Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society
Vol. 15, No. 2 pp. 1109-1117, 2014

http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2014.15.2.1109

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 자유진동 특성에 미치는 비국소 탄성 효과

김우중[1], 이원홍[1*], 박원태[2], 한성천[3]
[1]경남과학기술대학교 토목공학과, [2]공주대학교 건설환경공학부, [3]대원대학교 철도건설과

Nonlocal elasticity effects on free vibration properties of sigmoid functionally graded material nano-scale plates

Woo-Jung Kim[1], Won-Hong Lee[1*], Weon-Tae Park[2] and Sung-Cheon Han[3]
[1]**Department of Civil Engineering, Gyeongnam National University of Science and Technology**
[2]**Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University**
[3]**Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College**

요 약 본 논문에서는 S형상함수를 이용한 점진기능재료 나노-스케일 판의 자유진동 특성에 미치는 비국소 탄성 이론의 효과에 대하여 연구하였다. 비국소 탄성 이론은 미소 규모 효과를 고려할 수 있고 S형상함수는 점진기능재료의 정확한 특성변화를 고려할 수 있다. 이러한 이론을 이용하여 나노-스케일 판의 고유진동수에 미치는 비국소 이론의 효과를 제시하였고, 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 (i) 거듭제곱 지수, (ii) 비국소 계수, (iii) 탄성계수 비 그리고 (iv) 나노-스케일 판의 두께 및 형상 변화 등이 나노-스케일 판의 무차원 진동수에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교 분석하였으며 해석결과는 참고문헌의 결과들과 잘 일치함을 알 수 있었다. 비국소 이론에 의한 나노-스케일 판의 진동에 관한 연구는 향후 관련연구에 비교자료로 활용될 수 있을 것이다.

Abstract We study free vibration analysis of sigmoid functionally graded materials(S-FGM) nano-scale plates, using a nonlocal elasticity theory of Eringen in this paper. This theory has ability to capture the both small scale effects and sigmoid function in terms of the volume fraction of the constituents for material properties through the plate thickness. Numerical solutions of S-FGM nano-scale plate are presented using this theory to illustrate the effect of nonlocal theory on natural frequency of the S-FGM nano-scale plates. The relations between nonlocal and local theories are discussed by numerical results. Further, effects of (i) power law index (ii) nonlocal parameters, (iii) elastic modulus ratio and (iv) thickness and aspect ratios on nondimensional frequencies are investigated. In order to validate the present solutions, the reference solutions are compared and discussed. The results of S-FGM nano-scale plates using the nonlocal theory may be the benchmark test for the free vibration analysis.

Key Words : Nonlocal elasticity theory; Sigmoid functionally graded material(S-FGM); Power law index; Free vibration analysis, Nano-scale plates

1. 서 론

금속-세라믹 복합 판은 다른 공학 분야에 널리 이용되고 있다. 높은 외부 면내 압력과 공명 거동이 복합판 구조물에 작용할 경우 구조물에 발생한 불안정한 상태는 구조적 안정에 영향을 줄 것이고, 구조물은 파괴되기 쉬

이 논문은 2012년도 경남과학기술대학교 연구조성비 지원에 의한 것임.
*Corresponding Author : Won-Hong Lee (Gyeongnam National University of Science and Technology)
Tel: +82-10-4666-1126 email: whyee@gnst.ac.kr
Received January 3, 2014 Revised January 17, 2014 Accepted February 5, 2014

운 상태가 될 것이다. 따라서 점진기능재료 판의 역학적 동적 거동에 대한 이해는 판 구조물의 안전을 평가하기 위해 매우 중요하다. Praveen과 Reddy[1]는 전단변형률과 회전관성이 고려된 판 유한요소를 사용한 점진기능재료 세라믹 금속판의 정적 및 동적 거동을 연구하였다. 점진기능재료 판의 동적해석은 고유치 문제의 또 다른 분야이다. 상대적으로 점진기능재료 판의 자유 진동해석은 주목을 받지 못하였다.

지수함수법[2]과 거듭제곱법[3]을 사용한 점진기능재료는 재료는 비록 연속이지만 급속히 변화함으로써 접촉면의 한 곳에서 응력집중이 발생할 수 있다. Chung과 Chi[4]는 새로운 체적요소를 정의하는 2개의 거듭제곱 함수로 된 S형상 점진기능재료(S-FGM)를 제한하였다. Chi와 Chung[5]은 S형상 점진기능재료의 사용으로 균열체의 응력 밀도 계수를 줄일 수 있음을 제시하였다. Zenkour[6]는 개선된 삼각급수 판 이론을 이용하여 단순지지된 점진기능재료 후판의 자유진동해석을 수행하였다. 이원홍 등[7]은 S형상 점진기능재료 판의 휨, 진동 및 좌굴해석을 수행하였다.

"나노(nano)란 그리스어의 "난장이"란 의미에서 유래한 말로 10억분의 1을 가리키는 미세 단위이다. 마이크로 및 나노 규모 분야에서 빠른 기술 발달로 인해 미소 규모 효과 및 원자간 힘들의 고려가 반드시 필요하다. 이러한 효과를 무시하였을 경우에 완벽한 결과를 얻을 수 없거나 잘못된 설계를 하게 된다. 최근 들어 규모 효과나 원자간 거리에 대해서 고려하기 시작하였다. 그럼에도 불구하고 이러한 연구에서는 수많은 방정식이 필요하게 되어 해석에 엄청난 노력과 시간이 소모되었다. 따라서 연속체 역학의 개념이 방대한 시스템의 해석에 적용되었다. 이러한 연속체 역학 이론 중에 미소 규모 효과를 포함하며 잘 알려진 방법 중의 하나가 Eringen[8-9]의 비국소 탄성 이론이다. 기존의 고전적 연속체 역학 이론들과 비교하여 Eringen[8-9]의 비국소 탄성 이론은 수많은 방정식을 풀지 않고 나노 구조물의 거동을 정확하게 예측할 수 있다.

최근들어 몇몇 연구자들이 마이크로 및 나노 구조의 연구를 수행하였다[10-11]. 이러한 연구들은 고전적 판 이론 혹은 전단변형 이론을 적용한 등방성 및 거듭제곱 점진기능재료(P-FGM) 미소 규모 판으로 제한 되었다. 특히 S형상 점진기능재료로 구성된 미소 규모 판의 연구는 전무한 상황이다.

일반적인 판 구조들은 동적 하중상태에 존재하게 된다. 나노-스케일 판 역시 고유진동수가 존재하게 되며 이러한 고유진동수는 미소 규모 효과에 의해 영향을 받게 된다. 나노-스케일 판의 효과적인 사용을 위해서는 공명현상을 피하기 위한 동적 응답에 관한 연구가 반드시 필요하다. 특히 미소 규모 효과가 고려된 점진기능재료 나노-스케일 판에 대한 자유진동해석이 매우 부족한 상황이므로 비국소 탄성이론을 이용한 나노-스케일 판의 동적 평형방정식을 제시하였다. 본 연구에서는 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였고 여러 가지 변수들이 점진기능재료 나노-스케일 판의 무차원 고유진동수에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다.

2. 동적 평형방정식

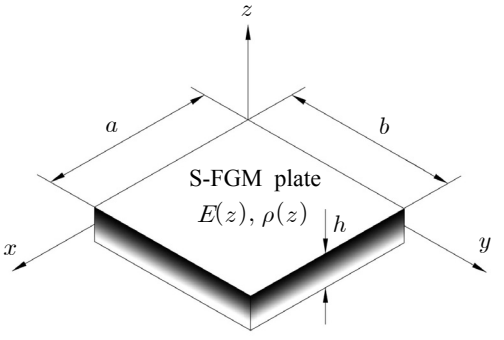
2.1 전단변형 이론

S형상 점진기능재료의 기하학적 형상은 Fig. 1과 같다.

전단변형이 고려된 변위장은 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$u_x = u_x^0 + z\phi_x \quad , \quad u_y = u_y^0 + z\phi_y$$
$$u_z = w^0 \tag{1}$$

여기서 u_x, u_y는 중립면($z=0$)의 한 점에서의 면내 변위들이고, u_z는 판의 중립면에서 수직방향 변위이다. 그리고 ϕ_x, ϕ_y는 중립면에서 전단변형각이다.



[Fig. 1] Geometry of S-FGM plate

가상 변형 에너지는 식(2)와 같다.

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\right) dAdz \tag{2}$$

여기서, σ_{ij}는 응력 텐서 성분, ε_{ij}는 변형률 텐서 성분이고 $i, j = x, y, z$ 이다.

외력에 의한 가상 일은 식(3)과 같다.

$$\delta V = \int_\Omega \left(f_i \delta u_i\right) dxdy \tag{3}$$

여기서, f_i는 외력 벡터 성분이고 u_i는 변위 벡터 성분이다.

가상 운동에너지는 식(4)와 같다.

$$\delta K = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho\left(\dot{u}_i \delta \dot{u}_i\right) dA dz \tag{4}$$

여기서, ρ는 밀도이고 $\dot{u}_i$는 u_i를 시간 변수 t에 대해서 한번 미분한 것을 나타낸다.

2.2 비국소 탄성 이론

비국소 탄성 이론에서 동적 평형방정식은 비국소 균형 법칙으로부터 구할 수 있다.

$$t_{ij,j} + \mathcal{L}\left(f_i - \rho \ddot{u}_i\right) = 0 \tag{5}$$

여기서 t_{ij}는 Hooke 응력 텐서이고 선형 미분 연산자 $\mathcal{L}$은 식(6)으로 정의된다.

$$\mathcal{L} = 1 - \mu \nabla^2, \quad \mu = e_0^2 \bar{a}^2 \tag{6}$$

여기서 μ는 비국소 변수, e_0는 실험으로 정해지는 재료 상수이고 $\bar{a}$는 내적 특성 길이이다. 나노-스케일 판에서 비국소 변수의 범위는 Wang과 Wang[12]에 제시된 범위를 사용하였다. Wang과 Wang[12]은 탄소 나노 튜브에서 식(5)의 $e_0 \bar{a}$가 2nm보다 작은 범위에 있어야 한다고 제시 하였다. 따라서 본 연구에서 사용하는 비국소 변수의 범위는 0에서 4로 가정하였다.

식(5)의 연산자를 Eringen[9]이 제안한 비국소 응력 텐서를 표현하기 위한 구성 모델에 적용하면 비국소 구성 방정식을 구할 수 있다[13].

$$\mathcal{L}\left(\sigma_{ij}\right) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{7}$$

일반적으로 식(6)의 미분 연산자 ∇는 3차원 라플라스 연산자이다. 2차원 문제를 해석하기 위해 라플라스 연산자 ∇는 2차원으로 감차할 수 있다. 2차원 선형 미분 연산자 $\overline{\mathcal{L}}$는 식(8)과 같다.

$$\overline{\mathcal{L}} = 1 - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{8}$$

미분 연산자 $\overline{\mathcal{L}}$는 z방향에 대해 독립적이다.

2.3 동적 평형방정식

Hamilton의 가상변위 원리를 식(9)와 같이 나타낼 수 있다[14].

$$0 = \int_0^T \left(\delta U + \delta V - \delta K\right) dt \tag{9}$$

식(9)에 식(2), (3)과 (4)를 대입하고 부분적분하여 정리하면 식(10)-(14)와 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_x : M^{(0)}_{xx,x} + M^{(0)}_{xy,y} - \overline{\mathcal{L}}\left(I_0 \ddot{u}^0_x\right) = 0 \tag{10}$$

$$\delta u_y : M^{(0)}_{xy,x} + M^{(0)}_{yy,y} - \overline{\mathcal{L}}\left(I_0 \ddot{u}^0_y\right) = 0 \tag{11}$$

$$\delta w^0 : M^{(0)}_{xz,x} + M^{(0)}_{yz,y} - \overline{\mathcal{L}}\left(q_z - I_0 \ddot{w}^0\right) = 0 \tag{12}$$

$$\delta \phi_x : M^{(1)}_{xx,x} + M^{(1)}_{xy,y} - M^{(0)}_{xz} - \overline{\mathcal{L}}\left(I_2 \ddot{\phi}_x\right) = 0 \tag{13}$$

$$\delta \phi_y : M^{(1)}_{xy,x} + M^{(1)}_{yy,y} - M^{(0)}_{yz} - \overline{\mathcal{L}}\left(I_2 \ddot{\phi}_y\right) \tag{14}$$

여기서, $I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\, z^i dz \;\; (i = 0, 2)$ 이고 합응력은 식(19)와 (20)에 나타내었다.

3. 점진기능재료 판의 구성방정식

3.1 S형상 점진기능재료 판의 재료특성

재료의 구성성분을 연속적으로 변화시켜 점진기능재료를 제작하게 된다. 점진기능재료의 특징은 연속적으로 등급화된 성질을 가지는 비균질 미세구조라는 것이다. 점진기능재료는 체적요소의 변화에 의해 정의되고 거듭제곱 함수, 지수함수, 혹은 체적요소를 나타내는 S형상 함수를 사용한다.

본 연구에서는 접촉면의 응력집중을 피하기 위해 S형상 함수를 사용하였다. 응력의 완만한 분포를 확보하기 위해 2개의 거듭제곱 함수를 이용한 체적요소를 식(15)로 정의할 수 있다.

$$V_f^1(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 - z}{h/2}\right)^p \quad \text{for } 0 \le z \le h/2 \tag{15a}$$

$$V_f^2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2 + z}{h/2}\right)^p \quad \text{for } -h/2 \le z \le 0 \tag{15b}$$

여기서 h는 S-FGM 나노-스케일 판의 두께이고 p는 거듭제곱 지수이다.

혼합법칙을 사용하여, S형상 점진기능재료의 재료성질은 식(16)과 같이 계산할 수 있다.

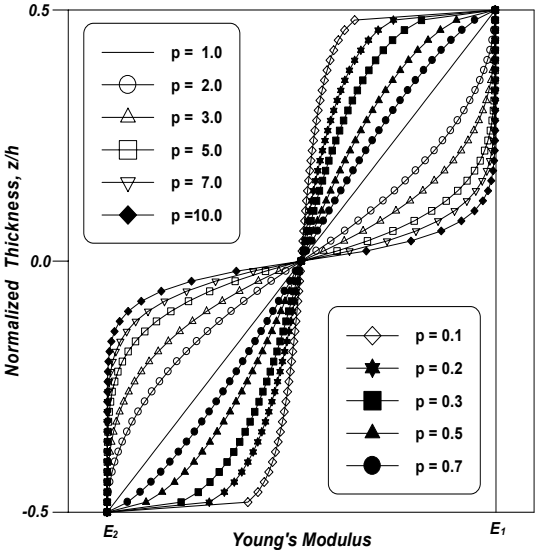
$$H(z) = V_f^1(z) H_1 + \left(1 - V_f^1(z)\right) H_2 \quad \text{for } 0 \le z \le h/2 \tag{16a}$$

$$H(z) = V_f^2(z) H_1 + \left(1 - V_f^2(z)\right) H_2 \quad \text{for } -h/2 \le z \le 0 \tag{16b}$$

여기서 H_1과 H_2는 각각 판의 상면과 하면의 재료성질이다.

식(16a)와 (16b)에서 체적요소의 변화가 S형상 분포를 나타낸다. 이러한 점진기능재료 구조물을 S형상 점진기능재료 구조물이라고 한다. 탄성 직사각형을 판을 고려하였을 때 위층과 아래층 면에서 재료의 성질, 탄성계수와 포와송 비는 다르지만 요구되는 성능에 따라 미리 규정된 값이다. 그러나 두께방향(z-축)으로 판의 탄성계수, 밀도와 포와송비는 연속적으로 변하는 것으로 가정할 수

있다. 즉, $E=E(z)$, $\rho=\rho(z)$ 이다 (Fig. 2)



[Fig. 2] The variation of elastic modulus of S-FGM plate

3.2 S형상 점진기능재료 판의 구성방정식

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 구성방정식은 식(17)과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} \tag{17}$$

여기서,

$$Q_{11}=\frac{E(z)}{1-\nu^2},\ Q_{12}=\nu Q_{11},\ Q_{66}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}. \tag{18}$$

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 합응력은 식 (19)와 같다.

$$\begin{Bmatrix}M_{xx}^{(i)}\\ M_{yy}^{(i)}\\ M_{zz}^{(i)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{Bmatrix}(z)^i dz \tag{19}$$
$$=\sum_{k=i}^{1+i}\begin{bmatrix}A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{12}^{(k)}\\ A_{12}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)}\\ A_{12}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{11}^{(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(k-i)}\\ \varepsilon_{yy}^{(k-i)}\\ \varepsilon_{zz}^{(k-i)}\end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix}M_{xy}^{(i)}\\ M_{yz}^{(i)}\\ M_{xz}^{(i)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}(z)^i dz \tag{20}$$
$$=\sum_{k=i}^{1+i}\begin{bmatrix}B_{11}^{(k)} & 0 & 0\\ 0 & B_{11}^{(k)} & 0\\ 0 & 0 & B_{11}^{(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{xy}^{(k-i)}\\ \gamma_{yz}^{(k-i)}\\ \gamma_{xz}^{(k-i)}\end{Bmatrix}.$$

여기서

$$A_{11}^{(k)}=\frac{1}{(1-\nu^2)}\left[\int_{-h/2}^{h/2}z^{(k)}E(z)dz\right]$$
$$A_{12}^{(k)}=\frac{\nu}{(1-\nu^2)}\left[\int_{-h/2}^{h/2}z^{(k)}E(z)dz\right]$$
$$B_{11}^{(k)}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\int_{-h/2}^{h/2}z^{(k)}E(z)dz\right] \tag{21}$$

본 연구에서는 1차 전단변형이론을 적용하였으므로 식 (19)와 (20)에서 $\varepsilon_{zz}=0, i=0,1$ 이다. 또한$M_{yz}^{(0)}$, $M_{xz}^{(0)}$ 는 전단보정계수(=5/6)을 곱해서 계산해야한다.

4. 해석적 방법

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 진동해석시 미소 규모 효과를 연구하기 위해 비국소 이론을 이용한 단순지지 판의 진동 해석 결과를 제시하였다. 4변이 단순지지된 경우에 Navier 방법으로 해석결과를 구할 수 있다. Navier 방법에서 판의 중립면에서의 변위는 이중 푸리에 급수로 식(22)와 같이 표현할 수 있다.

$$\left\{u_x^0(x,y,t),\ \phi_x(x,y,t)\right\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{U_{mn},\ X_{mn}\right\}\Lambda_1,$$
$$\left\{u_y^0(x,y,t),\ \phi_y(x,y,t)\right\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{V_{mn},\ Y_{mn}\right\}\Lambda_2,$$
$$\left\{w^0(x,y,t),\ q_z(x,y,t)\right\}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{W_{mn},\ Q_{mn}\right\}\Lambda_3, \tag{22}$$

여기서 $\Lambda_1=\cos\xi x\sin\eta y\cdot e^{i\omega_{mn}t}$,

$\Lambda_2=\sin\xi x\cos y\cdot e^{i\omega_{mn}t}$, $\Lambda_3=\sin\xi x\sin\eta y\cdot e^{i\omega_{mn}t}$

그리고 $\xi=\frac{m\pi}{a}$, $\eta=\frac{n\pi}{b}$, ω_{mn}은 고유진동수이다.

자유진동 해석을 위하여 식(22)을 식(10)-(14)에 대입하고 $q_z=0$을 적용하면 동적 평형방정식 식(23)을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\}+[\mathbf{M}]\{\ddot{\Delta}\}=\{\mathbf{0}\} \quad (23)$$

여기서 $\{\Delta\}^{\mathrm{T}}=\{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ 그리고 $[\mathbf{K}]$는 강성행렬, $[\mathbf{M}]$은 질량행렬이다.

5. 해석 결과

본 해석 기법의 성능을 검증하기 위하여 점진기능재료 판의 해석결과를 참고문헌[15]의 고유진동수 해석 결과와 비교하였다. 점진기능재료 나노-스케일 판의 재료 및 기하학적 성질은 식(24) 그리고 Fig. 1과 같다.

$$E_1=14.4\,\mathrm{GPa},\ E_2=1.44\mathrm{GPa}$$
$$\rho_1=12.2\times10^3\mathrm{kg/m}^3,\ \rho_2=1.22\times10^3\mathrm{kg/m}^3$$
$$\nu=0.38,\ h=17.6\times10^{-6}\mathrm{m} \quad (24)$$

진동수의 무차원 값은 식(25)를 사용하여 나타내었다.

$$\bar{\omega}=\omega\times\frac{a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \quad (25)$$

5.1 해석 결과 검증

Table 1에서는 점진기능재료 나노-스케일 판의 폭-두께 비 변화에 따른 고유진동수를 Thai 등[15]의 결과와 비교하였다. Thai 등[15]은 P- FGM판의 해석을 수행하여 직접적인 비교가 어려우나 $p=1$인 경우에는 S-FGM 판의 경우와 동일하다. 본 연구의 결과와 참고문헌의 결과가 잘 일치함을 알 수 있었다.

[Table 1] Non-dimensional frequency of FGM nano-scale plate $(b/a=1,\ \mu=0)$

a/h	Thai etc.[15] P-FGM($p=1$)	this study S-FGM($p=1$)
5	4.8744	4.8744
10	5.2697	5.2697
20	5.3880	5.3880
50	-	5.4229
100	-	5.4280

비국소 변수(μ)의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 검증하기 위하여 등방성 나노-스케일 판의 고유진동수를 Table 2에 비교하였다. 등방성 나노-스케일 판의 물성치는 식(26)과 같다.

$$E=2.6,\ \nu=0.3,\ \rho=1.0 \quad (26)$$

진동수의 무차원은 식(27)을 사용하였다.

$$\bar{\omega}=\omega\times h\sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (27)$$

비국소 변수의 변화에 따른 고유진동수 값도 참고문헌의 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

[Table 2] Non-dimensional frequency of isotropic nano-scale plate $(b/a=1,\ a/h=10)$

μ	Lee etc.[13]	this study
0	0.0930	0.0930
0.25	-	0.0908
1.0	0.0850	0.0850
2.25	-	0.0774
4.0	0.0695	0.0695

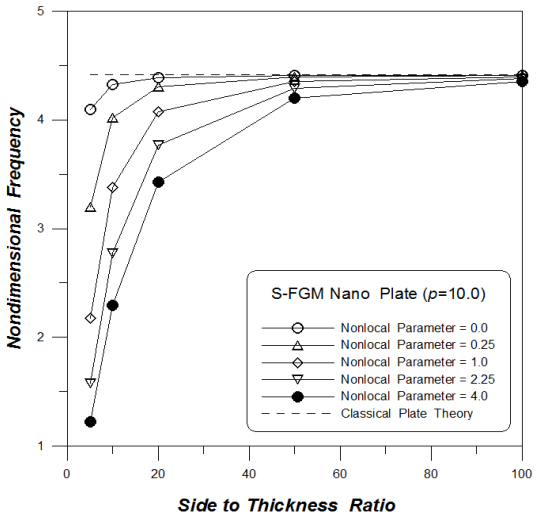
5.2 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 자유진동 해석

S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 자유진동 해석을 위한 물성치는 식(24)와 같다. Table 3은 비국성 변수와 거듭제곱 지수의 변화에 따른 고유진동수를 나타내었다. 거듭제곱 지수가 증가할수록 비국성 변수가 증가할수록 고유진동수는 줄어드는 것을 알 수 있었다.

[Table 3] Non-dimensional frequency of S-FGM nano-scale plate $(b/a=1,\ a/h=10)$

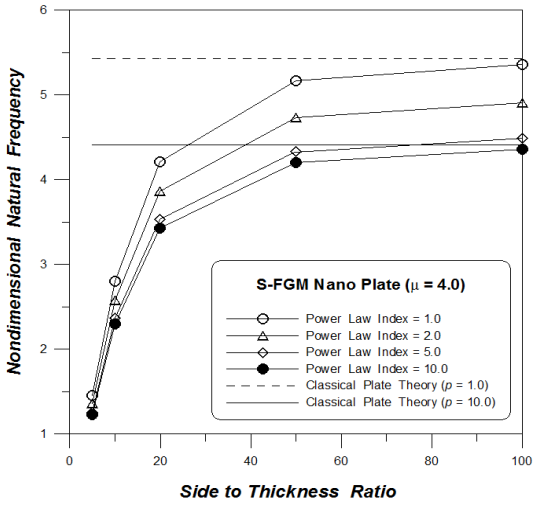
μ	S-FGM		
	$p=2$	$p=5$	$p=10$
0	4.8478	4.4508	4.3250
0.25	4.5025	4.1337	4.0168
1	3.7887	3.4784	3.3801
2.25	3.1075	2.8529	2.7723
4	2.5733	2.3626	2.2958

Talbe 3에 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 폭-두께 비 변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타내었다. 폭-두께 비는 5에서 100까지 변화시켰다. 나노-스케일 판의 비국소 변수의 값은 0에서부터 4까지 변화시키면서 고유진동수의 변화를 나타내었다. 폭-두께 비가 증가할수록, 즉 나노-스케일 판의 크기가 커질수록 고유진동수의 크기도 커짐을 알 수 있었다. 폭-두께 비가 100 이상이 되면, 즉 두께가 매우 얇은 경우에, 고유진동수는 국소 고전적 판 이론의 결과에 수렴되었다. 비국소 변수의 효과도 나노 판의 폭-두께 비가 50이상 이면 줄어드는 현상을 나타내었다. Fig. 3에서 비국소 전단변형 판 이론에 의한 판의 강성은 국소 고전적 판 이론에 비해 작아지고 이로 인해 작은 고유진동수를 가짐을 알 수 있었다. 또한 여러 가지의 다른 비국소 변수상태에서 같은 고유진동수를 추측할 수 있었다.



[Fig. 3] Effect of side-to-thickness ratio on the natural frequencies of nano-scale plate with variable non-local parameter

거듭제곱 지수의 영향을 분석하기 위하여 비국소 변수가 4인 S형상 점진기능재료 나노 판의 고유진동수를 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 3과 마찬가지로 나노 판의 폭-두께 비가 증가할수록 고유진동수의 크기도 크게 나타났다. 거듭제곱 지수가 5이상이면 5미만인 경우에 비해 점진기능재료 효과도 줄어들었다. 폭-두께 비가 100인 경우에 비국소 고전적 판 이론에 의한 결과에 수렴되었다. 이러한 경향은 전단변형 효과가 거의 무시될 수 있기 때문이라고 판단된다.

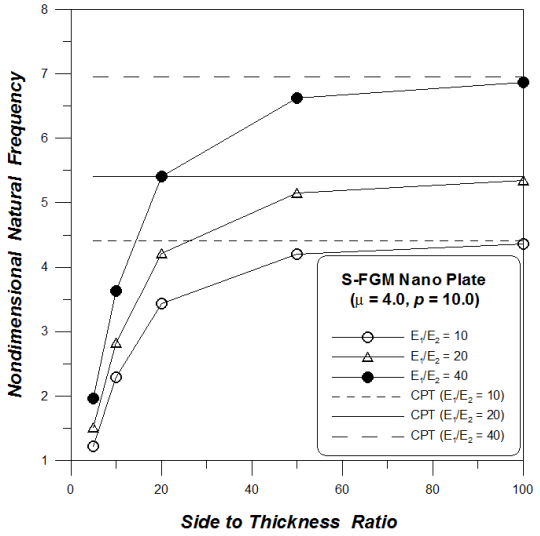


[Fig. 4] Effect of side-to-thickness ratio on the natural frequencies of nano-scale plate with variable power law index

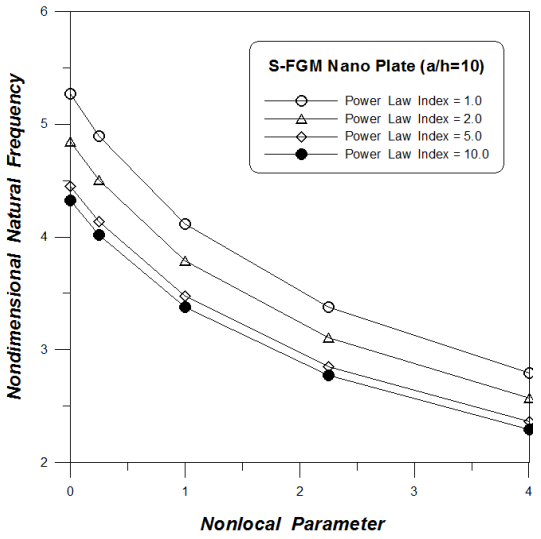
Fig. 5에서는 탄성계수 비 변화가 고유진동수에 미치는 영향에 대해서 분석하였다. 예측가능한대로 탄성계수 비의 증가는 점진기능재료 나노 판의 강성을 증대시켜 고유진동수의 증가를 유발하였다. 폭-두께 비가 증가하게 되면 비국소 고전적 판 이론 결과에 수렴되었다.

Fig. 6에서는 비국소 변수의 변화에 따른 여러 가지 거듭제곱 지수를 가지는 S형상 나노-스케일 판의 무차원 고유진동수를 나타내었다. 모든 거듭제곱 지수에서 비국소 변수가 증가할 때 고유진동수가 감소하였다. 거듭제곱 지수가 5이상이면 거듭제곱 지수에 의한 영향이 상대적으로 줄어듦을 알 수 있었다.

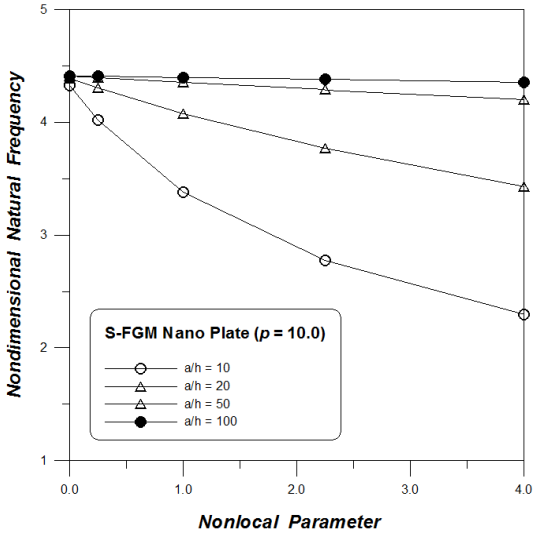
비국소 변수가 0에서부터 4까지 변하는 동안 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 무차원 고유진동수를 Fig. 7에 나타내었다. 나노-스케일 판의 폭-두께 비는 10에서부터 100까지 증가시켰다. 무차원 고유진동수는 나노-스케일 판의 폭-두께 비가 작을수록, 비국소 변수가 커질수록 작게 나타났다. 고유진동수의 차이는 비국소 변수가 증가될수록 점점 크게 나타났다.



[Fig. 5] Variation of natural frequencies of nano-scale plate with variable side-to-thickness ratio



[Fig. 6] Variation of natural frequencies of nano-scale plate with variable nonlocal parameter



[Fig. 7] Effect of non-local parameter on the natural frequencies of nano-scale plate with variable side-to-thickness ratio

6. 결 론

본 연구에서 비국소 탄성이론을 이용하여 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 자유진동해석을 위한 정식을 유도하였다. 점진기능재료의 효과를 정확하게 나타내기 위해 S형상 함수를 사용하였다.

본 연구의 결과로부터 비국소 변수가 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 고유진동수에 매우 중요한 영향을 준다는 것을 알 수 있었다. 비국소 탄성이론을 적용한 나노-스케일 판의 고유진동수는 국소 탄성이론을 적용한 경우보다 항상 작은 값을 나타내었다. 분석결과들을 정리하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

(1) 비국소 변수와 거듭제곱 지수가 커질수록 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 고유진동수는 감소하였고, 거듭제곱 지수가 5이상이면 점진기능재료 효과가 5미만인 경우에 비하여 상대적으로 감소하였다.

(2) S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 폭-두께 비가 커질수록 고유진동수의 크기도 커짐을 알 수 있었다. 폭-두께비가 100 이상이 되면 고유진동수는 고전적 판 이론의 결과에 수렴되었다.

(3) 탄성계수 비의 증가는 점진기능재료 나노 판의 강성을 증대시켜 고유진동수의 증가를 유발하였다. 폭-두께 비가 증가하게 되면 고유진동수는 비국소 고전적 판 이론 결과에 수렴되었다.

미소 규모 효과가 고려되어야 하는 점진기능재료 나노-스케일 판의 경우 최근에 연구가 활발히 진행되고 있는 상황이다. 그러나 S형상함수를 이용한 점진기능재료 나노-스케일 판의 연구는 전무한 실정이다. 본 연구의 결과는 향후 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 자유진동해석을 연구하는 연구자들을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것이며 보다 엄밀한 진동해석을 위해 S형상 점진기능재료 나노-스케일 판의 강제진동해석으로 연구의 범위를 확장시켜 나가야 할 것으로 판단된다.

Reference

[1] G. N. Praveen, J. N. Reddy, “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates”, Int. J. Solids Struct., Vol. 35, pp. 4457-4476, 1988.
DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00253-9

[2] F. Delale, F. Erdogan, “The crack problem for a nonhomogeneous plane”, J. Appl. Mech.(ASME), Vol. 50, pp. 609–614, 1983.
DOI: http://dx.doi.org/10.1115/1.3167098

[3] G. Bao, L. Wang, “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, Int. J. Solids Struct., Vol. 32, pp. 2853–2871, 1995.

[4] Y. L. Chung, S. H. Chi, “The residual stress of functionally graded materials”, Journal of Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering, Vol. 13,

pp. 1 - 9, 2001.
[5] S. H. Chi, Y. L. Chung, Y.L. “Cracking in sigmoid functionally graded coating”. Journal of Mechanics, Vol. 18, pp. 41 - 53, 2002.
[6] A. M. Zenkour, “On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory”, Int. J. Struct. Stab. Dyna., Vol. 5, pp. 279-297, 2005. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S0219455405001581
[7] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates, J. Korea Academia- Industrial cooperation Society, Vol. 9(4), pp. 1043-1049, 2008. DOI: http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2008.9.4.1043
[8] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", J. Appl. Phys., Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983. DOI: http://dx.doi.org/10.1063/1.332803
[9] A. C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, New York, 2002.
[10] H. Lu, H. Sun, A. Mao, H. Yang, H. Wang, X. Hu, "Preparation of plate-like nano a-Al2O3 using nano-aluminium seeds by wet-chemical methods", Mater. Sci.Eng., Vol. 406, pp. 19-23, 2005. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2005.04.047
[11] T. Sumitomo, H. Kakisawa, Y. Owaki, Y. Kagawa, "Structure of natural nano-laminar composites", Mater. Sci. Eng., Vol. 561, pp. 713-716, 2007. DOI: http://10.4028/www.scientific.net/MSF.561-565.713
[12] Q. Wang, C. M. Wang. "The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes". Nanotechnology, Vol. 18, pp. 075702- 075709, 2007. DOI: http://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/18/7/075702
[13] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Application of nonlocal elasticity theory for buckling analysis of nano-scale plates, J. Korea Academia-Industrial cooperation Society, Vol. 13(11), pp. 5542-5550, 2012. DOI: http://dx.doi.org/10.5762/KAIS.2012.13.11.5542
[14] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, seconded, CRC Press, London, 2007.
[15] H. T. Thai, D. H. Choi, “Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory”, Comps. Struct., Vol. 95, pp. 142-153, 2013. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.023

김 우 중(Woo-Jung Kim) **[정회원]**

- 1991년 2월 : 경상대학교 대학원 농공학과 (공학석사)
- 2004년 2월 : 경상대학교 대학원 토목공학과 (공학박사)
- 1981년 12월 ~ 2013년 6월 : 경남과학기술대학교 토목공학과 정교수

<관심분야>
철근-콘크리트 구조, 복합재료, 좌굴해석, 진동해석, 나노구조의 해석

이 원 홍(Won-Hong Lee) **[정회원]**

- 1987년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학석사)
- 1994년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재 : 경남과학기술대학교 토목공학과 정교수

<관심분야>
복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계, 진동해석, 나노구조의 해석

박 원 태(Weon-Tae Park) **[정회원]**

- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>
구조공학, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 동적해석, 나노구조의 해석

한 성 천(Sung-Cheon Han) **[정회원]**

- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학교 철도건설과 부교수

<관심분야>
선형 및 비선형 구조해석, 유한요소법, 고유치 해석, 복합구조 설계, 나노구조의 해석