한국초등수학교육학회지 18(3) 379-397. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 18(3) 379-397.
2014. 12. 31 December 31. 2014.

# 인식의 시간성-무시간성과 수학적 지식의 교육

임재훈[1)]

칸트에 의하면 인간은 현상을 시간의 틀 속에서 수용한다. 이로부터 시간적 현상의 무시간화와 무시간적 현상의 시간화라는 이해의 두 차원을 추출할 수 있다. 이 논문에서는 무시간적인 현상의 시간화와 시간적 현상의 무시간화가 수학적 지식 이해의 문제를 논하는 하나의 관점이 될 수 있음을 몇 가지 예를 들어 고찰한다. 먼저 무시간적 현상의 시간화의 의의를 수식과 도형을 예로 하여 고찰한다. 이어서 시간적 현상의 무시간화의 의의를 자연수의 합, 패턴, 확률 등을 예로 하여 고찰한다. 이러한 고찰을 바탕으로 수학교육에서 무시간적 현상을 시간화하여 이해하려는 성향과 시간적 현상을 무시간화하여 이해하려는 성향의 함양이 중요함을 논한다.

주제어: 현상, 인식, 시간, 수학적 지식의 이해, 시간성, 무시간성

## Ⅰ. 서 론

인간은 현상을 잇따른 것으로 또는 동시인 것으로 파악한다. 시간의 본질은 흐름 또는 순서이므로, 현상을 잇따른 계열로 파악하는 것, 잇따름의 관점에서 현상을 수용하는 것을 시간적인 인식이라고 할 수 있다. 이와 대비되는 것으로, 시간 흐름의 계열을 벗어나 동시에의 관점에서 현상을 수용하는 것을 무시간적인 인식이라고 할 수 있다.

인식의 시간성과 무시간성은 수학적 지식의 이해와도 관련 있다. 예를 들어, 분수 $\frac{2}{3}$는 주어진 대상을 3등분하는 행동과 2부분을 취하는 행동을 나타내는 것으로 이해될 수 있다. 일련의 행동은 시간 속에서 순서에 따라 행해지므로, $\frac{2}{3}$를 두 행동의 표현으로 이해하는 것은 잇따름의 관점에서 파악하는 것이라고 할 수 있다. 이때 $\frac{2}{3}$는 그 자체로 단일한 수나 대상이라기보다 각각 고유한 행동을 나타내는 두 기호 3, 2를 줄 아래 위에 구분하여 써놓은 것이라고 볼 수 있다. 다른 한편, $\frac{2}{3}$는 그 자체로 1보다 작은 하나의 수 또는 하나의 양을 나타내는 단일한 수로 이해될 수 있다. 이와 같이 분수를 단일한 수로 이해하는 것은 분수를 시간 속에서 잇따라 행해지는 두 조작으로 이해하는 것과 관련되지만 구별된다.

---

1) 경인교육대학교 수학교육과

다른 예로 동전 던지기를 생각해 보자. 두 개의 동전을 던지는 사건은 동시에, 한 개의 동전을 두 번 던지는 사건은 잇따름에 대응된다. 그런데 똑같은 모양과 크기의 두 동전을 던질 때 가능성이 같은 경우가 앞면이 두 개 나오거나 앞면 뒷면이 하나씩 나오거나 뒷면이 두 개 나오는 세 가지라고 생각하는 학생이 한 개의 동전을 두 번 던질 때는 1회-2회의 결과가 앞면-앞면, 앞면-뒷면, 뒷면-앞면, 뒷면-뒷면인 네 가지라고 다르게 생각할 수 있다. 이 학생이 동전을 두 번 던지는 시간적 상황을 무시간화할 수 있다면 또는 거꾸로 두 개의 동전을 동시에 던지는 무시간적 상황을 시간화할 수 있다면 이와 같은 혼란을 벗어날 수 있을 것이다.

이 글에서는 시간적 현상의 무시간화와 무시간적 현상의 시간화가 학교수학의 이해 및 교육을 고찰하는 하나의 관점이 될 수 있음을 몇 가지 예를 통하여 확인한다. 그리고 무시간적 현상을 시간화하여 이해하려는 성향과 시간적 현상을 무시간화하여 이해하는 성향을 길러주는 교육의 중요성을 주장한다.

## Ⅱ. 인식의 시간성과 무시간성

인식의 시간적 특성과 관련하여 칸트(1781/2006)의 순수이성비판에 나타난 인간 인식의 특성에 주목할 필요가 있다. 칸트에 의하면 순수이성은 감성, 지성, 이성이라는 세 부분으로 이루어져 있다. 감성은 직관을 도구로 하여 세계를 수용하는 기능을 수행한다. 인간은 사물들 그 자체를 직접 대면하여 탐구할 수 없으며, 오로지 직관이라는 필터를 거쳐 마음에 수용된 현상만을 탐구할 수 있다. 이때 현상은 잡다가 뭉뚱그려져 있는 하나의 덩어리로 마음에 나타난다. 지성은 잡다의 덩어리인 현상을 개념적으로 이해하는 작업을 수행한다. 순수이성의 가장 깊은 부분인 이성은 신이나 자연의 합목적적인 통일성과 같은 이념을 도구삼아 지성의 개념적 탐구를 규제하고 인도한다. (신이 순수이성의 이념이라는 것은 실체로서의 신을 인정도 부정도 하지 않는다.)

인간의 인식은 시간의 틀 안에서 시작된다. 칸트에 의하면, 인간의 감성에 의한 현상 수용은 시간의 틀 안에서 이루어진다. 감성은 외적 실체가 아닌 인간 내감의 형식인 시간 직관을 도구로 하여 외부 세계를 마음에 수용한다. 칸트는 다음과 같이 말한다.

> 시간은 오로지 하나의 차원을 갖는다. 서로 다른 시간들은 동시에 있지 않고, 잇따라 있다...... 우리가 그 표상들을 마음에서 세우는 방식의 형식적인 조건으로서 기초에 놓여 있는 것인 시간 자체도 이미 잇따름의 관계, 동시적임의 관계 그리고 잇따름과 더불어 동시적인 것(고정불변인 것)의 관계를 표현한다. (Kant, 1781/2006: 251, 268)

인간은 현상을 시간 속에서, 과거-현재-미래, 1-2-3과 같이 계열로 파악한다. 시간 속에서 현상을 수용하는 인간 인식의 특수성을 뚜렷이 하기 위해 다음과 같은 질문을 해볼 수 있다. 아메바와 같은 하등 생물도 현상을 시간 속에서 잇따른 것으로 파악할까? 시간의 흐름을 지각하지 못하는 하등 생물이 있다면, 그에게 현상은 일련의 계열이 아닌 따로따로 흩어진 파편처럼 나타날지 모른다. 거꾸로 시공을 초월한 신과 같은 존재가 있다면, 그도 과거-현재-미래라는 시간 계열로 현상을 파악할까? 신은 알파와 오메가라거나 신에게는

하루가 천년 같고 천년이 하루 같다는 신과 시간의 관련에 관한 성경의 서술(International Bible Society, 1984: 1072, 1079)은 신의 인식이 시간의 계열에 제한받지 않음을, 신에게는 처음과 나중 곧 모든 시간이 마치 한 점처럼 응축되어 인식됨을 시사한다. 하등 생물에게 모든 시점이 파편화되어 있다면, 인간에게는 과거-현재-미래라는 계열로 지각되고, 신에게는 모든 것이 응축되어 한 점처럼 파악된다. 모든 시점들이 응축되어 하나의 점처럼 보인다면, 모든 시점들을 응축되기 이전의 원래의 계열과 다른 계열로 재배열하는 것도 가능할 것이다. 신은 지금 여기 있는 돌로 이미 과거에 죽은 아브라함의 자손을 만들 수 있다(International Bible Society, 1984: 853)는 표현은 신이 모든 시점을 응축된 하나의 점처럼 인식하기 때문에 모든 시점을 임의로 재배열, 재구성할 수 있음을 시사한다.

이상으로부터 인식의 시간성에 관하여 다음과 같은 논점을 얻을 수 있다. 첫째, 무시간적인 현상을 시간화하는 것이다. 예를 들어 △과 같은 도형이 시각을 통하여 지각될 때, 가장 초보적인 수준에서 그것은 하나의 덩어리로 표상된다. van Hiele(1986)의 시각적 수준이 이에 해당한다고 볼 수 있다. 이 덩어리로 지각된 도형을 구성요소로 분해하여 이해하는 과정은 △를 시간 속에 풀어 헤치는 시간화의 과정이라고 할 수 있다. (덩어리로 표상된 시각적 이미지를 분석하여 구성요소를 파악하면 van Hiele의 분석적 수준으로 수준 상승이 일어난다.) 칸트에 의하면 수학적 인식은 개념의 구성에 의한 인식이다. 삼각형의 개념은 세 선분을 차례로 긋는 작도 과정을 통해 일련의 시간 속 대상으로 구성된다. 그리고 이와 같은 구성 과정을 통해 세 변이라는 구성요소로 이루어진다는 삼각형의 성질을 파악하게 된다. 이러한 것을 무시간적 현상의 시간화라고 부르기로 한다.

둘째, 잇따른 현상을 응축하여 동시에로 인식하는 것의 중요성이다. 플라톤의 에로스론에 의하면, 신은 지자이지만 인간은 애지자이다. 무지자와 지자의 중간자인 애지자는 완전한 지자가 될 수 없지만 지자를 지향한다. 이를 인식의 시간성에 관하여 말한다면, 인간은 신처럼 모든 시점을 모조리 응축하여 동시에로 인식하지는 못하지만, 부분적으로나마 잇따른 시점들을 응축하여 한 순간처럼 인식하고 이를 바탕으로 기존 시점들을 재배열, 재구조화하는 인식을 지향할 수 있다. 이것을 시간적 현상의 무시간적 탐구 또는 시간적 현상의 무시간화라고 부르기로 한다. Sfard(1991), Gray와 Tall(1994), Dubinsky와 McDonald(2001)의 논의에서 보이는 수학적 개념의 과정 조작적 측면과 대상 구조적 측면도 시간적 현상의 무시간화와 관련된 특수한 논의로 볼 수 있다. 시간 속에서 일어나는 일련의 행동에 기초한 개념 형성 과정은 그것을 점차 무시간적인 것으로 압축하는 과정으로 볼 수 있기 때문이다.

다음에서는 무시간적 현상의 시간화와 시간적 현상의 무시간화를 수학적 지식을 예로 하여 더 자세히 고찰한다.

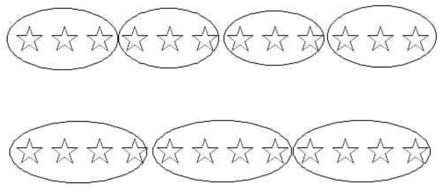
## Ⅲ. 무시간적 현상의 시간화

3×4=4×3과 같은 수식이나 △과 같은 도형은 초보적인 수준에서, 우리 앞에 있는 물체가 하나의 덩어리로 지각되듯, 한 덩어리로 지각된다. 무시간적으로 한 덩어리로 지각된 수식이나 도형은 주체의 해석을 통해 잇따른 과정으로 시간화된다.

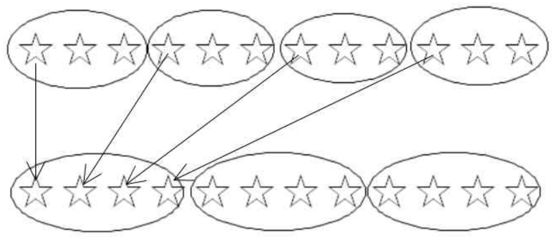
1. 수식

예를 들어 종이에 쓰여 있는 3×4=4×3이라는 수식은 시각에 의해 덩어리로 지각되어 현상으로 마음에 수용된다. 이 덩어리로서의 수식을 이해 또는 해석하는 과정은 무시간적인 수식을 시간 속에 펼쳐놓는 과정이라 할 수 있다. 예를 들어, 이 수식은 [그림 1]의 ①, ②, ③, ④의 계열로 시간 속에 펼쳐질 수 있다. 또 [그림 2]와 같이 곱셈의 결과인 12를 매개로 하지 않고 3×4를 4×3으로 곧바로 변형하는 시간화 과정으로 펼쳐질 수도 있다.2)

④
3×4 = 4×3
①↓ ↓②
12 = 12
③



[그림 1] 3×4=4×3의 시간화 (1)



[그림 2] 3×4=4×3의 시간화 (2)

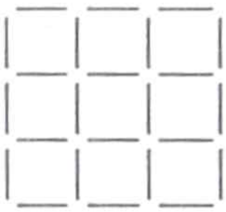
이와 같이 하나의 무시간적 대상의 시간화는 다양하게 이루어질 수 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 주어진 무시간적 대상에 대하여 미리 정해진 고정된 유일의 시간화는 존재하지 않는다. 각각의 시간화는 주어진 무시간적인 대상에 대한 주체의 고유한 능동적 해석의 결과이다.

각각의 시간화가 인식 주체의 고유한 해석으로서 자체로 나름의 의미를 지니기는 하지만, 여러 관점에서 비교되고 평가될 수 있다. 예를 들어 [그림 1]의 시간화는 구구단을 학습하여 3×4와 4×3의 결과를 이미 알고 있는 아동들 입장에서 받아들이기 쉽다. 또 7×6과 6×7, 9×5와 5×9와 같은 다른 곱셈 구구 복습을 겸하면서, 2학년 아동들이 귀납적으로 곱셈 구구의 공통성질로서 곱셈의 교환법칙을 알게 하는 데에 유용하다. 한편 [그림 2]의 시간화는 [그림 1]의 시간화와 달리, 곱셈의 결과가 얼마인지 몰라도 곱셈의 교환법칙이 성립한다는 것을 확인할 수 있으며 곱셈의 교환법칙이 지닌 일반성과 필연성을 드러낼 수 있다는 점에서 유용하다.

2) [그림 2]는 윗줄의 각 묶음에서 첫째 별을 꺼내 아랫줄에 있는 4개의 별로 이루어진 묶음을 만드는 과정을 나타낸다. 이어서 각 묶음에서 둘째 별을 꺼내 4개의 별로 이루어진 둘째 묶음을 만들고, 각 묶음에서 셋째 별을 꺼내 4개의 별로 이루어진 셋째 묶음을 만든다. 이와 같이 3개씩 4묶음을 4개씩 3묶음으로 바꿀 수 있고 마찬가지로 4개씩 3묶음을 3개씩 4묶음으로 바꿀 수 있다(임재훈, 2014).

2. 도형 (그림)

성냥개비로 만든 [그림 3]과 같은 모양에서 한 변에 n개의 성냥개비가 있다고 할 때, 이 모양을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 구하는 문제를 생각해 보자. 이 문제는 수치적 전략이나 시각적 조직화 방법에 의해 해결될 수 있다(Driscoll, 1999; Hershkowits, Arcavi, & Bruckheimer, 2001)



[그림 3] 성냥개비 개수 문제

주어진 그림은 처음에 어느 성냥개비를 놓고 그 다음에 어느 성냥개비를 놓는 등의 모종의 일련의 시간적 과정을 통하여 만들어졌을 것이다. 그러나 주어진 그림은 그렇게 하여 만들어진 결과만 나타내고 있을 뿐, 어떤 시간적인 과정을 통하여 이 그림이 만들어졌는지 보여주지 않는다. 이 시간적 과정은 이 그림을 해석하는 인식 주체에 의하여 새롭게 부여되어야 한다.

이 문제의 다양한 풀이 중 일부는 이 무시간적인 그림을 시간화한 결과로 볼 수 있다. 주어진 그림을 세로로 n개씩 성냥개비를 차례로 배열하고, 그 다음에 잇따라 가로로 n개씩 성냥개비를 배열하여 구성된 것으로 시간화할 수 있다([그림 4]). 이 시간화로부터 (전체 성냥개비의 개수)=(세로로 놓인 성냥개비의 개수)+(가로로 놓인 성냥개비의 수)=2×(세로로 놓인 성냥개비의 수)라는 풀이를 부산물로 얻을 수 있다.

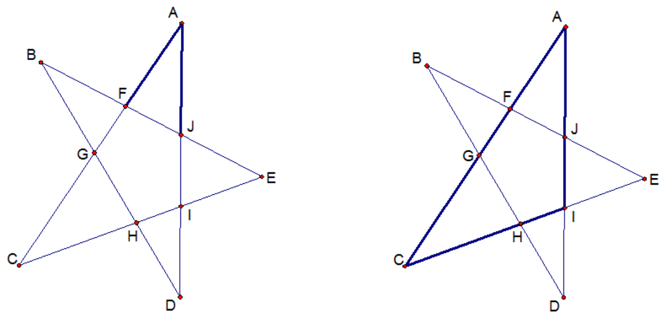
[그림 4] 성냥개비 그림의 시간화(1)

주어진 무시간적인 그림은 다르게 시간화될 수도 있다([그림 5]). 주어진 그림을 이렇게 시간화하면, 성냥개비의 개수를 (2+4+6+ .. +2n)×2로 구할 수 있다. 이 외에도 주어진 그림은 다양하게 시간화될 수 있다. 이 문제를 여러 가지 방법으로 해결해 보는 것의 일정 부분은 무시간적인 그림을 어떻게 시간화할 것인가와 관련되어 있다.

[그림 5] 성냥개비 그림의 시간화(2)

도형 문제의 해결에서도 비슷한 상황을 볼 수 있다. [그림 6]과 같은 별모양 도형에서

∠A, ∠B, ∠C, ∠D, ∠E의 합을 구하는 문제를 생각해 보자. 이 도형 자체는 그것이 어떤 시간적 과정을 거쳐서 만들어진 것인지 말해 주지 않는 무시간적인 대상이다. 이 문제를 푸는 과정은 주어진 무시간적인 도형을 시간화하는 과정과 관련 있다. [그림 6]의 (a)는 주어진 도형을 오각형에 세모 모양의 뿔이 다섯 개 붙어 만들어진 것으로 시간화하여 파악한 것이다. 이 시간화로부터, 다섯 개의 뿔에 차례로 주목하여 △AFJ에서 ∠A=180-(∠J+∠F), ∠B=180-(∠F+∠G), ∠C=180-(∠G+∠H), ∠D=180-(∠H+∠I), ∠E=180-(∠I+∠J)로부터 180×5-2×(오각형 FGHIJ의 외각의 합)=180을 구할 수 있다.



(a) (b)

[그림 6] 별 오각형의 시간화

[그림 6]의 (b)는 주어진 도형을 △ACI와 같은 삼각형 5개를 차례로 엇갈려 겹쳐 만든 것으로 시간화한 것이다. 이렇게 시간화하면, 차례로 ∠A+∠C+∠I=180, ∠B+∠D+∠J=180, ∠C+∠E+∠F=180, ∠D+∠A+∠G=180, ∠E+∠B+∠H=180으로부터 2(∠A+∠B+∠C+∠D+∠E)+(오각형 FGHIJ의 내각의 합)=900에서 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E=180을 구할 수 있다. 주어진 도형을 점 A에서 시작하여 차례로 C, E, B, D, A로 돌아가며 이어 별 모양을 그린 것으로 시간화한다면 또 다른 풀이를 얻을 수 있다.

### 3. 논의

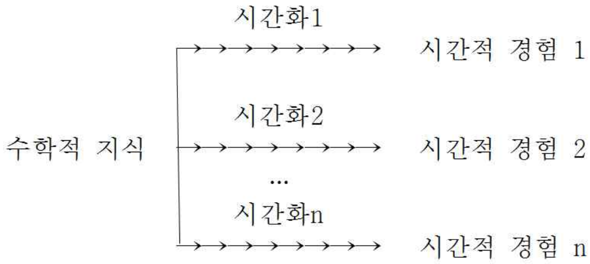
무시간적인 현상의 시간적 탐구의 의의를 교사가 수행하는 교재 연구의 성격과 관련하여 생각해 볼 수 있다. 수식 3×4=4×3이나 성냥개비 그림이나 별 다각형과 같은 도형은 지식의 최초 구성자가 시간 속에서 한 경험에서 시간 과정을 제거하여 탈시간화한 결과라고 할 수 있다. 수학적 지식의 최초 구성자가 지식 구성 이후 하는 일에는 시간 속에서 일어나는 개인의 주관적 경험을 탈시간화하여 객관적인 무시간적 표현으로 기술하는 것이 포함된다.

$$\text{시간적 경험} \xrightarrow{\text{탈시간화}} \text{무시간적 표현}$$

[그림 7] 시간적 경험의 무시간화

교사가 하는 교재 연구는 이와는 성격이 다르다. 교사는 이미 존재하는 수학적 지식, 즉

무시간적인 수식과 도형과 같은 상징으로 나타내어진 지식에서부터 탐구를 시작한다. 무시간적인 것을 무시간적으로 수용하는 것은 단순한 지각 또는 기억 이상의 것이 되지 못하므로, 무시간적인 지식을 어떻게 시간화하는가가 사고 교육과 관련하여 중요하다. 교사가 무시간적인 지식을 제대로 시간화하지 못하면, 무시간적인 지식의 단순 전달과 수용 수준의 교육에서 벗어나기 어렵다. 무시간적인 지식의 시간화는 시간 속에 일어나는 일련의 동적인 정신적인 조작의 연쇄로 나타나므로, 시간화는 정신적인 조작에 바탕을 둔 활동적인 수학 교수 학습의 바탕이 된다고도 할 수 있다. 교사는 응축된 덩어리와 같은 무시간적인 지식을 시간 속에 풀어내는 시간화 작업을 철저히 수행할 필요가 있다. 교사가 펼쳐낸 시간화는 다양할 수 있으며, 이때 교사가 펼쳐낸 시간화가 최초의 지식 구성자의 시간적 경험과 같은 것인가의 여부는 그다지 중요하지 않다.




[그림 8] 무시간적 지식의 시간화

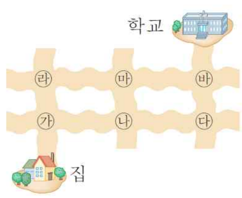
무시간적인 수학적 표현으로부터 그 표현 이면에 내재된 일련의 정신적 조작에 초점을 맞추어 다양한 시간화를 구성할 수 있는 교사의 능력은 그 수학적 지식에 잠재된 교육적 가능성을 수업에서 높은 정도로 구현할 수 있게 하는 기초가 된다. 이와 같은 능력은 실지로 무시간적인 수학적 지식을 시간화하는 경험 속에서 길러질 수 있다. 그러므로 이와 같은 능력을 갖출 수 있도록 교사 양성 기관의 수학교육 강좌에서 예비교사들이 무시간적인 수학적 지식을 다양하게 시간화해 보는 경험을 제공할 필요가 있다.

또한 구성된 다양한 시간화는 수학교육학의 특정한 이론적 관점에서 비교, 평가될 수 있다. 예를 들어 $3\times4=4\times3$의 [그림 2]의 시간화는 전형적인 예를 통한 포괄적 정당화가 경험적 증거에 입각한 귀납적 정당화보다 높은 수준의 것이라는 관점에서(Simon & Blume, 1996; 허지연, 2006) [그림 1]의 시간화보다 높은 수준의 것으로 평가될 수 있다. 또 Freudenthal(1978)의 전형적인 예에 의한 각지라는 관점에서, 전형적인 하나의 예에서 자연수 곱셈의 교환법칙의 일반적 구조를 파악하게 하는 것으로 평가될 수 있다. 각각의 시간화에 대한 교사의 평가는 이들을 수업에서 어떻게 활용할 것인지를 결정하는 데 중요한 영향을 미친다. 두 시간화의 장단점을 종합적으로 고려하여 둘 중 한 시간화만을 사용한다는 결정을 내릴 수도 있다. 두 시간화를 모두 사용하되 수업 전반부에 [그림 1]의 시간화를 사용하고 수업 후반부에 [그림 2]의 시간화를 사용한다는 결정을 내릴 수도 있다. 모든 아동을 대상으로 [그림 1]의 시간화를 사용하고 수준이 높은 아동들에게만 [그림 2]의 시간화를 수준별 자료로 제공한다는 결정을 내릴 수도 있다. 교사 양성 기관의 교육에서 예비교사들이 수학교육의 다양한 이론적 관점을 이해하고, 그 관점을 적용하여 다양한 시간화를 비교, 평가하고, 실제 수업에 각각의 시간화를 어떻게 활용하면 좋을지 생각해보는 기회 또한 제공할 필요가 있을 것이다.

## Ⅳ. 시간적 현상의 무시간화

무시간적인 것을 시간화하는 경험과 더불어 주어진 시간적인 순서를 벗어나는 경험도 중요하다. [그림 9]와 같은 최단경로 개수 구하기 문제를 초등학교에서는 출발점에서 시작하여 도착점까지 가는 경로들을 빠짐없이 조사해 나가는 방법으로 해결한다. 우수한 아동이라면 이와 같은 조사 활동을 하면서 ㉲지점을 지나는 경로의 수는 ㉯지점을 지나는 경로의 수와 ㉱지점을 지나는 경로의 수의 합과 같다는 파스칼 삼각형과 관련된 규칙을 찾아낼 수도 있을 것이다. 출발점에서 시작하여 앞으로 나아가는 길을 따라가면서 경로의 수를 조사한다는 점에서 이 풀이법은 시간적이다.

**활동 2** 그림을 보고 집에서 학교까지 가장 가까운 길로 갈 수 있는 방법은 모두 몇 가지인지 알아봅시다.




[그림 9] 최단경로 개수 문제 (교육과학기술부, 2011c: 75)

고등학교에서는 같은 것이 있는 순열을 이용하여 이와 같은 문제를 해결한다. 예를 들어 집과 학교가 가로로 5블록 세로로 3블록 떨어져 있다고 하자. 이때 집과 도서관을 잇는 최단거리의 수는 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같다. 이 풀이는 출발점에서 시작해 순차적으로 길을 따라가며 조사하는 것이 아니라는 점에서 앞의 풀이에 비해 문제에 주어진 시간적 맥락을 상대적으로 벗어난 풀이라고 할 수 있다.

방정식도 시간적인 것의 무시간화라는 관점에서 볼 수 있다. 예를 들어, [그림 10]의 문제는 처음 연필의 개수를 모르기 때문에 주어진 시간 순서에 따른 계산으로 풀 수 없다.

**활동 1** 시연이는 연필을 몇 자루 사서 재연이와 반씩 나누어 가졌습니다. 나누어 가진 연필 중 3자루를 형우에게 주었더니 5자루가 남았습니다. 시연이가 산 연필은 몇 자루인지 알아봅시다.

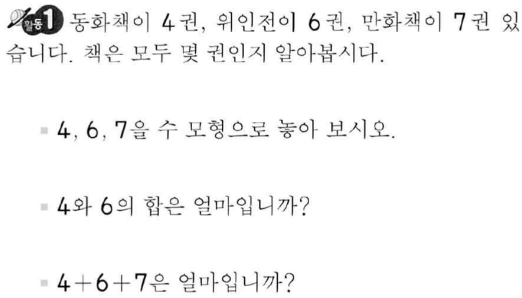
[그림 10] 방정식의 활용 (교육과학기술부, 2011c: 98)

이 문제는 거꾸로 풀기 전략으로 해결할 수 있다. 주어진 시간 순서를 존중하면서 그 순서를 역으로 돌려 5+3=8; 8×2=16과 같이 주어진 문제를 산수 문제로 바꾸어 푸는 것이다. 이 문제를 방정식 $x \div 2 - 3 = 5$ 또는 $\frac{x}{2} - 3 = 5$를 세워 풀 수도 있다. 이 방정식은 $x \div 2 -= 5 + 3$과 같이 거꾸로 풀기와 일치하는 순서의 조작으로 풀 수도 있지만, 양변에 2를 곱해 $x - 6 = 10$과 같이 문제 상황 자체에 주어진 시간적 순서를 벗어난 독립적인 식의 조작을 통해 풀 수도 있다. 이 점에서 방정식은 거꾸로 풀기 전략에 비해 문제 상황 자체에 주어진 시간적 순서로부터 상대적으로 더 자유롭다고 할 수 있다.

이 외에도 학교수학에는 시간적 현상의 무시간화라는 관점에서 고찰해 볼 수 있는 지식들이 있다. 다음에서는 세 수의 덧셈, 자연수의 합, 패턴, 확률을 예로 하여 시간적 현상의 무시간적 탐구에 대해 더 자세히 살펴본다.

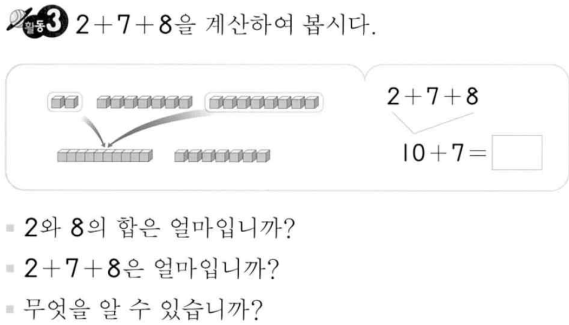
1. 세 수의 덧셈

시간적 현상을 무시간적으로 탐구하는 학습 경험은 초등학교 1학년부터 시작된다. 초등학교 1학년에서 아동들은 세 수의 덧셈을 학습한다. [그림 11]의 활동 1에서는 동화책이 4권, 위인전이 6권, 만화책이 7권 있을 때 책은 모두 몇 권인지 알아본다. 이 문제를 풀 때 식은 4+6+7과 같이 세운다. 앞의 두 수 4와 6의 합이 10이 되므로, 앞에서부터 순서대로 계산을 하면 문제를 쉽게 풀 수 있다.




[그림 11] 4+6+7 (교육과학기술부, 2010: 82)

활동 1에 이어 활동 2에서는 뒤의 두 수를 먼저 더해야 쉽게 해결할 수 있는 5+3+7이 나온다. 활동 3에서는 처음 수와 세 번째 수를 먼저 더해야 하는 2+7+8이 나온다([그림 12]).




[그림 12] 2+7+8 (교육과학기술부, 2010: 83)

시간성과 무시간성의 관점에서 볼 때, 활동 1과 활동 2, 3 사이에는 차이가 있다. 활동 1에서 아동들은 주어진 순서를 받아들이며 계산을 하여 문제를 해결하지만, 활동 2, 3에서는 주어진 순서를 벗어나게 된다.

## 2. 자연수의 합

[그림 13]은 초등학교 수학 5-2 익힘책에 나오는 문제이다. 문제 상황은 시간적 상황이며, 이 상황을 반영하여 11+12+13+…+20과 같은 식을 세우게 된다.

4 민준이는 턱걸이 연습을 첫째 날은 11회, 둘째 날은 12회, 셋째 날은 13회 하였습니다. 하루에 1회씩 늘려 가면서 턱걸이 연습을 하였다면 민준이가 10일 동안 한 턱걸이는 모두 몇 회입니까?

[그림 13] 11에서 20까지의 합 (교육과학기술부, 2011b: 135)

식 11+12+13+…+20은 11, 11+12, 11+12+13, ...와 같이 하나씩 잇따라 수가 더해져 가는 시간적 과정을 중첩하여 나타내고 있다. 이 과정은 다음과 같이 표현될 수 있다.

(...(((11+12)+13)+14)+ ... +19+20)

11에서 20까지의 자연수의 합을 구하는 문제를 이와 같은 구조로 파악하였을 때 떠오르는 자연스런 풀이는 11+12=23, 23+13=36, ... 과 같이 계산을 하는 것이다.

수학자 가우스의 어린 시절 일화를 통해 가우스의 방법이라고 알려져 있는 다른 방법은, 예를 들어 1부터 100까지의 자연수의 합을 다음과 같은 구조로 파악한다: (1+100)+(2+99)+(3+98)+ ... + (50+51). 이 방법을 위의 문제에 적용하면 11+12+13+…+20은 (11+20)+(12+19)+(13+18)+(14+17)+(15+16)=31×5=155로 해결할 수 있다. 이 풀이는 처음부터 수를 차례로 잇따라 더해간다는 원래 문제의 시간적 구조를 벗어나 있으며, 일반적으로 자연수의 합을 구하는 문제 해결에 더 효율적이다.

위의 두 가지 풀이는 경제성이나 효율성의 면에서 낮은 수준의 풀이, 높은 수준의 풀이와 같이 구분될 수도 있지만, 인식의 시간성과 무시간성 면에서 다음과 같이 구별될 수 있다: 처음 풀이는 문제 상황 및 식 11+12+13+ ... +20이 나타내는 시간 순서에 종속되어 있으나, 두 번째 풀이는 그 시간 순서를 벗어나 있다.

## 3. 패턴

패턴 문제에서 무시간적 탐구를 하노이탑 문제를 예로 하여 살펴 보자. 하노이탑 문제는 세 개의 막대 중 한 막대에 몇 개의 원판이 큰 것이 아래쪽에 오도록 쌓여 있을 때 한 번에 원판을 한 개씩 큰 원판이 작은 원판 위에 올라가지 않도록 하면서 다른 막대로 모두 옮기는 데 필요한 원판의 최소 이동 횟수를 구하는 것이다. 원판을 하나하나 이동해 가는 상황은 그 자체로 잇따름의 시간성을 지니고 있다.

패턴 문제는 귀납, 점화, 구조적 통찰과 같은 방법으로 해결할 수 있다(임재훈, 2009). 원판의 개수를 1, 2, 3, 4, 5, ... 와 같이 하나씩 늘려 가며 실제로 원판을 움직이는 활동을 해 각각의 경우의 최소이동횟수를 알아내고, 이를 바탕으로 일반적인 규칙을 찾는 것은 귀납에 해당한다. 점화는 이웃한 두 항 사이의 관계, 원판이 n-1개인 경우와 n개인 경우의 관계에 주목한다. n개의 원판을 옮기는 과정은 n-1개의 원판을 옮기는 과정, 맨 아래 제일

큰 원판을 옮기는 과정, (n-1)개의 원판을 다시 옮겨 오는 과정의 순차적 결합으로 이루어진다($a_n$ = $a_{n-1}$+1+$a_{n-1}$). 귀납에 의한 풀이와 점화에 의한 풀이는 공통적으로 하노이탑 문제 상황에 드러나 있는 시간 순서를 따른다.

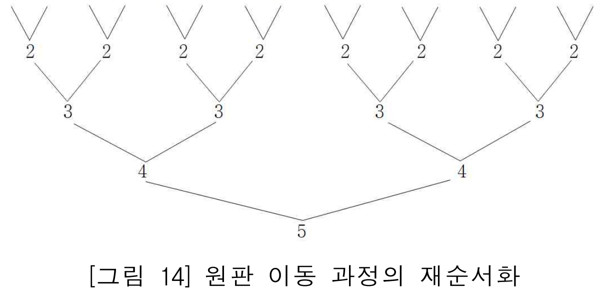
하노이 탑 문제를, 원판의 개수가 1, 2, 3, 4, ... 일 때나 n-1과 n의 관계에 주목하지 않고, 바로 n일 때의 구조를 통찰하여 해결할 수도 있다. 큰 원판이 이동하기 위해서는 바로 위의 원판이 자리를 비켜주어야 한다. 그리고 이 원판은 언젠가 다시 큰 원판 위로 올라와야 한다. 즉 아래 원판이 한번 이동할 때 바로 위의 원판은, 순서를 논외로 하고, 두 번 이동해야 한다. 마찬가지로 생각하면 그 위의 원판은 $2^2$번, 그 위의 원판은 $2^3$번, .... , 맨 위의 원판은 $2^{n-1}$번 이동해야 한다. 따라서 원판의 총 이동회수는 1+2+$2^2$+... +$2^{n-1}$이다.

시간적 현상의 무시간적 탐구와 관련하여 주목해야 할 것은 이 구조적 통찰에 의한 풀이이다. 실제 하노이 탑 교구를 가지고 원판의 개수가 1, 2, 3, 4, 5일 때 이동을 해보면 다음과 같은 순서로 원판을 옮기게 된다(오민아, 2014).

<표 1> 원판이 옮겨진 순서

| 원판의 개수 | 원판이 옮겨진 순서 |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 2 1 3 1 2 1 |
| 4 | 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 |
| 5 | 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 5 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 |

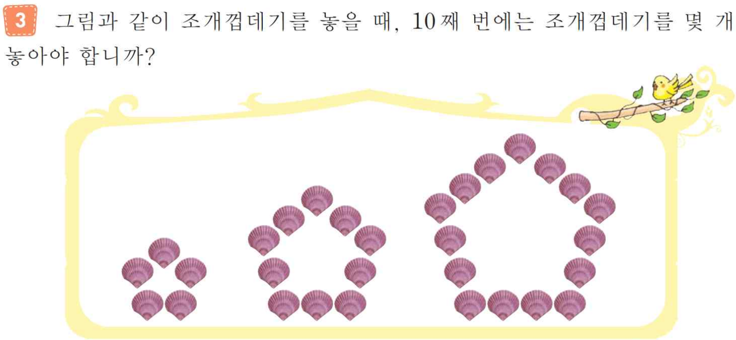
구조적 통찰에 의한 풀이는 <표 1>에 나타난 원판들의 시간적 이동 순서에 얽매이지 않는다. 구조적 통찰은 이 모든 시간적 이동 순서를 뭉뚱그려 무시간적으로 파악하고, 나아가 다음 [그림 14]와 같은 새로운 비시간적인 순서 구조를 부여한다(오민아, 2014). 기존의 시간 순서와 다른 새로운 순서 구조를 창조할 수 있는 것은 기존 시간 순서를 무시간적으로 파악하면서 벗어나기 때문이다.




[그림 14] 원판 이동 과정의 재순서화

이상의 논의는 [그림 15]와 같은 그림 패턴 문제 해결에 일반적으로 적용될 수 있다. 10번째 그림의 조개껍데기의 개수를 구할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째 그림의 조개껍데기의 개수 5, 10, 15를 구하고 이로부터 귀납으로 규칙 $5\times n$을 추측하고 $n$에 10을 대입하여

문제를 해결할 수도 있다. 이와 같은 풀이는 첫째, 둘째, 셋째 그림의 조개껍데기의 수를 순서대로 조사한다는 점에서 시간적이라고 할 수 있다.




[그림 15] 조개껍데기 개수 문제 (교육과학기술부, 2011a: 123)

이와는 달리 10번째 또는 $n$번째의 조개껍데기의 개수를 구조적으로 바로 알아보려는 접근이 있을 수 있다. 예를 들어 $n$번째에는 한 줄에 $n+1$개의 조개껍데기가 있다는 것을 이용하여 $(n+1)\times 5-5$와 같이 조개껍데기의 개수를 구할 수 있다. 시간적 상황의 무시간적 탐구라는 관점에서 볼 때, 아동들이 귀납적 접근에서 머물지 않고 이와 같은 구조적 접근까지 하도록 지도할 필요가 있다.

4. 확률

흰 공 6개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 공을 차례로 두 개 꺼낼 때, 두 번째에 꺼낸 공이 검은 공일 확률을 구하는 문제를 생각해 보자. 이때 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다고 하자. 이 문제는 다음과 같이 해결할 수 있다.

> (풀이 1) 두 번째에 검은 공을 꺼내는 경우는 (i)처음에 흰 공을 꺼내고 두 번째 검은 공을 꺼내는 경우와 (ii)처음에 검은 공을 꺼내고 두 번째 검은 공을 꺼내는 경우가 있다.
>
> (i)처음에 흰 공을 꺼내고 두 번째 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$.
>
> (ii)처음에 검은 공을 꺼내고 두 번째 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$.
>
> 따라서 두 번째 꺼낸 공이 검은 공일 확률은 $\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

이 문제의 상황과 (풀이1)은 시간적인 성격을 강하게 띠고 있다. (i)의 $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}$에서 앞의 $\frac{6}{10}$은 초기 시점에서 10개의 공 중에 흰 공을 하나 뽑을 확률을 나타낸다. 뒤의 $\frac{4}{9}$는 나

중 시점에서 9개의 공 중에 검은 공을 뽑을 확률을 나타낸다. 곱셈식 $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}$는 시간 순으로 처음 시점에서 10개 중에 흰 공을 뽑는 것을 먼저 생각하고, 이어서 다음 시점에서 9개 중에 검은 공을 뽑는 것을 생각한다는 점에서 시간 순차적이다.

이 문제를 다음과 같이 표를 그려 해결할 수도 있다.

> (풀이 2) 공 두 개를 뽑을 때 가능한 모든 경우를 다음과 같이 [그림 16](a)의 표로 나타내어 보자. 가능한 모든 경우의 수는 9×10=90이다. 두 번째에 검은 공을 뽑는 경우는 v 표시된 부분으로, 9×4=36가지이다. 따라서 두 번째에 검은 공을 뽑을 확률은 $\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$이다.

1회

2회

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| A | v | v | v | v | v | v | | v | v | v |
| B | v | v | v | v | v | v | v | | v | v |
| C | v | v | v | v | v | v | v | v | | v |
| D | v | v | v | v | v | v | v | v | v | |

(a)

1회

2회

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| A | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | | ◇ | ◇ | ◇ |
| B | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ◇ | | ◇ | ◇ |
| C | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ◇ | ◇ | | ◇ |
| D | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ☆ | ◇ | ◇ | ◇ | |

(b)

[그림 16] 표를 이용한 확률 문제의 풀이

(풀이 2)의 표에서 1회 다음에 2회라는 시간 순서는 그다지 중요하지 않다. 1회와 2회가 이것과 저것, 가로와 세로처럼 서로 구분되기만 하면 된다. (풀이 2)의 표는 처음에 뽑는 시점과 두 번째 뽑는 시점이라는 서로 다른 두 시점이 한 시점에 겹쳐진 것처럼 동시적으로 나타내고 있다. 첫 번째 공을 뽑는 사건과 두 번째 공을 뽑는 사건을 동시적으로 나타낸 결과, 90가지의 모든 경우가 구체적으로 드러나게 되므로 $\frac{\text{어떤 사건이 일어날 경우의 수}}{\text{모든 경우의 수}}$라는 확률의 정의에 의해 문제를 해결할 수 있다.

표본공간을 구체적으로 구성하고 특정한 사건이 일어날 경우의 수를 구해 확률의 뜻에 따라 해를 구한다는 점에서 보면, (풀이 2)는 (풀이 1)보다 기본적인 풀이라고 할 수 있다. 그러나 그 자체로 시간적인 순차성을 지니고 있는 상황을 무시간적인 관점에서 파악하는 것은 쉬운 일이 아니다. 시간적 상황을 무시간적인 관점에서 탐구하는 마인드가 형성되어 있지 않은 학생이라면, 시간적인 (풀이 1)보다 무시간적인 (풀이 2)를 생각해내기 어려울 수 있다.

(풀이 1)과 (풀이 2)를 서로 연결하는 경험을 제공하는 것도 시간적 관점과 무시간적 관점을 종합적으로 다룬다는 점에서 고려할 수 있다. (풀이 1)의 수식 $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=$

$\frac{6\times4}{10\times9}+\frac{4\times3}{10\times9}=\frac{24}{90}+\frac{12}{90}=\frac{36}{90}$의 의미를 표에서 찾아 보게 할 수 있다. [그림 16](b)에서 ☆로 표시된 부분은 $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{24}{90}$를 나타내며, ◇로 표시된 부분은 $\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90}$를 나타낸다.[3] 나아가, 두 사람이 공을 한 개씩 뽑을 때, 먼저 뽑든 나중 뽑든 누가 더 유리할 것이 없는 이유, 복원추출로 하든 비복원추출로 하든 두 번째 검은 공을 뽑을 확률이 같은 이유를 표에 의한 풀이와 관련짓게 할 수도 있을 것이다. [그림 16](a)에서 1회 흰 공 60칸, 검은 공 40칸(흰 공:검은 공=6:4)으로 이루어진 전체 100칸에서 2회 검은 공인 칸이 차지하는 비율은 $\frac{40}{100}$이다. 거기서 ×표 표시가 된 대각선 부분 흰 공 6칸, 검은 공 4칸(흰 공:검은 공=6:4)을 따로 떼어내고 남은 90칸(여전히, 흰 공:검은 공=54: 36=6:4)에서 2회 검은 공이 나오는 칸은 36칸이다. 따라서 두 비율($\frac{40}{100}$, $\frac{36}{90}$)이 같음을 직관적으로 확인할 수 있다.

확률과 관련하여 알려져 있는 오개념 중 하나는 시간 순서와 관련된 것이다. '주머니 속에 흰 공 2개와 검은 공 2개가 들어 있다. 공 두 개를 차례로 비복원추출할 때 첫 번째 공이 흰 색일 때 두 번째 공이 흰 색일 확률과, 두 번째 공이 흰 색일 때 첫 번째 공이 흰 색일 확률은 얼마인가' 라는 문제를 풀 때 학생들은 오류를 범한다(Shaughnessy, 1992; 나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌, 2007). 두 번째 공이 흰 색일 때 첫 번째 공이 흰 색일 확률은 $\frac{1}{3}$이지만, 어떤 학생들은 두 번째 공이 흰 색일 때 첫 번째 공이 흰 색일 확률이 $\frac{2}{4}$라고 생각한다. 이 문제를 (풀이 2)와 같이 표를 만들어 무시간적인 관점에서 고찰하면, 답이 $\frac{1}{3}$이라는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 이 오개념은 확률적 사고의 특수성을 드러내는 예로 거론되어 왔는데, 일반적으로 시간적 현상을 무시간적으로 파악하지 못할 때 생기는 여러 양상 중 하나로 볼 수 있다.

### 5. 논의

시간적 현상을 무시간적으로 파악하는 것은 주어진 시간 순서에 얽매이는 데서 생기는 오류를 벗어날 수 있게 하고, 더 효율적인 해결 방안을 찾게 하기도 하고, 새로운 관점에서 문제를 통찰할 수 있게 하기도 한다. 이러한 점에서 볼 때, 시간적 현상을 무시간적으로 파악하려는 성향과 실지로 그와 같은 파악을 할 수 있는 능력을 길러주는 것이 중요하다. 시간적 현상을 시간적으로 파악하는 성향이 일차적인 자연스런 성향이라면, 시간적 현상을 무시간적으로 파악하는 성향은 교육을 통해 형성될 수 있는 이차적인 성향일 것이다.

시간적 현상을 무시간적 차원에서 파악해 보려는 의식적인 마인드를 형성하기 위해서는

---

3) (풀이 1)과 (풀이 2)를 관련짓는다는 점에서 보면, $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}$나 $\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}$를 계산할 때 약분하여 계산하는 것은 바람직하지 않다. $\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{6\times4}{10\times9}+\frac{4\times3}{10\times9}$ 와 같이 미리 약분하지 않은 채 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하는 분수 곱셈 알고리즘을 적용하는 것이 전체 표본공간의 구성과 관련지을 수 있다는 점에서 바람직하다.

그와 같은 탐구 경험을 할 수 있는 상황을 제공해야 한다. 앞의 확률 문제처럼 잇따라 일어나는 사건은 학생들로 하여금 시간적 현상의 무시간적 탐구를 경험해 볼 수 있게 하는 좋은 소재이다. 그러나 교사가 주어진 문제 상황을 시간적인 상황으로만 파악하면 (풀이 1)에서 만족할 것이고, 시간적 현상의 무시간적으로 탐구와 관련하여 문제 상황이 지닌 잠재력을 살려내지 못할 것이다. 시간적 현상의 무시간적 탐구의 관점에서 문제 상황의 잠재력을 의식하고 있는 교사라면, 그것을 학생들이 무시간적인 관점에서 탐구해보는 경험을 할 수 있는 기회로 사용하려 할 것이다.

하노이탑 문제에서 교사가 학습목표를 다양한 방법으로 최소이동횟수를 구하는 것으로 설정하였다면, 귀납과 점화에 의한 풀이를 찾아내는 것으로 만족할 수 있다. 이러한 학습목표는 원판 이동 조작 자체에 드러나 있는 시간적 순서를 벗어나지 않은 채 달성될 수 있다. 시간적 현상을 무시간적으로 탐구하는 성향의 형성을 중요하게 생각하는 교사라면, 하노이탑 원판 이동 순서 자체에 드러나 있는 시간성을 벗어나는 재구조화까지 목표에 포함할 것이다.

패턴 문제와 자연수의 합 구하기 문제에서 볼 수 있듯이, 문제 상황에 드러나 있는 시간 순서에 매여 있는 상태에서는 통찰에 의한 풀이를 찾기 어렵다. 학생들이 구조적 통찰에 의한 풀이를 찾지 못한다면, 그것은 막연히 그것이 다른 풀이보다 어려워서가 아니라, 이 풀이를 찾아내기 위해 필요한 정신적 준비, 즉 주어진 시간 순서로부터의 탈피해야겠다는 의식이 없기 때문일 수 있다. 주어진 시간 순서라는 틀 안에 매여 있는 상태에서 무시간적인 풀이를 찾아낸다는 것은 요행에 가까울 것이다. 그러므로 교사는 학생들이 문제 상황의 표면에 드러나 있는 시간성을 벗어나 생각해 보도록 도와 줄 필요가 있다. 예를 들어 자연수의 합 구하기 문제에서, "수를 몇 개씩 그룹지어서 더해 보면 어떨까?" 라는 특수한 발문에 앞서, "문제에 겉으로 드러나 있는 시간 순서를 벗어나서 생각해 보면 어떨까?" 와 같은 일반적인 발문을 할 수 있을 것이다.

하노이탑 문제와 자연수의 합 문제에서 풀이의 경제성과 효율성의 차이는 문제의 표면에 드러나 있는 시간 순서를 벗어난 정도와 대응한다. 이것은 많은 문제에서 문제 표면에 드러나 있는 시간 순서를 벗어나는 사고를 할 때에 경제적이고 효율적인 풀이를 찾아낼 수 있음을 시시한다.

어린 가우스가 1부터 100까지의 자연수의 합을 창의적인 방법으로 구했을 때, 주어진 시간 순서에 매여 있는 다른 아동들은 가우스가 어떻게 그런 풀이를 생각해낼 수 있었는지 이해할 수 없었을 것이다. 교사나 동료 아동들은 어쩌면 "가우스는 우리와 다른 수학적인 두뇌를 타고 났다." 와 같이 선천적인 능력 탓으로 돌렸을지 모른다. 가우스가 선천전인 수학적인 재능을 타고난 것은 사실일 것이나, 가우스와 다른 아동들의 차이를 선천적인 재능의 차이로만 환원해서는, 모든 아동들이 가우스와 같은 창의적인 풀이를 발견할 수 있도록 돕는 교육적 노력을 지속적으로 경주하기 힘들다.

시간성과 무시간성이라는 관점에서 보면, 가우스와 다른 아동들의 차이는 문제에 겉으로 드러나 있는 시간 순서를 벗어나 무시간적으로 탐구하려는 의식적인 성향을 가지고 있는가 아닌가의 차이라고 할 수 있다. 주어진 시간 순서를 벗어나서 생각해 보려는 의식적인 성향이 교육적 경험을 통해서 형성될 수 있는 것이라면, 선천적인 수학적 재능이 가우스만 못한 아동이라도 그런 지속적인 교육적 경험을 제공받음으로써 그러한 성향을 형성할 가능성이 있다.

# V. 결 어

인식의 시간성과 무시간성은 학교수학의 지식을 고찰하는 한 관점이 될 수 있다. 인식의 시간성-무시간성의 관점에서 다음 네 가지를 생각할 수 있다.

· 시간적 현상의 시간적 이해
· 시간적 현상의 무시간적 이해
· 무시간적 현상의 무시간적 이해
· 무시간적 현상의 시간적 이해

시간적 현상의 시간적 이해와 무시간적 현상의 무시간적 이해는 주어진 것을 그대로 받아들이는 단순 수용에 가까운 것이므로 의식적인 교육적 노력을 기울일 것이 아니다. 의식적인 교육적 노력이 필요한 것은 시간적 현상의 무시간적 이해와 무시간적 현상의 시간적 이해이다.[4)]

수학적 지식의 교육에서 시간적 현상을 무시간적으로 탐구하는 경험, 무시간적 현상을 시간적으로 탐구하는 경험을 학생들에게 제공할 필요가 있다. 이를 통해 시간적 현상을 무시간적으로 탐구하려는 성향, 무시간적 현상을 시간적으로 이해하려는 성향이 학생들 마음에 자리잡게 해야 할 것이다. 교육을 통해 이와 같은 이차적인 성향이 형성된다면, 학생들은 무시간적 현상을 볼 때 다양하게 시간화하려고 시도할 것이다. 또 시간적 현상을 볼 때 그것을 응축하여 무시간적으로 파악하고 이를 바탕으로 문제 상황의 표면에 드러난 시간 순서와는 다른 구조를 부여하려 할 것이다. 교사는 인식의 시간성과 무시간성의 관점에서 수학적 지식이나 문제 상황이 지닌 잠재력을 볼 수 있어야 하며, 이를 바탕으로 학생들에게 시간적 현상을 무시간화하고 무시간적 현상을 시간화하는 성향을 길러 주어야 한다.

4) 시간화와 무시간화는 상보적으로 서로 교차하고 얽히며 복잡한 양상으로 전개되는 듯하다. 이에 관한 고찰은 다음으로 미룬다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2010). **수학 1-2**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011a). **수학 4-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011b). **수학 5-2 익힘책**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011c). **수학 6-2**. 서울: 두산동아.

나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌 (2007). 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법. **학교수학**, **9**(3), 397-408.

오민아 (2014). **하노이 탑의 구조 탐색을 위한 초등 수학 영재 교수・학습 자료 개발**. 경인교육대학교 교육전문대학원 석사학위논문.

이용률 (2010). **초등학교 수학의 중요한 지도 내용**. 서울: 경문사.

임재훈 (2009). 수학적 패턴 일반화 전략으로서 귀납의 한계. **경인교육대학교 교육논총**, **29**, 221-239.

임재훈 (2014). 선험적 지식으로서 곱셈의 교환법칙 교육의 문제. **한국초등수학교육학회지**, **18**(1). 1-17.

허지연(2006). **초등 수학 영재들이 보이는 정당화의 유형 사례 분석 -도형 분할 과제를 중심으로-**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers grades 6-10*. NH: Heinemann.

Dubinsky, E. D., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Springer.

Freudenthal, F. (1978). *Weeding and sowing - A preface to a science of mathematics education*. D. Reidel publishing company.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116-140.

Hershkowits, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning - the case of the matches, *International journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(2), 255-265.

International Bible Society (1984). *The holy bible (New International Version)*. Nashville, TN : Broadman & Holman Publishers.

Kant, I. (1781). Kritik der reinen vernunft. 백종현 역 (2006). **순수이성비판**. 서울: 아카넷.

Plato. 강철웅 역 (2010). **향연**. 이제이북스.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

van Hiele, P. (1986). *Structure and insight*, Academic Publishers.

<Abstract>

# The Perspective of Temporality and Atemporality and Mathematics Education

Yim, Jaehoon[5]

According to Kant, time is integral to all human cognitive experiences. Human beings perceive things in the frame of time. Phenomena are perceived in  successive way or in coexistent way. In this paper, I argue that the perspective of temporality and atemporality can be a framework to consider the issues of teaching and understanding of mathematical knowledge. Significance of temporal inquiry of atemporal phenomena is discussed with examples of mathematical expressions and geometric figures. Significance of atemporal inquiry of temporal phenomena is also discussed with examples of the sum of natural numbers, geometric pattern, and the probability of two events. Teachers should understand the potential of mathematical tasks from the perspective of temporality and atemporality and provide students with opportunities to inquire temporal phenomena atemporally and atemporal phenomena temporally.

Key words: phenomenon, cognition, time, mathematical knowledge, temporality, atemporality.

논문접수: 2014. 11. 16
논문심사: 2014. 12. 05
게재확정: 2014. 12. 19

5)jhyim@ginue.ac.kr