한국초등수학교육학회지 *18*(1) 1-17. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea *18*(1) 1-17.
2014. 04. 30 April 30. 2014.

선험적 지식으로서 곱셈의 교환법칙 교육의 문제

임재훈[1)]

초등학교에서 곱셈의 교환법칙의 지도는 3×4=12, 4×3=12와 같이 $a\times b$와 $b\times a$의 값을 계산하고 실제로 그 값이 같은지를 확인하는 활동을 바탕으로 하는 것이 보통이다. 이 논문에서는 첫째로, 순수이성비판에 나타난 수학적 지식에 관한 칸트의 견해를 바탕으로, 곱셈의 교환법칙의 취급 방법을 비판적으로 고찰한다. 칸트에 의하면, 수학적 지식은 선험성과 도식성이라는 특징을 지니고 있다. 두 곱셈의 계산 결과를 비교하는 방법은 선험성과 도식성이라는 수학적 지식의 특성을 충족하지 못한다. 칸트의 관점에서 볼 때, $a\times b$를 $b\times a$로 변환하는 필연적이고 일반적인 도식이 드러나게 교환법칙을 취급하는 것이 적절하다. 둘째로, 곱셈의 교환법칙의 도식과 관련된 기본구성단위로의 분배 전략은 (자연수)×(10의 거듭제곱), 몫 분수 맥락에서 분수의 복합적 의미, 분수의 곱셈과 같은 학습 내용을 관통하는 일반적인 성격의 것임을 논한다. 끝으로, 이상의 두 논의를 바탕으로 초등 수학교과서에서 곱셈의 교환법칙이 다루어지는 방식을 비판적으로 고찰한다.

주제어: 자연수 곱셈, 교환법칙, 분배 전략, 분수, 칸트, 선험

Ⅰ. 서 론

곱셈의 교환법칙 $a\times b=b\times a$는 형태상 앞의 수와 뒤의 수를 서로 바꾸어도 그 곱이 같음을 뜻한다. 자연수의 곱셈에서 앞의 피승수는 한 그룹에 있는 원소의 개수를, 뒤의 승수는 그룹의 수(또는 횟수)를 나타내므로, 교환법칙은 개수와 횟수, 또는 원소의 수와 그룹의 수를 교환할 수 있음을 말한다. Reys 외(1998/2012)는 초등학교에서 연산의 수학적 성질을 형식화하고 그 명칭을 알게 하는 것은 중요하지 않지만 연산의 성질을 이해하고 효과적으로 사용하게 하는 것은 중요하며, 교환법칙에 의해 외워야 하는 곱셈구구의 개수를 대폭 줄일 수 있다고 하였다. 또한 김남균과 김지은(2009)은 아동들이 (한 자리 수)×(두 자리 수)의 곱셈에서 교환법칙을 사용하는 것을 확인하고 교환법칙이 곱셈 문제 해결 전략 개발에 중요한 역할을 한다고 하였다. 초등학교에서는 이와 같은 효용성을 지닌 교환법칙을 곱셈의 성질 또는 규칙으로 다루되, 교환법칙이라는 용어나 $a\times b=b\times a$와 같은 일반적인 식을 사용하지는 않는다. 정연준과 조영미(2012)에 의하면, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙은 곱셈 계산을 지탱해주는 원리이지만, 초등학교의 곱셈 계산법 지도시 앞으로 내세워지지는 않는다.

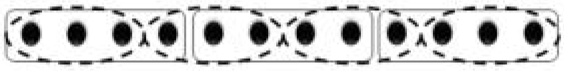
곱셈의 교환법칙은 다양한 방식으로 다루어질 수 있다. 곱셈의 유형에는 일반적으로 동수누가, 배, 조합, 그리고 넓이가 있는데(Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2009), 초등 수학의 곱셈 도입시 앞의 두 유형이 일반적이다. 우리나라 교과서에서도 곱셈은 동수누가

1) 경인교육대학교 수학교육과

맥락의 묶어세기 활동을 바탕으로 도입된다. 이를테면, 다음과 같이 사물을 3개씩, 4개씩 묶어세는 경험을 통해 3×4와 4×3을 학습할 수 있다([그림 1]).

[그림 1] 묶어세기와 3×4, 4×3

이 두 활동을 겹쳐 표현한 [그림 2]를 이용하여 $3\times4=4\times3$을 지도하는 것도 고려해 볼 수 있다. 또 곱셈구구표에서 3×4와 4×3, 6×9와 9×6, 7×5와 5×7과 같이 피승수와 승수가 바뀐 두 곱의 결과 12, 54, 35를 확인하게 하고, 이를 바탕으로 곱셈의 교환법칙을 도입할 수도 있을 것이다. 3개씩 4줄 형태의 직사각형 배열에서 가로×세로와 세로×가로의 결과가 같음을 이용하여 곱셈의 교환법칙을 가르칠 수도 있을 것이다.



[그림 2] 묶어세기와 $3\times4=4\times3$

이와 같은 방법들은 어떤 관점에서 보는가에 따라 좋은 것으로 평가될 수도 있고 그렇지 못한 것으로 평가될 수 있다. 이를테면 일렬로 배열된 사물을 두 가지 방법으로 묶어세는 활동을 통한 교환법칙의 도입은 이 활동이 아동에게 친숙한 것이라는 점에서 좋은 것으로 평가될 수도 있다. 곱셈구구표에서 3×4와 4×3, 6×9와 9×6과 같은 여러 사례를 확인하면서 곱셈의 교환법칙을 도입하는 것은 귀납적 사고 경험이라는 점에서 좋은 것으로 평가될 수 있다. 직사각형 배열에서 가로×세로와 세로×가로를 비교해 보는 것은 교환법칙을 직관적으로 보여준다는 점에서 좋은 것으로 평가될 수 있다.

이 글에서는 수학적 지식의 성격에 대한 칸트의 견해, 그 중에서도 수학적 지식의 선험성을 준거로 하여 곱셈의 교환법칙을 다루는 몇 가지 방식의 적절성을 검토하고 평가한다. 그리고 곱셈의 교환법칙의 바탕을 이루는 도식 및 관련된 기본구성단위로의 분배 전략이 일반적인 자연수 곱셈 계산법, 분수 개념, 분수 곱셈에 이르는 다양한 내용에 공통된 일반성을 지니고 있는 것으로서, 이와 같은 내용들의 지도 장면에서 심화하여 다루어질 수 있는 것임을 살펴본다. 끝으로 이상의 고찰을 바탕으로 현재 초등학교 교과서에서 곱셈의 교환법칙이 다루어지는 방식을 비판적으로 고찰한다.

Ⅱ. 수학적 지식의 선험성과 곱셈의 교환법칙

칸트에 의하면, 인간의 인식에는 선험적 인식과 경험적 인식이 있다 선험적 인식은 경험과 함께 시작되지만 경험으로부터 생겨나지는 않는다. 칸트는 선험적 인식과 경험적 인식을 구별할 수 있는 준거에 관하여 다음과 같이 말한다.

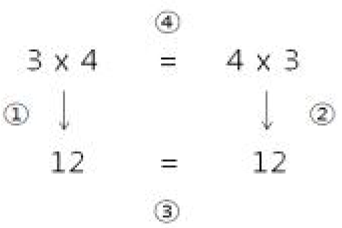
> 경험은 우리에게 어떤 것이 그러그러하다는 것을 가르쳐 주기는 하지만, 그것이 그렇지 않을 수 없음을 가르쳐 주지는 않는다. 그러므로 만약 첫째로, 동시에 필연성과 함께 생각되는 하나의 명제가 있다면, 그것은 선험적인 판단이며...... 둘째, 경험은 결코 그 판단들에 참된, 바꿔 말해 엄밀한 보편성은 주지 못하고, (귀납에 의거하여) 오직 가정된 비교적인 보편성만을 준다....... 그러므로 한 판단이 엄밀한 보편성을 갖는다고 생각된다면, 다시 말해 단 하나의 예외 가능성도 인정되지 않는 것으로 생각된다면, 그 판단은 경험에서 도출된 것이 아니라, 절대적으로 선험적으로 타당한 것이다(B3[2].)

칸트는 선험적 인식과 경험적 인식을 구별할 수 있는 준거로 필연성과 보편성을 들고 있다. 경험은 반드시 그러해야만 한다는 필연성을 보장하지 못하며, 단지 대개의 경우에 그러하다는 상대적인 보편성만을 보장한다. 필연성과 절대적 보편성을 지닌 판단은 경험으로부터 유래하지 않은 선험적인 것이다. 칸트는 선험적인 지식의 예로 수학을 든다.

> 그러한 필연적인 그리고 엄밀한 의미에서 보편적인, 그러니까 선험적인 순수 판단들이 인간의 인식 중에 실제로 있음은 용이하게 지시될 수 있다. 사람들이 학문들에서 그러한 예를 구하고자 한다면, 수학의 모든 명제들을 내다보기만 해도 된다(B5).

칸트의 견해를 따른다면, 곱셈의 교환법칙, 곧 임의의 자연수 a, b에 대하여 $a\times b=b\times a$는 필연성과 절대적 보편성을 지니는 선험적 지식이다. 이와 같은 칸트의 관점에 따르면, 곱셈의 교환법칙을 그 선험적 성격이 온전히 드러나는 방식으로 다루는 것이 타당하다. 어느 시점에서는 아동의 발달 및 이해 수준을 고려하여 선험적 지식을 경험적 지식인 양 다루는 것이 용인될 수 있을 것이다. 그러나 선험적 지식을 경험적 지식으로 변환하여 다루고 거기에 머무른다면, 수학적 지식이 지닌 선험적 성격을 드러내지 못한다는 점에서 부족할 것이다.

3×4가 4×3과 같은지 알아보는 보통의 방법은 3×4와 4×3 두 곱셈을 각각 계산하고([그림 3])의 ①, ②), 그 결과를 비교하고(③), 결과의 같음에 기초하여 두 곱셈식이 같다(④)는 결론을 내리는 것이다.



[그림 3] 12를 매개로 한
3×4=4×3

2) B는 순수이성비판의 2판을 지칭한다.

그러나 이와 같이 하여 3×4와 4×3이 같다는 것은 다른 두 곱셈 이를테면 6×7과 7×6이 같다는 것과는 별 상관이 없다. 6×7이 7×6과 같은지를 알기 위해서는 다시 6×7=42, 7×6=42의 계산을 하여 그 결과가 같은지 확인해야 한다. 마찬가지로 8×9와 9×8이 같은지 알기 위해서는 다시 8×9=72, 9×8=72의 계산을 하여 결과가 72로 같음을 확인하여야 한다. 이와 같이 3×5와 5×3, 6×7과 7×6, 8×9와 9×8과 같은 개별 사례들에서 각각 계산을 수행하여 확인한 결과를 토대로, 귀납에 의해 $a \times b = b \times a$ 라는 일반 법칙을 추측할 수 있다. 이와 같은 방식은 귀납적 사고 경험을 제공한다는 관점에서 보면 좋은 것이지만, 교환법칙이 지닌 선험적 성격을 드러내지 못한다는 점에서는 부족하다.

수학적 지식의 선험성, 즉 필연성과 절대적 보편성과 관련하여 칸트의 도식(圖式, schema)과 도상(圖像, image)의 구분에 주목할 필요가 있다. 이를테면, 삼각형을 하나 그릴 때, 그려진 개별 삼각형 그림은 도상에 해당하며 이 개개의 삼각형을 그리는 보편적인 규칙이나 절차는 도식에 해당한다. 도식은 순수한 선험적 상상력의 산물이다(B181). 한 삼각형은 특수한 개별 도형으로 인식될 수도 있고, 일반적인 삼각형의 대표로 인식될 수도 있다. 이 후자의 인식을 가능하게 하는 것이 선험적 상상력의 작용이다. 순수 지성의 도식 기능은 도상을 제공하는 상상력의 보편적인 작용 방식으로서 본질상 역동적이다. 칸트는 개념에 도상을 제공하는 상상력의 보편적인 작용 방식의 표상인 도식에 관해 다음과 같이 말한다.

> 도식은 항상 그 자체는 오직 상상력의 생산물이다. 그러나 상상력의 종합은 개별적인 직관이 아니라, 감성을 규정함에서 통일만을 의도로 가지고 있으므로 도식은 도상과는 구별되어야 한다. 그래서 만약에 내가 다섯 개의 점들을 차례로 찍는다면, • • • • • 이것은 수 5의 도상이다. 반면에 내가 5도 될 수 있고 100도 될 수 있는 수 일반을 단지 사고한다면, 이 사고는 이 도상 자체라기보다는 일정한 개념에 따라 한 양(예컨대 1000)을 도상에서 표상하는 방법의 표상이다. 1000의 경우에는 나는 그 도상 자체를 일별하기는 어렵고 그것을 개념과 비교하기는 힘들 터이다. 그래서 나는 한 개념에게 그것의 도상을 제공하는 이 상상력의 보편적인 작용방식의 표상을 이 개념에 대한 도식이라고 부르는 것이다(B 179-180).

도식과 도상에 대한 칸트의 구분은 피아제의 사고의 조작적 측면과 형상적 측면의 구분에 대응한다. 피아제에 의하면 수학적 지식의 근원은 사물이 아닌 인간의 행동으로, 수학적 개념은 내면화된 가역적인 행동인 조작으로부터의 추상화에 의해 형성된 것이다. 역동적인 일반적 도식을 수학적 지식의 본질로 보는 입장에서, 곱셈의 교환법칙도 모종의 도식을 나타내는 것으로 간주할 수 있다.

$a \times b = b \times a$에서 좌변과 우변은 등호로 연결되어 있다. 좌변과 우변은 각각 a개가 b번 있는 상황과 b개가 a번 있는 상황을 나타낸다. 곱셈의 교환법칙 이해의 핵심은 좌변과 우변 각각의 곱셈식의 의미를 넘어서, 그 둘을 연결하는 등호의 도식적 의미를 이해하는 것이다. 이를테면 3×4=4×3에서 등호는 3×4를 4×3으로 변환하고 역으로 4×3을 3×4로 바꾸는 모종의 도식을 나타낸다고 볼 수 있다.

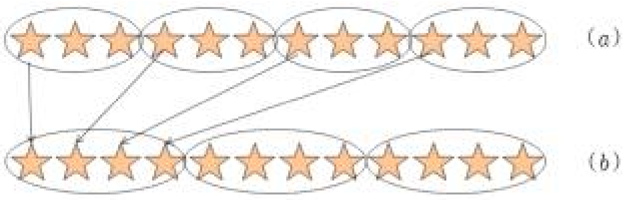
3×4=4×3을 [그림 4]와 같이 나타내었다고 하자. [그림 4]에서 윗줄은 3×4를 나타내고 아랫줄은 4×3을 나타낸다.

[그림 4] 등호의 의미: 대상의 동일함

이 그림에서 등호는 무엇을 나타내는가? 윗줄과 아랫줄에 같은 개수의 별이 있는 것을 나타낸다. ([그림 3]에서 3×4와 4×3의 같음은 12라는 계산 결과를 근거로 확인되었지만, 여기서는 곱의 결과가 얼마인지 몰라도 된다.) 등호는 도식이 아니라 윗줄과 아랫줄에 있는 몇 개의 별이라는 동일 사물을 나타낸다. [그림 4]의 윗줄과 아랫줄을 시간적인 선후의 차이를 공시적으로 나타낸 것으로 볼 수도 있다. 이렇게 보면 윗줄은 주어진 별을 3개씩 묶어 센 초기 행동을 나타내고, 아랫줄은 동일한 대상을 4개씩 묶어 센 나중 행동을 나타낸다. 이때 좌변과 우변의 곱셈식은 이전과 이후의 두 행동을 나타내지만, 이때도 등호는 어떤 행동을 나타낸다기보다 주어진 동일한 대상을 나타낸다. 그러므로 주어진 대상을 단순히 3개씩 묶어 세고 다시 4개씩 묶어 세는 활동은, 등호를 핵심으로 하는 곱셈의 교환법칙의 도식적 특성을 제대로 나타내지 못한다.

이와 같은 방법은 3×4가 4×3과 같아야 하는 필연성도 드러내지 못한다. 주어진 대상을 3개씩 묶은 결과 4묶음이 나오고, 다시 4개씩 묶은 결과 3묶음이 나왔을 뿐이다. 3개씩 묶어 4묶음이 나온 것을 4개씩 묶으면 반드시 3묶음이 나올 수밖에 없다는 필연성은 [그림 4]에서 드러나지 않는다. Van de Walle 외(2009)에 의하면, 8개씩 3묶음을 나타내는 그림과 3개씩 8묶음인 그림이 같다는 것은 알아채기 어렵고, 3칸씩 8번 건너뛴 것과 8칸씩 3번 건너뛴 것이 같은 점에 도착한다는 것도 쉽게 이해하기 어렵다.

3×4를 4×3으로 변환할 수 있고 역으로 4×3을 3×4로 변환할 수 있다는 교환법칙에서 등호의 도식적 의미는 [그림 5]에서 분명히 드러난다.

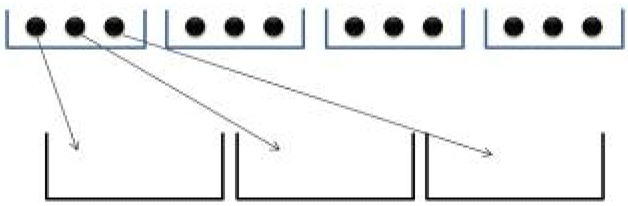


[그림 5] 3×4를 4×3으로 바꾸기(1): 3×4=4×□

[그림 5]의 윗줄 (a)는 3개씩 4묶음 곧 3×4를 나타낸다. (a)의 첫째 묶음에서 첫째 별, 둘째 묶음에서 첫째 별, 셋째 묶음에서 첫째 별, 넷째 묶음에서 첫째 별을 꺼내 [그림 5]의 아랫줄 (b)에 있는 4개의 별로 이루어진 묶음을 하나 만든다. 이어서 (a)의 각 묶음에서 둘째 별들을 꺼내 4개의 별로 이루어진 둘째 묶음을 만든다. 이어서 (a)의 각 묶음에서 셋째 별들을 꺼내 4개의 별로 이루어진 셋째 묶음을 만든다. 이와 같이 하여 3개씩 4묶음을 4개씩 3묶음으로 바꿀 수 있다. 역으로, 마찬가지 방법에 의해 4개씩 3묶음을 3개씩 4묶음으로 바꿀 수 있다. [그림 5]가 나타내는 방법은, [그림 4]와 마찬가지로, 계산 결과인 12를

매개로 하지 않고 3×4와 4×3의 같음을 나타내고 있다. 뿐만 아니라, [그림 4]와 달리, 3×4가 4×3이 될 수밖에 없는 필연성을 나타내고 있다. 3개의 원소로 이루어진 4묶음이 있을 때, 각 묶음에서 한 개씩 원소를 꺼내어 모으면 4개의 원소로 된 묶음이 하나 만들어진다. 처음에 각 묶음에 원소가 3개씩 있었으므로, 이와 같이 원소를 한 개씩 꺼내어 새로운 묶음을 만드는 일을 꼭 3번 할 수 있다. 따라서 만들어지는 새로운 묶음의 수는 3이 될 수밖에 없다. [그림 5]는 3×4=4×□에서 □가 3이 될 수밖에 없는 이유를 보여준다.

한편, [그림 6]은 3×4=△×3에서 △가 4가 될 수밖에 없는 이유를 나타낸다. 이 그림은 곱셈의 교환법칙이 등분 나눗셈 상황과 밀접한 관련이 있음을 시사한다. 이를테면, 12개의 공을 3개의 바구니에 똑같이 나누어 놓았을 때 한 바구니에 들어가는 공의 개수를 구하는 상황을 생각해 보자. 이 문제의 해결 방법의 하나는 공을 1개씩 차례대로 각 바구니에 놓는 것이며, 이것은 [그림 6]과 같이, 공을 한번에 3개씩 떼어, 그것을 3개의 바구니에 각각 하나씩 나누어 놓는 조작을 반복하는 것으로 압축될 수 있다(임재훈, 2013).



[그림 6] 3×4를 4×3으로 바꾸기(2): 3×4=△×3

이와 같이 하면, 아랫줄의 첫 번째 바구니에 오는 공은 윗줄의 각 그룹의 첫 번째 공, 두 번째 바구니에 오는 공은 각 그룹의 두 번째 공, 세 번째 바구니에 오는 공은 각 그룹의 세 번째 공이다. 결국 윗줄의 한 그룹에 들어있는 공의 개수가 필연적으로 아랫줄의 바구니의 개수가 되고, 윗줄의 그룹의 수가 아랫줄의 한 바구니의 공의 개수가 될 수밖에 없다. [그림 6]은 등분 나눗셈 12÷3의 해결 과정을 나타냄과 동시에 3×4=4×3을 나타낸다. 등분 나눗셈의 핵심 조작은 동시에 곱셈의 교환법칙의 핵심 조작이기도 하다.

칸트가 다섯 개의 점들을 차례로 찍는다면(• • • • •) 이것은 일차적으로 수 5의 도상이지만 이렇게 점을 찍는 방식은 도식으로서 다른 수에 일반으로 적용될 수 있다고 한 것과 같이, [그림 5]나 [그림 6]이 나타내는 조작은 6×7과 7×6, 8×9와 9×8에 대해서 완전히 동일한 방식으로 수행될 수 있는 일반성을 지니고 있다. 6개의 원소로 된 7묶음 각각에서 한 개씩 원소를 꺼내어 모으면 7개의 원소로 된 묶음 하나가 생기고 이와 같은 묶음을 만드는 일을 6번 수행할 수 있으므로 새로 생기는 묶음의 수는 6이 된다([그림 5] 참조). 또는 기존의 한 묶음에 있는 6개의 원소를 하나씩 분배하여 새로운 묶음을 만들면 6개의 새로운 묶음이 생기고, 이와 같은 작업을 7번 할 수 있으므로 새로 생긴 각 묶음에는 7개의 원소가 있게 된다([그림 6] 참조).

칸트가 말한 바와 같이, 수 1000을 도상으로 나타내어 일별하는 것은 점을 1000개나 찍어야 하므로 수 5를 도상으로 나타내어 일별하는 것보다 번거롭고 어려울 것이다. 마찬가지로 129×237=237×129를 실지로 도상으로 나타내는 것은 3×4=4×3을 도상으로 나타내는 것보다 번거롭고 어려울 것이다. 그러나 수 5의 도상을 제공하는 도식이 수 1000의 경우에도 동일하게 작용할 수 있는 것처럼, [그림 5], [그림 6]과 같은 3×4=4×3의 도상을 제공하는 일반적인 도식은 그대로 129×237=237×129에도 동일하게 적용된다. 그러므로

[그림 5], [그림 6]이 나타내는 변형 규칙을 곱셈의 교환법칙에 그것의 도상을 제공하는 선험적인 상상력의 보편적인 작용방식의 표상, 곧 곱셈의 교환법칙의 도식이라고 불러 좋을 것이다.

Ⅲ. 곱셈의 교환법칙에 내재된 기본 단위로의 분배 전략의 일반성

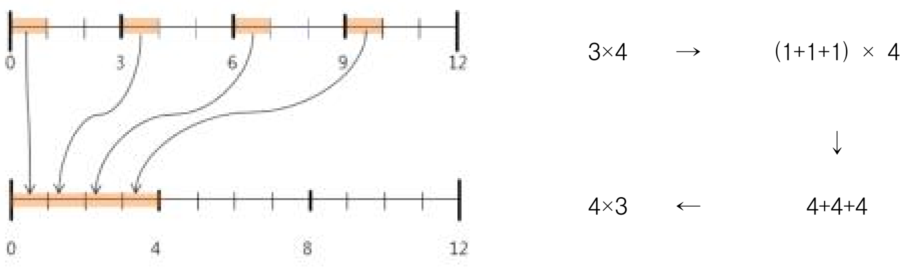
앞 장에서 살펴본 곱셈의 교환법칙의 도식은 기본 구성단위로의 분배 (또는 환원) 전략과 밀접한 관련이 있다. 먼저, 1을 a로 보내는 함수 $\times a$를 f, 1을 b로 보내는 함수 $\times b$를 g라 하면, 자연수 곱셈의 교환법칙은 [그림 7]과 같이 묘사될 수 있다.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & g(1) \arrow[d, "f"] \\ f(1) \arrow[r, "g"] & g \circ f(1) = f \circ g(1) \end{tikzcd}$$

[그림 7] 1에 대한 두 조작의 교환가능성

[그림 7]에 의하면, 곱셈의 교환법칙 $a\times b=b\times a$는 1에 두 조작 f와 g의 순서를 바꾸어 실행해도 그 결과가 같음을 뜻한다. 이때 1은 두 조작이 차례로 가해지는 출발점이라는 중요한 위치에 있다. 그러나 3×4와 같은 곱셈이 주어졌을 때에는 드러나 있는 수 3이나 4에 주목하기 쉬운 반면 드러나 있지 않은 1에 주목하기는 상대적으로 어렵다.

$3\times 4=4\times 3$의 이해에서 3을 구성하는 단위인 1에 주목하는 것이 중요하다. 앞에서 살펴본 바와 같이, $3\times 4=4\times 3$은 3의 4배를 구하는 것을 4의 3배를 구하는 것으로 바꿀 수 있음을 (마찬가지로 4의 3배를 구하는 것을 3의 4배를 구하는 것으로 바꿀 수 있음을) 나타낸다. 3의 4배를 4의 3배로 바꾸는 과정에는 3의 4배 구하기를 '1의 4배를 구하는 것을 3번 반복하기'로 대치한다는 아이디어가 들어 있다. 자연수 곱셈의 교환법칙은 a를 b배 하는 일을 '1을 b배하는 일의 a번 반복'으로 환원할 수 있음을 뜻하며, [그림 8]은 이 환원을 필연적으로 가능하게 하는 도식을 나타내고 있다.



[그림 8] 교환법칙과 분배 전략

이를 수식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$3\times4=(1+1+1)\times4=(1\times4)+(1\times4)+(1\times4)=4\times3$$

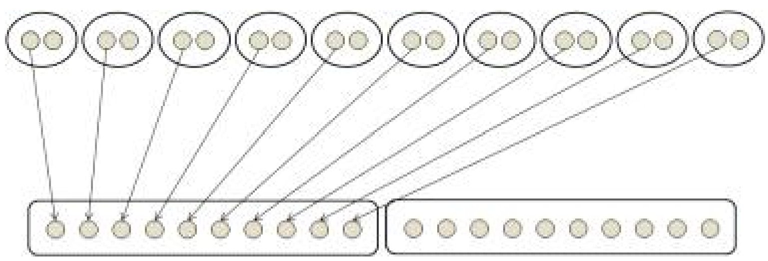
[그림 8]의 윗줄의 각 3을 각각 3개의 1로 분할하고 1씩 떼어 모아 아랫줄의 4를 만드는 것이 수식의 (1+1+1)과 (1×4) 부분에 해당한다. 이 일을 3번 반복하게 되므로 결과적으로 4+4+4로부터 4×3이 된다. 3을 4배하는 것을 3을 구성하고 있는 단위인 1을 4배하는 것의 반복으로 환원한다는 점에서, 이러한 아이디어를 구성단위로의 환원 전략이라고 칭할 수 있을 것이다. 또 수식에서 (1+1+1)×4=(1×4)+(1×4)+(1×4)가 분배 법칙에 해당한다는 점을 반영하여, 분배 전략이라고 칭할 수도 있을 것이다.

곱셈의 교환법칙의 선험적 도식과 관련된 이 전략은 3×4=4×3과 같은 간단한 곱셈 구구에만 관련된 것이 아니다. 이것은 자연수 곱셈 계산 원리, 분수의 개념, 분수의 곱셈 등 심화된 주제에 공통으로 관련되어 있다. 3×4=4×3과 같은 간단한 곱셈 구구를 소재로 한 곱셈의 교환법칙 학습에서 선험적 도식 및 분배 전략을 충실히 학습하게 함으로써 이후 자연수 곱셈 계산 원리, 분수의 개념, 분수의 곱셈 원리 이해를 위한 좋은 기초를 놓을 수 있다.

1. ×(10의 거듭제곱)

0이 붙은 수의 곱셈에는 피승수와 승수에서 0을 제외한 나머지 수끼리 곱한 다음 처음에 제외한 0의 개수만큼 0을 붙여준다는 기계적인 규칙이 있는데, 이 규칙은 곱셈의 표준 알고리즘을 비롯한 가로셈과 세로셈에 자주 사용된다(강흥규, 심선영, 2010). 이 규칙을 적용하면 곱하기 10은 피승수 끝에 0을 하나 붙이고, 곱하기 100은 0을 두 개 붙이면 된다. 이와 같은 규칙의 바탕에 놓여 있는 원리, 곧 (어떤 수)×(10의 거듭제곱)의 원리를 이해하는 것은, 십진기수법에 따른 수의 분해와 더불어, 자연수의 곱셈 원리를 이해하는 데에 매우 중요하다(김영애 2014; 정연준, 2011). 이를테면 12×23의 곱셈은 12×20과 12×3의 결합이며 12×20은 12×2의 10배이므로, 결국 $a\times10$ 형태의 곱셈의 원리가 일반적인 자연수 곱셈 원리의 바탕에 놓여 있다(변희현, 2011).

개념상 20은 10이 2개, 200은 100이 2개 있는 것을 뜻한다. 곧 20은 10×2이고, 200은 100×2이다. 그러므로 2×10=20, 2×100=200은 2×10=10×2, 2×100=100×2를 달리 표현한 것으로 볼 수 있다. 이로부터 (×10의 거듭제곱)의 원리는 곱셈의 교환법칙의 특수에 해당함을 알 수 있다. 이를테면 2×10=20은 [그림 9]와 같이 설명될 수 있다.



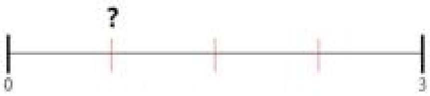
[그림 9] 2×10=10×2=20

2개씩으로 이루어진 10개의 각 그룹에서 1개씩 꺼내어 모으면 10개의 원소로 이루어진 새로운 그룹을 하나 얻는다. 이 일을 한 번 더 반복하면 10개의 원소로 이루어진 두 번째 그룹을 얻는다. 따라서 $2\times10=10\times2$이고, $10\times2=20$이므로, $2\times10=20$을 얻는다. 2×100도 마찬가지로 하여 100×2를 얻을 수 있고 이로부터 $2\times100=200$임을 알 수 있다.

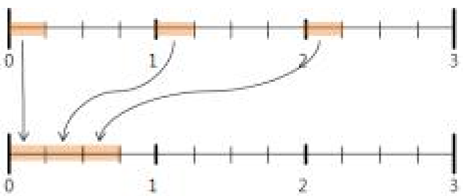
2. 몫 분수

곱셈의 교환법칙에 내재된 기본단위로의 분배 전략은 분수 개념의 이해와도 관련되어 있다. 몫 분수 $\frac{3}{4}$은 3개를 4명이 나누어 가지는 상황 및 그때 한 사람의 몫을 나타낸다. 몫 분수의 맥락에서 분수는 두 가지 의미로 복합적으로 이해될 필요가 있다. 이를테면 $\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 3개인 수로 이해되는 동시에, 4번 모아서 3이 되는 수로 이해되어야 한다(임재훈, 2012). 강미경(2013)에 의하면, 이 두 가지 의미로 분수를 복합적으로 이해하는 것은 분수 곱셈의 의미와 계산법 이해에 매우 중요하다.

이와 같은 몫 분수의 복합적 의미는 겉보기에 곱셈의 교환법칙과 관련 없는 것처럼 보인다. 그러나 몫 분수 $\frac{3}{4}$은 $3\div4$의 상황, 곧 $3\times\frac{1}{4}$과 관련 있다. [그림 10]에서 볼 수 있듯이 3의 $\frac{1}{4}$이 얼마인지 바로 알기 어렵다. 이 문제를 해결하는 한 가지 방법은 3을 구성하고 있는 단위인 1의 $\frac{1}{4}$을 구하는 조작을 반복하고, 이 조각들을 모으는 것이다([그림 11]).



[그림 10] 3의 $\frac{1}{4}$



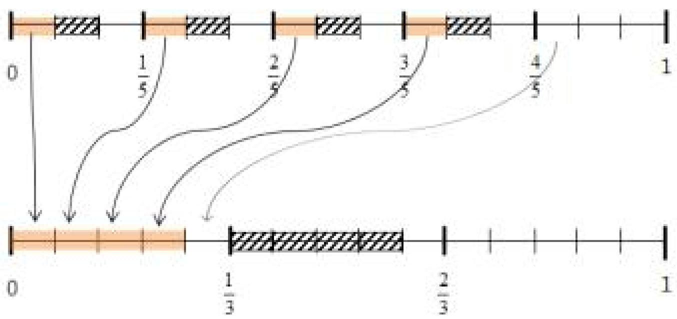
$$3\times\frac{1}{4} \rightarrow (1+1+1)\times\frac{1}{4}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{4}\times3 \leftarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

[그림 11] $3\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\times3$

[그림 11]은 몫 분수 $\frac{3}{4}$의 복합적 의미 이해의 문제가 교환법칙 이해의 문제와 맞닿아 있음을 보여 준다.

3. (분수)×(분수)

(분수)×(분수)의 계산도 교환법칙과 밀접하게 관련되어 있다. 이를테면, $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$의 곱셈을 할 때 $\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$가 얼마인지 바로 알기 어려우므로, $\frac{4}{5}$를 구성하는 기본 단위인 $\frac{1}{5}$의 $\frac{2}{3}$를 구하는 일을 4번 반복해야 한다(임재훈, 2012). 이렇게 하여 $\frac{4}{5}$의 $\frac{2}{3}$가 $\frac{8}{15}$이 됨을 알 수 있다.



[그림 12] $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

여기서 각각의 $\frac{1}{5}$을 3등분한 것들 중에서 한 조각씩을 (마지막 [$\frac{4}{5}$, 1] 구간의 한 조각까지 총 5조각을) 취하여 모으면, [그림 12]의 아랫줄의 처음 $\frac{1}{3}$ 구간이 만들어진다. 이 일을 반복하면, [그림 12]의 아랫줄 그림을 얻는다. 그런데 이 아랫줄 그림은 $\frac{2}{3}$의 $\frac{4}{5}$를 구하기 위해 $\frac{1}{3}$의 $\frac{4}{5}$를 구하는 일을 2번 반복한 것을 나타내고 있다. 이로부터 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ 임을 알 수 있다.

이 과정을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} &= (\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5})\times\frac{2}{3}\\ &= (\frac{1}{5}\times\frac{2}{3})+(\frac{1}{5}\times\frac{2}{3})+(\frac{1}{5}\times\frac{2}{3})+(\frac{1}{5}\times\frac{2}{3})\\ &= \frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15}\\ &= (\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}) + (\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15})\\ &= \frac{4}{15}+\frac{4}{15}\end{aligned}$$

$$= (\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}) + (\frac{1}{3}\times\frac{4}{5})$$
$$= (\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\times\frac{4}{5}$$
$$= \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$$

곱셈의 교환법칙의 바탕에 놓여 있는 기본 구성 단위로의 분배 전략은 단순히 곱셈구구에서 교환법칙을 가르칠 때만 일회적으로 다룰 내용으로 보이지 않는다. 이 전략은 자연수의 곱셈 원리, 분수의 개념, 분수의 곱셈에 이르는 후속 학습 과정에서 반복해서 다루어질 수 있다. ×10의 거듭제곱, 분수의 의미, 분수의 곱셈에서 교환법칙의 바탕을 이루는 이 일반적인 전략을 반복하여 다루는 것은 학생들이 이러한 주제들을 별개의 것들이 아닌 하나의 통합된 전체로 이해하는 데 도움이 될 것이다.

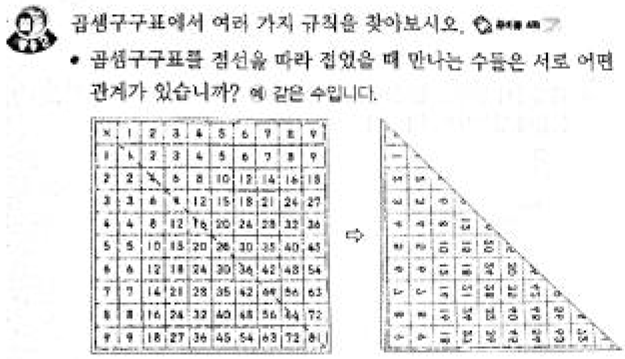
Ⅳ. 초등 수학교과서에서 곱셈의 교환법칙

이 장에서는 이상의 고찰을 바탕으로 초등 수학교과서의 곱셈의 교환법칙 취급 방식을 살펴본다. 초등 수학교과서에서 곱셈의 교환법칙은 형식화된 법칙의 형태로 제시되지 않고, 두 수의 곱하는 순서를 서로 바꾸어도 그 결과가 같다는 곱셈의 성질로 2학년 2학기에 곱셈구구 단원의 말미에서 다루어진다. 관련 차시는 2단원 곱셈구구의 10차시 ‘곱셈구구표를 만들 수 있어요.’와 11차시 ‘곱셈구구표에서 규칙을 찾을 수 있어요.’이다. 곱셈의 교환법칙과 관련된 활동은 다음과 같다.

<표 1> 곱셈구구 단원의 교환법칙 관련 활동

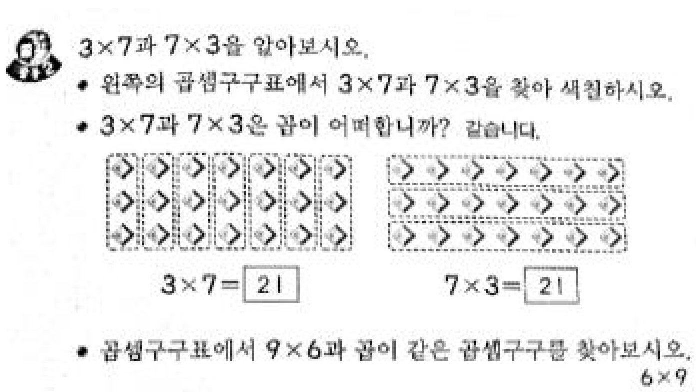
곱셈구구표를 만들 수 있어요.	곱셈구구표에서 두 수의 곱(3×7)과 순서를 바꾼 곱(7×3)의 값을 찾아, 그 값이 같음을 확인하기 직사각형 배열에서 가로와 세로 방향으로 묶어 보기
곱셈구구표에서 규칙을 찾을 수 있어요.	대각선을 따라 접었을 때 만나는 수는 서로 순서가 바뀐 두 수의 곱임을 알기

교과서에서 곱셈의 교환법칙에 관련된 활동은 크게 두 가지이다. 첫째는 곱셈구구표에서 두 수의 곱을 찾아 그 값이 같음을 확인하는 것이다. 2학년 2학기 수학교과서(초등학교 1~2학년군 수학④)의 65쪽 활동2의 세부 활동1 ‘곱셈구구표에서 3×7과 7×3을 찾아 색칠하기’, 세부 활동3 ‘곱셈구구표에서 9×6과 곱이 같은 곱셈구구를 찾아보기’, 69쪽의 활동 2가 이에 해당한다. 교과서 69쪽의 활동2에서는 곱셈구구표를 대각선을 따라 접었을 때 만나는 수 사이에 어떤 관계가 있는지 알아보고, 왜 그렇게 생각하는지를 이야기 해봄으로써 곱셈의 교환법칙을 확인하도록 하고 있다([그림 13]). 곱셈의 교환법칙은 별개의 주제로 다루어지기보다 곱셈구구표에서 찾을 수 있는 여러 규칙 중 하나로 다루어지고 있다.



[그림 13] 곱셈구구표와 교환법칙
(교육과학기술부, 2013a, 69쪽)

둘째는 직사각형 배열에서 두 곱셈의 같음을 확인하는 것이다. 3×7과 7×3의 직사각형 배열이 주어진 교과서 65쪽의 세부 활동2가 이에 해당한다([그림 14]). 직사각형 배열에 있는 대상의 개수를 각각 열과 행으로 세어 봄으로써 3×7과 7×3이 같음을 확인하게 한다.



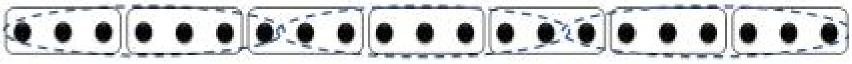
[그림 14] 직사각형 배열과 교환법칙
(교육과학기술부, 2013a, 65쪽)

교과서에 나오는 이 두 방법은, 곱셈구구표를 이용하는가 직사각형 배열을 이용하는가의 차이가 있지만, 3×7과 7×3의 값이 21임을 확인하고 이를 바탕으로 두 곱이 같다는 결론을 내리게 한다는 점에서 공통적이다. 곱셈구구표에서 이 두 값이 공통적으로 21임을 확인하고, 65쪽의 직사각형 배열에서도 3×7=21, 7×3=21을 확인한다. 그러나 II장에서 논의한 바와 같이, 21과 같은 계산 결과의 같음에 의존하여 곱셈의 교환법칙을 다루는 것은, 교환법칙의 필연성이나 일반성을 드러내지 못한다는 점에서, 수학적 지식의 선험적 성격에 부합한다고 보기 어렵다.

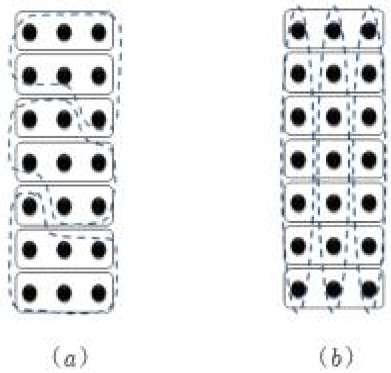
한편, 직사각형 배열 모델은 곱셈의 교환법칙의 선험성을 드러낼 수 있는 가능성을 지니고 있는 모델이다. 1~2학년군 수학④ 교사용 지도서에서는 "배열(복합)모델은 여러 사물을 가로방향과 세로방향으로 일정하게 배열하여 전체적으로 직사각형 모양을 이루도록 한 것이다....... 이런 배열모델은 곱셈의 교환법칙이나 분배법칙을 지도하는 데에도 효과적

이다.(교육과학기술부, 2013b, 134쪽)" 라고 하고 있다. 그러나 교과서의 활동에서는 동일 대상을 단순히 각각 세로방향과 가로방향으로 묶는 정도에서 멈추고 있어, 직사각형 배열 모델이 지닌 이와 같은 가능성이 충분히 부각되지 않는다.

1~2학년군 수학④ 교사용 지도서에는 "직사각형 배열 모델 외에 수 세기 칩이나 수 모형 등의 조작 활동을 곱셈의 교환법칙 이해에 활용할 수 있다.((교육과학기술부, 2013b, 167쪽) "라고 기술되어 있으나, 그 구체적인 활동 안내는 제시되어 있지 않다. 수 세기 칩을 사용하여 묶어세기 활동에서부터 곱셈의 교환법칙으로 나아가는 학습 지도를 생각해 볼 수 있다. 이를테면 3×7과 7×3의 같음을 [그림 15]와 같은 묶어세기 활동을 통해 도입하는 것을 고려할 수 있다. 그러나 이 방식 역시, II장에서 논의한 바와 같이, 곱셈의 교환법칙의 선험적 성격을 드러내는 데는 적절하지 않다. 또한 이와 같은 묶어세기는 곱셈의 교환법칙의 선험성을 드러내는 직사각형 배열과 잘 연결되지 않는다. [그림 15]에서 3개 묶음을 차례로 위로 쌓아 재배열하면 [그림 16](a)와 같이 되기 때문이다.

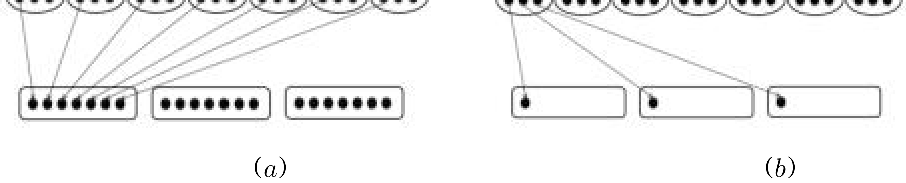


[그림 15] 묶어세기 활동을 통한 교환법칙의 지도



[그림 16] (a) [그림 15]를 직사각형으로 재배열 (b) [그림 16]을 직사각형으로 재배열

이와는 달리, [그림 17]과 같은 활동은 두 곱의 결과인 21에 의존하지 않는, 곱셈의 교환법칙의 선험적 도식을 드러낸다. 또한 [그림 17](a)의 3개씩으로 된 묶음을 차례로 위로 쌓아 배열하면, (세로 k열의 묶음이 각 가로줄 묶음의 k번째 원소들로 이루어진) [그림 16](b)와 같은 직사각형 배열을 얻는다.



[그림 17] 3×7을 7×3으로 바꾸는 두 가지 방법

이와 같이 직사각형 배열 모델은 교환법칙의 선험적인 도식과 밀접한 관련이 있지만, 현재 교과서에서 사용되는 방식에서는 자칫하면 ‘가로’, ‘세로’라는 드러난 직관적 특성에 가려서 ‘각 묶음에서 원소 하나씩을 모아 새로운 묶음을 만든다’는 도식이 드러나지 않을 수 있다. 단지 가로로 묶어서 세고 다시 세로로 묶어서 세는 것은 본질상 [그림 15]에서 행한 묶어세기와 별로 다르지 않다. 아동들은 직사각형 배열이 기존의 각 그룹의 첫 번째 원소들을 모아 새로운 그룹을 만들고 마찬가지로 두 번째, 세 번째 원소들을 각각 모아 새로운 그룹들을 만든 것을 나타내고 있다는 것을, 곧 교환법칙의 필연적이고 일반적인 도식을 매우 구조화된 방식으로 나타내고 있다는 것을 이해할 기회를 제공받아야 한다. [그림 17]과 같은 활동을 하고, 이것을 재배열하여 [그림 16](b)와 같은 직사각형 배열 모델로 연결하는 것은, 직사각형 배열 모델을 단지 가로 세로로 보는 것을 넘어서, 가로에서 세로로의 전환이 어떤 조작을 내포하고 있는지를 비롯하여 직사각형 배열과 교환법칙의 관계를 깊이 이해하는 데 도움이 될 것이다.

끝으로 한 가지 부언하면, Ⅲ장에서 논의한 바와 같이, 곱셈의 교환법칙의 선험적 도식과 관련된 기본 구성단위로의 환원 또는 분배 전략은 ×10의 거듭제곱, 분수의 의미, 분수의 곱셈을 관통한다. 그러나 초등학교 교과서에서 곱셈의 교환법칙은 곱셈구구에서 곱셈의 성질로 다루어진 후 본격적으로 다시 취급되지 않으며, 따라서 교환법칙의 선험적 도식이나 분배 전략도 그러하다. 이를테면 초등학교 3학년에서는 5×16과 같은 곱셈을 다루는데, 5×16은 5×10과 5×6으로 분해하여 해결한다. 이때 5×10의 취급에서 단순히 구구단이라는 기존 지식을 바탕으로 5×9=45에 5를 더하면 5×10=50이 된다고 넘어가지 않고, [그림 9]와 같은 활동을 통해 교환법칙의 선험적 도식 및 분배 전략을 다시 취급할 수 있을 것이다. 마찬가지로 몫 분수 맥락에서 분수의 복합적인 의미, 분수의 곱셈을 취급하면서 교환법칙과 관련된 도식과 분배 전략을 심화하여 다시 취급할 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결 어

수학적 지식 교육의 문제, 특히 어떤 내용을 어떤 방법으로 가르치는 것이 타당한가라는 문제는 그 수학적 지식의 성격을 어떻게 보는가와 맞닿아 있다. 칸트에 의하면, 수학적 지식은 선험성과 도식성이라는 특성을 지니고 있다. 수학적 지식은 상상력의 종합에 의해 도상을 산출하는 일반적 규칙인 도식을 근원으로 하는, 필연성과 절대적 보편성을 지니고 있는 선험적인 것이다.

곱셈의 교환법칙의 교육적 논의의 기초로서, 곱셈의 교환법칙의 선험성과 도식성을 분명히 할 필요가 있다. 곱셈의 교환법칙은 보통 $a\times b$와 $b\times a$의 값을 계산하고 그 값이 같은지를 확인하는 활동을 바탕으로 지도되는데, 이와 같은 방법은 나름의 장점을 지니고 있기는 하지만 곱셈의 교환법칙이 지닌 선험성과 도식성을 충분히 드러내지는 못한다. 곱셈의 교환법칙 $a\times b=b\times a$에서 등호는 $a\times b$와 $b\times a$라는 두 하위 요소를 연결하여 하나의 법칙으로 종합하는 역할을 하고 있다. 선험적 도식의 관점에서 볼 때, 등호는 $a\times b$를 $b\times a$로 변환하는 필연적이고 일반적인 조작적 절차를 상징한다. 또한 곱셈의 교환법칙의 도식은 기본구성단위로의 분배 전략과 밀접한 관련이 있다. 이 전략은 ×(10의 거듭제곱), 몫 분수 맥락에서 분수의 복합적 의미, 분수의 곱셈과 같은 곱셈 구조 관련 내용을 관통하는 일반성을 지니고 있다. 현재 초등 수학교과서에서는 곱셈의 교환법칙의 선험적 도식성

이나 기본구성단위로의 분배 전략이 충분히 강조되고 있지 않은 것으로 보인다. 수학적 지식에 관한 칸트의 관점에서 볼 때, 선험성과 도식성 및 그와 관련된 기본구성단위로의 분배 전략이 교환법칙 및 관련 내용의 지도에서 더 강조될 필요가 있다.

이 논문에서는 수학적 지식에 관한 칸트의 견해를 바탕으로 선험성과 도식성을 중심으로 곱셈의 교환법칙 지도 방안에 대하여 논의하였다. 이 논문의 이론적 논의가 초등 수학 교실에서 어떤 학년의 아동에게 어떻게 구체화되어 적용될 수 있는지 그 가능성과 효용성에 관한 경험적인 후속 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

강미경 (2013). **분수 곱셈 알고리즘 형식화 프로그램 개발 및 적용 연구: 분배 전략을 중심으로**. 경인교육대학교 석사학위논문.

강흥규, 심선영 (2010). 알고리즘의 다양성을 활용한 두 자리 수 곱셈의 지도 방안과 그에 따른 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘 이해 과정 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2). 287-314.

교육과학기술부 (2013a). **수학 1~2학년군 수학 ④**. 서울: 천재교육.

교육과학기술부 (2013b). **교사용 지도서 수학 1~2학년군 수학 ④**. 서울: 천재교육.

김남균, 김지은 (2009). 초등학교 저학년 학생의 곱셈 전략 발달에 관한 연구. **학교수학, 11**(4). 745-771.

김영애 (2014). **수학 학습 부진아를 위한 자연수 곱셈 학습 자료 개발 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

변희현 (2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석. **한국초등수학교육학회지, 15**(1). 39-56.

임재훈 (2012). 초등수학 교과서의 분수 곱셈 알고리즘 구성 활동 분석: 모델과 알고리즘의 연결성을 중심으로. **학교수학, 14**(1). 135-150.

임재훈(2013). 포함제와 등분제 맥락에서 자연수 나눗셈 계산법 지도의 문제. **한국초등수학교육학회지, 17**(3). 395-411.

정연준 (2011). 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. **학교수학, 13**(2). 267-286.

정연준, 조영미 (2012). 자연수 곱셈 계산 지도에 관한 초등학교 수학교과서 비교 분석 연구. **수학교육학연구, 22**(2). 293-309.

Kant, I. (1781). Kritik der reinen vernunft. 백종현 역 (2006). **순수이성비판**. 서울: 아카넷.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist, M. M., & Smith, N. L. (1998). Helping children learn mathematics (9th ed.) 박성선 등(역) (2012). **초등교사를 위한 수학과 교수법**. 서울: 경문사.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2009). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

<Abstract>

Commutative Property of Multiplication as a priori Knowledge

Yim, Jaehoon[3)]

Instructions for the commutative property of multiplication at elementary schools tend to be based on checking the equality between the quantities of ‘a times b ‘and b’ times a, ’ for example, 3×4=12 and 4×3=12. This article critically examined the approaches to teach the commutative property of multiplication from Kant’ s perspective of mathematical knowledge. According to Kant, mathematical knowledge is a priori. Yet, the numeric exploration by checking the equality between the amounts of ‘a groups of b’ and ‘b groups of a’ does not reflect the nature of apriority of mathematical knowledge.

I suggest we teach the commutative property of multiplication in a way that it helps reveal the operational schema that is necessarily and generally involved in the transformation from the structure of ’a times b’ to the structure of ’b times a.’ Distributive reasoning is the mental operation that enables children to perform the structural transformation for the commutative property of multiplication by distributing a unit of one quantity across the other quantity. For example, 3 times 4 is transformed into 4 times 3 by distributing each unit of the quantity 3, which results in 3×4=(1+1+1)×4=(1×4)+(1×4)+(1×4)+(1×4)=4+4+4=4×3. It is argued that the distributive reasoning is also critical in learning the subsequent mathematics concepts, such as (a whole number)×10 or 100 and fraction concept and fraction multiplication.

Key words: multiplication, commutative property of multiplication, distributive reasoning. fraction, Kant, a priori.

논문접수: 2014. 03. 15
논문심사: 2014. 03. 30
게재확정: 2014. 04. 28

3) jhyim@ginue.ac.kr