것을 이용하여 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5\div1$임을 설명하는 것도 가능하다. 하지만, ≪6-1≫에서는 '피제수와 제수에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 몫은 변하지 않는다'는 것을 <소수 나눗셈> 단원에서 취급한다.[6] 그런데 그 단원은 <분수 나눗셈> 단원 다음에 나온다. 즉, ≪6-1≫에서는 알고리즘 7을 정당화하는 과정에서 그와 같은 성질을 사용하고 있지 않다. 그런데 ≪5-2≫에서 (자연수)÷(자연수)=(자연수)×(자연수의 역수)로 표현되는 알고리즘 2를 배웠으므로, 여기서는 그것을 활용하여 $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5\div1=5$이고 $\frac{5}{6}\times6=5$이므로

$$\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\times6$$

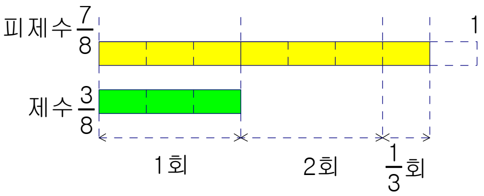
과 같이, 방법 3 즉, "A=B=C, D=C이므로 A=D이다."를 사용하여 설명하는 것도 생각해 볼 수 있다.

알고리즘 8과 관련이 있도록 하기 위해서는 2차시에서 일반적으로, 예를 들어 $\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}$을

$$\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}=\frac{7}{8}\times\frac{8}{3}$$

과 같이 계산할 수 있음을 취급할 필요가 있다. 방법 3을 사용하여 이것을 설명할 수 있다. 먼저 [그림 11]과 같이 수 막대를 두 개 사용하여 $\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}=7/3$임을 알 수 있다. 이때 위의 막대는 피제수를 나타내고 아래의 막대는 제수를 나타낸다. 이때 $\frac{7}{8}$과 $\frac{3}{8}$은 $\frac{1}{8}$을 단위로 할 때, 그것이 각각 7개, 3개임을 나타낸다는 것을 이용하여, $\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}$의 의미를 '$\frac{7}{8}$이 $\frac{3}{8}$의 몇 배'로 해석할 수 있지만(片桐重男, 2012), 그것도 결국 [그림 11]과 같은 맥락으로 표현된다. 그런데 분수의 곱셈에서 $\frac{7}{8}\times8/3=7/3$이므로, 결국 $\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}=\frac{7}{8}\times8/3$과 같이 계산할 수 있다. 그러나 이 방법이 $\frac{7}{8}\div\frac{3}{8}=\frac{7}{8}\times8/3$임을 직접적으로 설명하는 것은 아니다.

6) ≪6-1≫ 교과서에서 소수 나눗셈을 설명하면서, 예를 들어 1.8÷0.3을 18÷3을 이용하여 구할 수 있다는 것을 설명하고 있다. 여기서 비로소 '피제수와 제수에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 몫은 변하지 않는다'는 것을 사용하고 있다.



[그림 11] $\frac{7}{8} \div \frac{3}{8}$

≪6-1≫에서는 3차시에서 분모가 다를 때의 (진분수)÷(진분수)를 계산하는 과정을 설명하면서, 알고리즘 8 즉, "나누는 분수의 분자와 분모를 바꾼 후 곱한다."를 정당화하고 있다. 여기서는 먼저 통분해서, 분모가 같을 때의 (진분수)÷(진분수) 형태로 만든다. 예를 들어 ¾÷⅖를 15/20÷8/20로 바꾸어, 알고리즘 8을 사용하여 계산하게 한다. 그 다음에 다시 이 과정을

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3\times5}{4\times5} \div \frac{2\times4}{5\times4} = (3\times5)\div(2\times4) = \frac{3\times5}{2\times4}$$

와 같이 나타낸다. 그리고

$$\frac{3\times5}{2\times4} = \frac{3\times5}{4\times2} \text{이고, } \frac{3\times5}{4\times2} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{2} \text{이므로 } \frac{3}{4}\div\frac{2}{5} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

라고 설명한다. 이 방법은

A=B, B=C, C=D 이므로 A=D이다. …… (방법 4)

와 같이 표현할 수 있다. 방법 4도 추이성을 이용한 것으로 볼 수 있다. 방법 4에서 (3×5)/(2×4)의 분모와 분자를 변형하여 ¾×5/2를 이끌어 내고 있기는 하지만, 그것이 ¾÷⅖=¾×5/2임을 직접적으로 설명하는 것은 아니다. 방법 4 대신에 방법 3을 사용하여,

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = \frac{15}{8} \text{이고, } \frac{3}{4}\times\frac{5}{2} = \frac{15}{8} \text{이므로 } \frac{3}{4}\div\frac{2}{5} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

와 같이 설명하는 것도 가능하다. 방법 3도 ¾÷⅖=¾×5/2임을 직접적으로 설명하는 것은 아니지만, 방법 4보다는 간편하다.

이때 ¾÷⅖=¾×5/2임을 직접적으로 설명하는 잘 알려진 방식으로 먼저 번분수를 이용하는 것(Tirosh, 2000; 전평국과 박혜경, 2003; 강문봉, 2004; 백선수, 2004; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005)이 있다. 예를 들어 ¾÷⅖=¾×5/2임을

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}}{\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}}{1} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

와 같이 설명할 수 있지만, 이 과정에서 사용하는 번분수 표현과 '분모가 1인 분수' 등은 2007 개정 교육과정에서 취급하는 것이 아니다. 또, 피제수와 제수에 같은 수를 곱해 제수를 1로 만드는 방식(Ma, 1999/2002; Tirosh, 2000; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 신준식, 2013)도 있다. 예를 들어 ¾÷⅖=¾×5/2임을

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = (\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}) \div (\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}) = (\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}) \div 1 = \frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$$

와 같이 설명할 수 있지만, 피제수가 분수이고 제수가 1인 분수 나눗셈에서 몫이 바로 피제수임을 알아야 한다. 교과서에서 그러한 예는 찾기 어렵다. 이 이외에 곱셈의 역을 이용하는 것(Tirosh, 2000; 강문봉, 2004)도 가능하다. 예를 들어 ¾÷⅖=¾×5/2임을

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = x$라고 하면, $x \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$이다. 따라서 $x \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ 즉, $x = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$
와 같이 설명할 수 있지만, 등식의 성질을 이용해서 x만 남기는 것을 ≪6-2≫에서 취급하므로, 이 방식을 ≪6-1≫에서 사용할 수는 없다.

≪6-1≫에서는 4차시에서 (자연수)÷(진분수)를 계산할 때 자연수를 분수로 바꾸어, 분모가 같을 때의 (가분수)÷(진분수) 형태로 만들도록 하고 있다. 예를 들어 4÷⅗을 계산할 때, 먼저 4를 분모가 5인 가분수 20/5으로 바꾸어 4÷⅗을 20/5÷⅗으로 고쳐서 알고리즘 7 또는 8을 적용하게 하고 있다. 이 방식은 제7차 교육과정에 따른 ≪6-나≫에서 (자연수)÷(진분수)를 계산하는 과정을 별도로 설명하지 않은 채, (진분수)÷(진분수)의 계산에서 얻은 알고리즘 8을 그대로 적용하게 했던 것의 개선이라고 볼 수 있다. 그러나 비록 ≪6-1≫에서 자연수를 분수로 바꾸는 것을 이용하고 있기는 하지만, 그 이전에 어디에서도 그것을 명시적으로 취급하지는 않았다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 ≪5-2≫, ≪6-1≫에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정을 분석하고 있다. ≪5-2≫, ≪6-1≫에서는 간접적인 방법으로 분수 나눗셈식을 분수 곱셈식으로 바꾸어 알고리즘을 정당화하고 있는 바, 그 유형으로 추이성을 이용하는 것(방법 1: “A=B이고 B=C이므로 A=C이다.” 방법 3: “A=(B=)C이고, D=C이므로 A=D이다.” 및 방법 4: “A=B, B=C, C=D 이므로 A=D이다.”)과 수 막대나 직사각형 모델을 이용하는 것(방법 2: “A는 모델 B로 나타낼 수 있고, 모델 B를 C로 해석할 수 있으므로 A=C이다.”)이 있다. 식 변형을 통해 분수 나눗셈식을 분수 곱셈식으로 직접 변환하는 방식으로 번분수를 이용하는 방식, 제수를 1로 만드는 방식, 그리고 곱셈의 역을 이용하는 방식이 있지만, 이들은 모두 2007 개정 교육과정의 범위를 벗어나므로, 교과서에 적용할 수 없다. 이제 이러한 분석 결과로부터 얻을 수 있는 다음 세 가지 제언을 결론으로 제시한다.

첫째, 초등학교 5학년에서 ‘역수’라는 용어의 사용을 전향적으로 고려할 필요가 있다. 교과서에서 제시하고 있는 분수 나눗셈 알고리즘은 외형상 6개(알고리즘 1, 2와 알고리즘 4, 5는 각각 동일한 알고리즘)이다. 제수가 자연수인 경우와 분수인 경우로 나누고, 그 다음에 각 경우에서 다시 피제수가 자연수인 경우와 분수로 나눈 것이 교과서에서 여러 개의 분수 나눗셈 알고리즘이 나타나는 일차적 이유이지만, 역수라는 용어를 사용하지 않는 것도 이차적 이유가 된다. ‘역수’를 사용하면, (자연수)÷(자연수)=(자연수)×(자연수의 역수)라는 알고리즘 2, (진분수)÷(자연수)=(진분수)×(자연수의 역수)라는 알고리즘 3, (자연수)÷(단위분수)=(자연수)×(단위분수의 역수)라는 알고리즘 6, (진분수)÷(진분수)=(진분수)×(진분수의 역수)라는 알고리즘 8은 모두 동일한 형태로 볼 수 있다. 이 4개의 알고리즘은 형태상 제수의 역수를 곱하는 모습으로 나타나는 표준 알고리즘이다.

둘째, 비표준 알고리즘을 표준 알고리즘 형태로 도입하는 것을 고려할 필요가 있다. 알고리즘 4와 알고리즘 7은 비표준 알고리즘으로 분류할 수 있다. 이들은 표준 알고리즘과는 다른 별도의 독립된 알고리즘인 바, 알고리즘 8로의 통합이 수월하지 않다. (진분수 또는 가분수)÷(자연수)=(피제수의 분자)/(피제수의 분모×제수인 자연수)의 형태를 취하고 있는 알고리즘 4(그리고 5)는 알고리즘 3을 간단히 한 형태이지만, 알고리즘 3을 적용해도

결과를 얻기까지 한 번의 추가적인 계산만이 필요하다는 점에서, 알고리즘 4가 알고리즘 3보다 효율적이라고 보기 어렵다. 이런 점에서 알고리즘 4의 도입은 재고할 필요가 있다. 다음으로 (진분수)÷(진분수)에서 피제수와 제수의 분자끼리 나눗셈을 하는 알고리즘 7은 (진분수)÷(진분수)를 (자연수)÷(자연수)로 바꾸고 있다. 그런데 이미 알고리즘 2에서 (자연수)÷(자연수)=(자연수)×(자연수의 역수)를 취급했으므로, 여기서도 그와 같은 형태의 알고리즘으로 바꾸어 도입하는 것을 고려할 필요가 있다.

셋째, 차후의 교육과정에서 분모가 1인 분수의 취급에 관해 논의할 필요가 있다. (자연수)÷(진분수)를 계산하는 과정을 어떻게 설명할 것인가에 따라 자연수를 분수로 나타내는 것을 취급할 수도 있고 취급하지 않을 수 있다. 예를 들어 $4\div\frac{3}{5}$을 계산할 때, 모델을 이용하면, 4에 $\frac{3}{5}$이 6번 들어 있고, 그리고 남은 것은 $\frac{3}{5}$의 $\frac{2}{3}$이므로 $4\div\frac{3}{5}=6+\frac{2}{3}=20/3$이다. 그런데 $4\times5/3=20/3$이므로 결국 $4\div\frac{3}{5}=4\times5/3$임을 알 수 있다. 이와 같은 설명에서는 자연수를 분수로 나타내는 것을 이용하지 않는다. 한편, ≪6-1≫에서는 (자연수)÷(진분수)를 취급할 때 자연수를 가분수로 나타내는 것을 이용하고 있다. 그러나 교과서에서 자연수를 분수로 나타내는 것을 공식적으로 취급한 적은 없다. 따라서 자연수를 분수로 나타내는 것을 취급할 때, 예를 들어 3=3/1과 같이 분모가 1인 분수도 취급해야 할 것인지에 대해서 충분히 논의할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강문봉 (2004). 분수 나눗셈 지도 방법에 대한 연구. **수학교육학 논총, 25**, 199-214.

교육부 (1983). **산수 5-2. 교육부.**

교육부 (1991). **산수 5-2. 교육부.**

교육부 (1997). **수학 5-2. 교육부.**

교육인적자원부 (2002). **수학 6-나 지도서**. 서울: 두산동아.

교육인적자원부 (2004). **수학 5-나**. 서울: 두산동아.

교육인적자원부 (2004). **수학 6-나**. 서울: 두산동아.

김명운, 장경윤 (2009). 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도. **학교수학, 11**(4), 685-706.

김민경 (2009). 초등학생의 분수 이해 분석: 6학년의 분수 개념 및 분수 나눗셈을 중심으로. **한국학교수학회논문집, 12**(2), 151-170.

문교부 (1962). **산수 5-1.**

문교부 (1966). **산수 5-2.**

문교부 (1973). **산수 5-1.**

박교식, 송상헌, 임재훈 (2004). 우리나라 예비초등교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구. **학교수학, 5**(2), 235-248.

박만구 (2002). 왜 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times 5/2$인가? **수학교육논문집, 12**, 39-54.

방정숙, 이지영 (2009). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **학교수학, 11**(4), 723-743.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 이용한 대안적인 분수 나눗셈의 형식화 방안에 관한 연구. **초등수학교육, 8**(2), 97-113.

신준식 (2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. **수학교육, 52**(2), 217-230.

이용률 (2010). **초등학교 수학의 중요한 지도 내용**. 서울: 경문사.

임재훈 (2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. **학교수학, 9**(1), 13-28.

임재훈, 김수미, 박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2), 103-121.

전평국, 박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. **수학교육논문집, 15**, 71-76.

조용진, 홍갑주 (2013). 분수 나눗셈의 지도에서 단위비율 결정 맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구. **초등수학교육, 16**(2), 93-106.

片桐重男 (2012). **算數教育學概論**. 東京: 東洋館出版社.

Cengiz, N., & Rathouz, M. (2011). Take a bite out of fraction Division. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(3), 146-153.

Dixon, J. K., & Tobias, J. M. (2013). The whole story: the understanding fraction computation. *Mathematics Teaching in the Middle School, 19*(3), 156-163.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 546-552.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associate. 신현용, 승영조 역 (2002). **초등학교수학 이렇게 가르쳐라**. 서울: 승산.

Ott, J. M., Snook, D. L., & Gibson, S. D. (1991). Understanding partitive division of fractions. *Arithmetic Teachers, 39* (Oct), 7-11.

Peck, S., & Wood, J. (2008). Elastic, cottage cheese: visualizing division of fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(4), 208-212.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: the case of division of fractions. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1). 5-25.

Tyminski, A. M., & Dogbey, J. K. (2012). Developing the common denominator fraction division algorithm. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(4). 248-253.

<Abstract>

An Analysis on Processes of Justifying the Standard Fraction Division Algorithms in Korean Elementary Mathematics Textbooks

Park, Kyo sik[7]

In this paper, fraction division algorithms in Korean elementary mathematics textbooks are analyzed as a part of the groundwork to improve teaching methods for fraction division algorithms. There are seemingly six fraction division algorithms in ≪Math 5-2≫, ≪Math 6-1≫ textbooks according to the 2006 curriculum. Four of them are standard algorithms which show the multiplication by the reciprocal of the divisors modally. Two non-standard algorithms are independent algorithms, and they have weakness in that the integration to the algorithms 8 is not easy. There is a need to reconsider the introduction of the algorithm 4 in that it is difficult to think algorithm 4 is more efficient than algorithm 3. Because (natural number)÷(natural number)=(natural number)×(the reciprocal of a natural number) is dealt with in algorithm 2, it can be considered to change algorithm 7 to algorithm 2 alike. In textbooks, by converting fraction division expressions into fraction multiplication expressions through indirect methods, the principles of calculation which guarantee the algorithms are explained. Method of using the transitivity, method of using the models such as number bars or rectangles, method of using the equivalence are those. Direct conversion from fraction division expression to fraction multiplication expression by handling the expression is possible, too, but this is beyond the scope of the curriculum. In textbook, when dealing with (natural number)÷(proper fraction) and converting natural numbers to improper fractions, converting natural numbers to proper fractions is used, but it has been never treated officially.

Key words: fraction division algorithm, meaning of fraction division, reciprocal, standard algorithm

논문접수: 2014. 03. 09
논문심사: 2014. 04. 11
게재확정: 2014. 04. 29

7) pkspark@ginue.ac.kr