

A Statistical Testing of the Consistency Index in Analytic Hierarchy Process

Jong Chan Lee^a · Myoungshic Jhun^a · Hyeong Chul Jeong^{b,1}

^aDepartment of Statistics, Korea University

^bDepartment of Applied Statistics, University of Suwon

(Received November 15, 2013; Revised December 2, 2013; Accepted December 2, 2013)

Abstract

Significant research has been devoted to the consistency index of the Analytic Hierarchy Process(AHP) from several perspectives. Critics of the consistency index in AHP state that the critical value of consistency index depends on an average of the random index based simulation study using a 9 scale comparison matrix. We found that the distribution of the consistency index followed the skew distribution according to the dimension of the comparison matrix based on a simulation study with a 9 scale comparison matrix. From the simulation study, we suggest a consistency index quantile table to assist the decision-making process in AHP; in addition, we can approximate the distribution of the consistency index to the gamma distribution under the limited assumptions.

Keywords: AHP, consistency index, random index, maximum eigenvalue, non-consistency matrix, gamma distribution.

1. 서론

Saaty (1980, 2003a)에 의해 개발된 AHP(analytic hierarchy process)는 여러 선택 사안들에 대한 중요도 가중치를 비교적 정확하게 제공하기 때문에 의사결정론에서 널리 활용되고 있다. AHP는 의사결정 문제를 계층 구조(hierarchical structure)로 정리한 후, n 개의 의사결정 대안(alternative)에 대해 쌍대 비교(pairwise comparison)를 실시하여 n 차원 순위결정행렬(혹은 비교행렬) A 를 작성하고, 고유값 분해를 통해 중요도 벡터(priority vector) $w = (w_1, \dots, w_n)'$ (단, $\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i > 0, i = 1, \dots, n$)를 계산하는 일련의 절차로 수행된다. 즉, AHP는 정성적 문제를 수량화하는 의사결정론의 일환이라 할 수 있다.

그런데, AHP가 다른 의사결정법과 구분되는 장점은 대안에 대한 가중치 w 를 도출한 후 도출된 가중치를 신뢰할 수 있는지 여부를 평가할 수 있는, 일관성 지수 CI(consistency index)를 제공한다는 점이다. 연구자는 일관성 지수 CI를 사용하여, 평가자가 작성한 비교행렬 A 의 신뢰성을 판단할 수 있다. 그런

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(2010-0008825).

¹Corresponding author: Associate Professor, Department of Applied Statistics, University of Suwon, Hwaseong, Gyeonggi 445-743, Korea. E-mail: jhc@suwon.ac.kr

Table 2.1. Nine scale of pairwise comparison matrix in AHP

점수	평가자의 판단	점수	평가자의 판단
1	동등하게 선호	6	매우 강하게 - 강하게의 중간
2	약간 - 동등하게의 중간	7	매우 강하게 선호
3	약간 선호	8	매우 강하게 - 극단의 중간
4	강하게 - 약간의 중간	9	극단적으로 선호
5	강하게 선호		

데, Saaty (1980)에 의해 제안된 일관성 지수 CI의 임계값이 특별한 통계적 근거 없이 계산되었기에 추정된 가중치 w 에 대한 확률적 판단 준거가 다소 부족하다는 단점이 제기된다. 즉, 일관성지수 임계값은 모의실험으로 계산된 값으로 활용의 타당성은 있지만, 응답일관성에 대한 통계적 검정을 실시할 수 없는 애로사항이 존재한다 (Kumar와 Ganesh, 1996; Haines 1998; Basak, 1989). 한편, AHP에 의해 유도된 w 를 사용하여 다양한 2차 통계적 분석이 가능하기 때문에, 응답자의 신뢰성을 계량화하고 검정하는 문제는 AHP에서 매우 중요하게 다루어지는 연구 분야이다 (Hahn, 2006; Basak, 2001, 2002; Scholl 등, 2005).

Ko와 Lee (2001)은 일관성지수(CI)의 분포를 연구하여 비교행렬의 차원이 증가함에 따라 CI의 분포가 어떤 변화를 하는지 관찰하고, 이를 바탕으로 수정 CI 임계값을 제안하였다. 우리는 Ko와 Lee (2001)의 연구를 통해, 응답일관성에 대한 통계적 검정론을 개발하기 위해서는 CI 분포에 대한 연구가 우선적으로 실시되어야 함을 인식하였다. 이를 위해 본 연구에서는 먼저, AHP의 모수 w 를 추정하는 방법 및 일관성 지수를 소개하고자 한다. 그리고, 무작위 비교행렬을 이용한 비모수적 방법과 오차항에 특정 분포를 가정한 모수적 방법을 사용하여 CI 분포를 추정하는 방법을 소개하기로 한다.

본 연구의 2장에서는 AHP 가중치 추정방법을, 3장에서는 응답일관성 검정을 소개하였다. 4장에서는 모의실험 분포를 사용하여 수정 CI 임계값을 소개하고, 일관성 지수검정의 개선 방향을 다루었다. 5장에서는 특별한 가정하에서 일관성 지수를 감마분포로 근사하는 문제를 다루었다.

2. AHP 가중치 추정

본 연구에서 n 은 대안(선택사안)의 수, 모든 벡터의 차원은 n 차원, 모든 행렬은 $n \times n$ 정방행렬로 정의된다. 이제, n 개의 대안 중 i 번째 대안의 중요도(weight)를 w_i , ($i = 1, \dots, n, 0 < w_i < 1$)라 하고, 중요도 벡터를 $w = (w_1, \dots, w_n)'$ 로 나타내자(단, $\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i > 0, i = 1, \dots, n$). w 는 다음과 같이 쌍대비교행렬(pairwise comparison matrix)로 표현될 수 있다.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

여기서, $c_{ij} = (w_i/w_j)$ 는 대안 i 의 중요도를 나타내는 모수 w_i 와 j 의 중요도를 나타내는 모수 w_j 의 비로 '대안 i 보다 대안 j 가 c_{ij} 배 중요하다'는 의미를 내포하고 있다. 한편, 비교행렬 C 는 대안 간의 상대적인 선호도를 모든 가능한 대안 쌍에 대하여 배수의 개념으로 기록한 행렬이기 때문에, 대안 i 와 대

안 j 의 선호강도에 대한 평가의 결과는 $c_{ji} = 1/c_{ij}$ 인 역수관계를 만족하게 된다. 그래서 C 를 양역수행렬(positive reciprocal matrix)이라 한다. 이제, 비교행렬 C 를 측정하기 위해, Table 2.1의 9점 척도를 사용하여, C 의 상삼각행렬 원소에는 $n(n-1)/2$ 회 쌍대비교 결과를, 하삼각행렬 원소에는 상삼각행렬의 역수값을 배치한 행렬 A ($a_{ij} \in \{1/9, 1/8, \dots, 1, \dots, 8, 9\}$, $a_{ij} = 1/a_{ji}$)를 작성한다. 즉, 행렬 A 의 a_{ij} 는 (w_i/w_j) 에 대한 추정치(estimate)이다. 일반적으로 a_{ij} 는 Table 2.1에 근거한 9점 척도 중 한 값을 부여하지만, 반드시 9점 척도를 따라야 하는 것은 아니며 평가자가 주관적인 판단에 의해서 1~100점의 실수 점수를 부여하기도 한다 (Vargas, 1990).

비교행렬 A 를 이용한 모수 w 의 일반적인 추정방법은 다음의 고유치 분해를 사용한다.

$$A\hat{w} = \lambda_{\max}\hat{w}.$$

단, $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n)'$, $0 < \hat{w}_i < 1$, $\sum_{i=1}^n \hat{w}_i = 1$ 이다. 즉, 비교행렬 A 의 최대고유벡터의 합이 1이 되도록 표준화한 $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n)'$ 으로 가중치를 추정하는데, 이와 같은 고유벡터법은 AHP 과정에서 가장 널리 사용되는 방법이다. 그리고 가중치를 추정하는 다양한 방법은 Jeong 등 (2012)을 참고할 수 있다.

3. 응답일관성 검정

비교행렬 A 를 사용하여 구한 \hat{w} 의 신뢰성을 평가할 때는, 비교행렬 A 의 정확도를 살펴보아야 한다. 즉, 행렬 A 는 기수적 일관성(cardinality precision) 또는 내적일치도를 가지고 있어야 한다. 예를 들어, A 의 임의의 두 원소 a_{ik} , a_{kj} 가 $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$ ($i, j, k = 1, \dots, n$)의 관계를 만족한다면 행렬 A 는 기수적 일관성(내적일치성)을 지니는 일치행렬(consistent matrix)이라 할 수 있다. 즉, 응답자는 대안 1이 대안 2보다 2배 중요하고($a_{12} = 2$), 대안 2가 대안 3보다 3배 중요하다고($a_{23} = 3$) 응답하였을 때, 대안 1은 대안 3보다 6배 중요하다고($a_{13} = 6$) 응답해야하는 등 기수적 일관성을 가지고 있어야 한다. 그런데, 대안의 수가 많아질수록 쌍대비교의 수는 증가하게 되어, 응답자의 비교행렬 내부에서 $a_{ik} \times a_{kj} \neq a_{ij}$ 인 비일치 결과가 빈번하게 발생하리라는 것을 쉽게 예상할 수 있다. 따라서 \hat{w} 의 신뢰성은 A 가 기수적 일관성에 어느 정도 근접하는지를 평가하는 것으로 대체할 수 있다.

이제, 비교행렬 $A = (a_{ij})$ 를 일치행렬 $C = (c_{ij})$ 와 오차행렬 $E = (\epsilon_{ij})$ 를 이용하여

$$A = C \circ E \quad (3.1)$$

$$\left(a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}; a_{ii} = 1; c_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, i, j = 1, \dots, n; \epsilon_{ij}, c_{ij}, a_{ij} > 0 \right)$$

와 같은 모수 w 와 오차 ϵ_{ij} 를 고려한 모형으로 나타내자. 만일 A 가 완벽한 기수적 일관성을 가지게 되면 오차행렬 E 의 모든 원소는 1의 값 가지게 된다. 즉, 비교행렬 A 의 내적일치도는 오차행렬 E 의 모든 원소가 1에 얼마나 가까운지를 평가하는 것이라고 할 수 있는데, 다음 정리 3.1은 비교행렬 A 의 내적일치도를 평가하기 위한 통계량의 성질을 나타낸 것으로, A 의 최대고유값 λ_{\max} 를 사용하여 일치도를 측정할 수 있음을 보여준다.

정리 3.1 n 차원 비교행렬 A 가 기수적 일관성을 만족하는 일치행렬이면 최대고유값 $\lambda_{\max} = n$ 이 되며, 일치성을 만족하지 못하면 $\lambda_{\max} > n$ 의 관계가 성립한다.

증명: A 의 최대고유값을 λ_{\max} , 최대고유벡터를 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$, 그리고, w 의 대각행렬을

$D_w = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \mathbf{w} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} \epsilon_{12} & \frac{w_1}{w_3} \epsilon_{13} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \epsilon_{1n} \\ \frac{w_2}{w_1} \epsilon_{21} & 1 & \frac{w_2}{w_3} \epsilon_{23} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \epsilon_{2n} \\ \frac{w_3}{w_1} \epsilon_{31} & \frac{w_3}{w_2} \epsilon_{32} & 1 & \cdots & \frac{w_3}{w_n} \epsilon_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} \epsilon_{n1} & \frac{w_n}{w_2} \epsilon_{n2} & \frac{w_n}{w_3} \epsilon_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \cdots & \epsilon_{1n} \\ \epsilon_{21} & 1 & \epsilon_{23} & \cdots & \epsilon_{2n} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 1 & \cdots & \epsilon_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{n1} & \epsilon_{n2} & \epsilon_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ &= D_w E D_w^{-1} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

이제, 양변에 $(1/\mathbf{w})$ 벡터를 곱하면,

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \left(\frac{1}{\mathbf{w}} \right)' \mathbf{w} &= \left(\frac{1}{\mathbf{w}} \right)' D_w E D_w^{-1} \mathbf{w}, \\ n \lambda_{\max} &= \mathbf{1}' E \mathbf{1}_n = n + \sum_{i \neq j} \epsilon_{ij} = n + \sum_{i > j} \left(\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right), \\ \lambda_{\max} &= 1 + \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left(\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right) = \sum_{i > j} \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left(\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right) \\ &= \sum_{i > j} \left\{ \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \left(\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right) \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left\{ \frac{2}{n-1} + \frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} \right\}, \\ \lambda_{\max} - n &= \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left\{ \frac{2}{n-1} + \frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} \right\} - \sum_{i > j} \frac{2}{n-1} \left(\because n = \sum_{i > j} \frac{2}{n(n-1)} n = \sum_{i > j} \frac{2}{(n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left[\frac{2}{n-1} + \frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} - \frac{2n}{n-1} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left[\frac{2-2n}{n-1} + \frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left[\frac{2(1-n)}{n-1} + \frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left[\frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} - 2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left[\frac{\epsilon_{ij}^2 + 1}{\epsilon_{ij}} - \frac{2\epsilon_{ij}}{\epsilon_{ij}} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i > j} \left[\frac{\epsilon_{ij}^2 - 2\epsilon_{ij} + 1}{\epsilon_{ij}} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i > j} \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\epsilon_{ij}} \geq 0, \quad (\text{등호는 } \epsilon_{ij} = 1 \text{ 일 때 성립}). \end{aligned}$$

그러므로 $\lambda_{\max} \geq n$ 이 성립함을 볼 수 있다. \square

위의 증명은 Frobenius 정리를 활용하거나 Ko와 Lee (2001), Xu (2000) 등 다양한 방법이 존재하는데, 5장에서 CI 분포 특성을 설명하기 위해 앞의 방법으로 그 성질을 증명하였다. 정리 3.1에 의하면, A 가

Table 3.1. Random index(RI) and critical value of consistency index(CI)

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0.52	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49
Critical value of CI	0.052	0.09	0.112	0.124	0.132	0.141	0.145	0.149

완벽한 응답일관성을 가질 경우 A 의 모든 오차는 $\epsilon_{ij} = 1$, 최대고유값은 $\lambda_{\max} = n$ 이며, A 가 응답일관성에서 벗어날수록 $\epsilon_{ij} > 1$, $\lambda_{\max} > n$ 이 됨을 볼 수 있다. 따라서는 Satty (1980, 2003a)는 A 의 일관성 지수 CI를 다음과 같이 정의하였다.

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}. \tag{3.2}$$

그리고 CI의 임계값을 결정하기 위해, 다음과 같은 일관성 비율(consistency ratio; CR)을 제시하였다.

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{(n - 1)RI}, \tag{3.3}$$

여기서 RI(random index)는 무작위 지수로 ‘평가자의 비교행렬의 원소가 9점 척도에서 무작위로 작성되었다’라는 가정 하에서 임의로 생성한 500개의 비교행렬에서 계산된 CI의 평균으로 Table 3.1에 제시되어있다. 한편, Saaty (1980)는 CR이 0.1보다 작으면, 추정치 \hat{w} 를 신뢰할 수 없다고 하였다. 그러므로 RI에 의존하는 CI 임계값 역시 Table 3.1과 같이 결정된다.

예제 3.1: 일관성 지수, 응답일관성 검증, 오차행렬

$w = (w_1, \dots, w_5)'$ 인 AHP에서 9점 척도로 측정된 평가자의 비교행렬이 다음과 같을 때,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

중요도 벡터는 $\hat{w} = (0.463, 0.089, 0.228, 0.107, 0.114)'$ 이며, 일관성 지수는 0.103으로 계산된다. 한편, 일관성 지수 0.103이 5차원 CI 임계값 0.112 보다 작기 때문에 A 를 응답일관성을 유지하는 일치행렬이라고 판단한다. 한편, 비교행렬 A 와 추정행렬 $\hat{C} = \hat{w}\hat{w}'$, 잔차행렬 \hat{E} 에 대해 $A = \hat{C} \circ \hat{E}$ 가 성립함을 볼 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 & 5.19 & 2.03 & 4.34 & 4.06 \\ 0.19 & 1.00 & 0.39 & 0.83 & 0.78 \\ 0.49 & 2.55 & 1.00 & 2.13 & 2.00 \\ 0.23 & 1.20 & 0.47 & 1.00 & 0.94 \\ 0.25 & 1.28 & 0.50 & 1.07 & 1.00 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1.00 & 0.77 & 2.46 & 0.69 & 0.49 \\ 1.30 & 1.00 & 0.64 & 1.20 & 1.28 \\ 0.41 & 1.57 & 1.00 & 0.94 & 1.50 \\ 1.45 & 0.83 & 1.07 & 1.00 & 1.07 \\ 2.03 & 0.78 & 0.67 & 0.94 & 1.00 \end{pmatrix}$$

여기서, 잔차행렬 \hat{E} 의 모든 원소가 1에서 크게 벗어나지 않음을 볼 수 있다.

이제, 경영과학의 한 분야로 언급된 AHP의 응답일관성 검정(consistency test)을 통계적 검정의 일환으로 살펴보기로 하자. 앞의 예에서 보면, 일관성 지수 CR은 검정통계량, CR의 0.1은 유의수준, CI 임계값은 기각역 의미를 지니고 있음을 볼 수 있다. 여기서 우리는 응답일관성 검정의 가설을 다음과 같이 놓기로 한다.

$$H_0 : \text{평가자의 응답이 무작위이다.} \quad H_1 : \text{평가자의 응답이 무작위가 아니다.}$$

AHP에서 행렬의 차원이 증가하면, CR 0.1은 유의수준 0.1보다 훨씬 엄격한 수준이 되어 대부분의 H_0 를 기각하지 못하게 되고, 이에 따라 평가자의 w 를 신뢰할 수 없다는 결과를 유도하게 된다. Saaty의 응답일관성 검정의 문제를 보다 자세히 살펴보자.

앞서 언급한 바와 같이 응답일관성 검정은 쌍대비교행렬 A 에서 구한 일관성 지수 CI와 차원별로 고정된 무작위 지수 RI의 비인 일관성 비율 CR을 검정통계량으로 사용한다. 그런데, 임계값을 유도하는 RI는 Table 2.1의 9점 척도로부터 무작위 추출된 500개의 비교행렬 A_i ($i = 1, \dots, 500$)들에서 계산된 CI_i ($i = 1, \dots, 500$) 평균값으로 이는 H_0 하에서 형성되는 CI 분포의 평균추정치로 의미한다. 본 연구에서 모의실험으로 확인해 본 결과, 모의실험 횟수가 500을 넘으면, Table 3.1의 값의 변화가 거의 없음을 확인할 수 있었다. 즉, AHP 응답일관성 검정은 9점 척도 무작위 행렬의 일관성 지수의 평균값인 RI의 10% 수준을 임계값으로 삼는 검정방법이라 할 수 있다. 여기서, 'CI 임계값 ($RI \times 0.1$)'은 9점 척도 무작위 지수 RI와 밀접하게 연관되어 있고, 이는 보다 근본적으로 쌍대비교행렬 A 의 최대고유값 λ_{\max} 의 분포와 밀접한 연관을 지니고 있다. 그런데, 기각역인 'CR < 0.1' 또는 'CI < 0.1 × RI' 기준을 사용하는 응답일관성 검정은 크게 두 가지 관점에서 문제를 지니고 있다. 첫째, 가설검정의 기각역에 사용되는 RI가 9점 척도 모의실험에서 도출된 값이기 때문에 모든 비교행렬 A 에 대한 이론적 기반이 약하다. 둘째, 귀무가설하에서의 일관성 지수 CI의 평균인 RI와 쌍대비교행렬 A 로부터 도출된 CI의 값의 크기를 비교하는 것은 일견 타당하더라도, '귀무가설 하에서 CI 분포의 대푯값'으로 '평균'을 사용하는 것이 적절한지 여부를 확인하지 않았다는 점이다. 즉, CI의 귀무가설 하의 분포를 확인하지 않고 결정된, 무작위 지수 RI는 적절하지 않을 수 있다.

4. 모의실험에 기초한 일관성 지수(CI)

Figure 4.1은 9점 척도를 사용한 귀무가설 하에서 일관성 지수의 분포의 형태를 모의실험으로 차원별로 확인한 결과이다. 그림에서 보듯 일관성 지수 CI의 귀무분포는 3, 4, 5차원 등 비교적 저차원에서 오른쪽 꼬리 분포를 가지며, 차원이 올라 갈수록 좌우 대칭 분포로 근사하는 등 차원별로 그 분포의 형태가 다름을 볼 수 있다. 이러한 차원별 분포의 비대칭성으로 인해 3차원의 'CI 임계값'은 너무 관대하며(응답일관성이 낮은 비교행렬이라도 응답일관성이 있다고 판단), 차원이 높은 경우는 그 반대의 현상을 보인다. 예를 들어, 3차원의 경우 9점 척도 무작위 비교행렬의 CI의 평균(0.52)과 중앙값(0.22)은 불일치가 커서, Saaty의 검정법에 따라서 응답일관성 검정을 실시하면, CR < 0.1 즉, CI < 0.052인 비교행렬을 모두 응답일관성이 있는 행렬로 판단하게 되는데, $\Pr(CI < 0.052) = 0.21$ 로 유의확률이 매우 큰 편이 된다 (Figure 4.2의 왼편). 한편, 4차원 경우 Saaty가 제시하는 CR < 0.1 기준에 해당하는 CI 임계값은 0.009이고 유의확률은 0.03으로 급격히 떨어지며, 7차원의 경우 CI 임계값인 0.134보다 작은 CI를 가지는 비교행렬이 나올 확률이 거의 0에 가까워짐을 보게 된다 (Figure 4.2의 오른편).

이와 같이 귀무가설 하에서 CI의 분포는 차원이 커질수록 대칭의 형태를 띠지만, CI 임계값을 만족하는 일치행렬이 발생할 확률은 매우 드물다는 특징을 지닌다. Ko와 Lee (2001)은 일관성 비율 $CR = CI/RI$ 의 분포 부분에 사용하는 무작위 지수 RI를 9점 척도에서 무작위 추출된 CI의 '평균'을 사

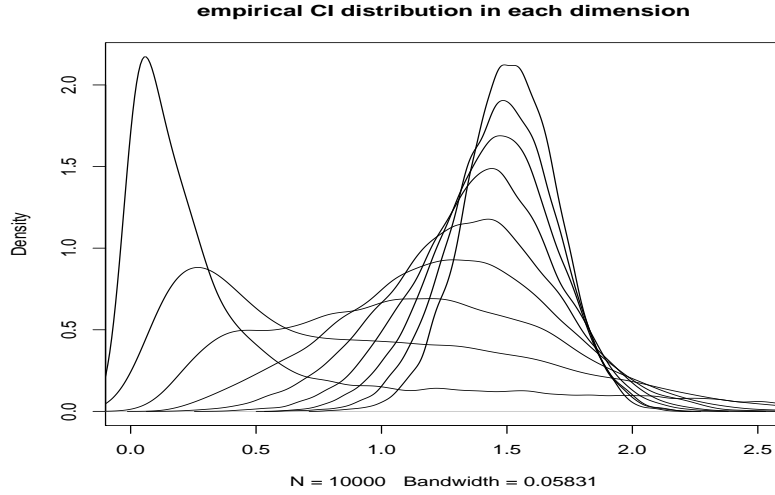


Figure 4.1. Empirical CI distribution based on 9 scale non-consistency matrix

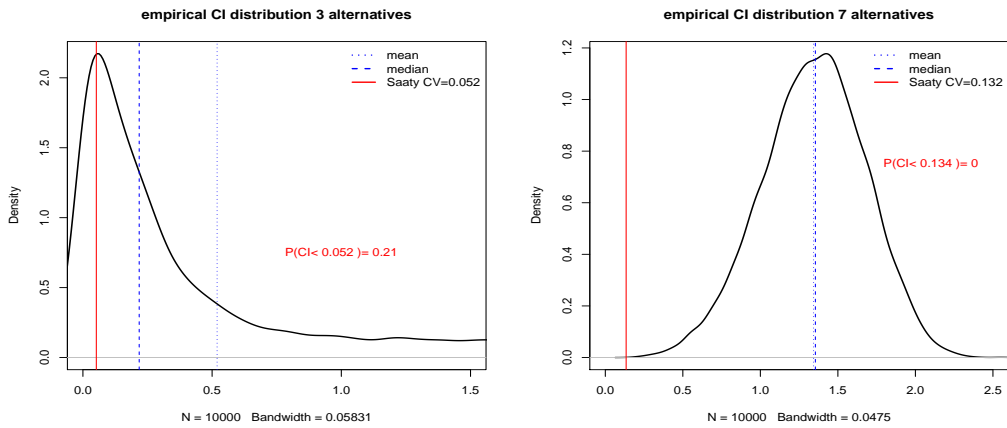


Figure 4.2. Mean, median and critical value of CI based on empirical distribution for three and seven dimensions

용한 대신 ‘중앙값’을 사용한 수정 RI를 제시한바 있다. Table 4.1은 1000번의 모의실험으로 본 연구에서 계산한 Ko와 Lee (2001)의 수정 CI 임계값(ACI)이다. 그런데, 수정 CI 임계값은 저차원에서 기존의 CI와 다를 뿐, 고차원에서는 거의 차이가 없음을 볼 수 있다. 즉, 수정 CI는 $n \leq 4$ 인 저차원에서 일치행렬의 검정을 보다 엄격히 할 뿐 $n \geq 5$ 이상인 의사결정에는 기존의 결과와 동일하다고 할 수 있다.

이제, 본 연구에서는 평가자의 CI와 RI의 함수인 CR을 이용하는 기존의 검정법 대신, RI를 사용하지 않고 평가자의 CI만으로, 가설 검정에서 단순하게 활용할 수 있는 응답일관성 귀무분포 테이블을 제안하기로 한다 (Table 4.2).

Table 4.2를 사용하면, 평가자로부터 계산된 CI에 대해 ‘ H_0 : 평가자의 비교행렬이 9점척도에서 무작위로 작성되었다’ 여부를 판단할 수 있다. 응답일관성 검정에서 의사결정의 중요성에 따라서 검정의 기준을 달리 할 수 있는데, Table 4.2를 활용하여 0% 또는 1% 분위수를 새로운 CI 허용기준으로 사용할

Table 4.1. Adjusted random index(ARI) and critical value of adjusted consistency index(ACI)

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0.52	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49
Critical value of CI	0.052	0.09	0.112	0.124	0.132	0.141	0.145	0.149
Adjusted RI	0.218	0.753	1.101	1.267	1.355	1.417	1.457	1.487
Critical value of adjusted CI	0.021	0.075	0.110	0.126	0.135	0.141	0.145	0.1487

Table 4.2. Quantile table of Consistency index under null hypothesis

Quantile	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0%	0.000	0.004	0.031	0.163	0.206	0.373	0.602	0.624	0.791
1%	0.000	0.045	0.182	0.339	0.540	0.732	0.866	0.977	1.070
5%	0.004	0.117	0.304	0.556	0.774	0.941	1.043	1.128	1.207
10%	0.015	0.174	0.407	0.709	0.906	1.047	1.140	1.212	1.279
25%	0.068	0.334	0.709	0.976	1.123	1.229	1.293	1.344	1.394
50%	0.218	0.753	1.101	1.267	1.355	1.417	1.457	1.487	1.517
75%	0.616	1.343	1.481	1.543	1.576	1.596	1.610	1.627	1.641
90%	2.127	2.061	1.954	1.913	1.877	1.850	1.821	1.821	1.814
99%	2.846	2.489	2.236	2.167	2.058	2.014	1.963	1.956	1.932
100%	3.556	3.077	2.739	2.710	2.552	2.413	2.281	2.182	2.155

수 있으며, 평가의 대상이 되는 대안의 차원과 중요성을 종합적으로 고려하여 적절한 분위수를 선택할 수도 있을 것이다. 예를 들어 5차원의 AHP 비교행렬 A 의 일관성 지수 CI가 0.35로 측정되었다면, 5% 분위수인 0.304보다 크기 때문에 5% 수준에서는 신뢰하기 힘든 비교행렬, 10% 분위수인 0.709보다 작기 때문에 10% 수준에서는 신뢰할 수 있는 비교행렬이라고 의미를 부여할 수 있을 것이다. 또한 의사결정의 상황에 따라서 그 분위수를 달리하여 응답일관성 검정의 기준으로 Table 4.2를 활용할 수 있을 것이다.

실제, AHP에서는 대부분의 평가자들이 합리적인 평가를 실시하기에, 일치행렬에 근접한 비교행렬을 작성한다. 그러므로, Table 4.2의 0% 보다 낮은 CI가 얼마든지 발생할 수 있다. H_1 하의 분포를 알 수 없기 때문에 정확한 검정력을 유도할 수 없다는 점은 본 연구의 한계이다. 그러므로 연구자는 Table 4.2를 H_0 하에서 발생하는 상황의 확률로 이해하고, 매우 엄격한 Saaty의 판단 기준 대신, Table 4.2의 1% 이하 수준에서 임계값을 사용하길 권유한다($n = 3$ 제외). 혹은, H_0 상황에서, AHP에 참가한 평가자들의 CI 유의확률을 계산한 후, 전체 평가자들의 평균 유의확률을 계산하여 임계값 수준을 사후적으로 결정하는 것도 좋은 방법 중 하나라고 생각한다.

5. 모수적 방법에 의한 일관성 지수(CI)

본 장에서는 식 (3.1)의 비교행렬 모형 $a_{ij} = (w_i/w_j)\epsilon_{ij}$ 에서 오차 ϵ_{ij} 에 특정한 분포를 가정하는 방법으로 일관성 지수 CI의 분포를 근사적으로 살펴보기로 한다. 사실, 비교행렬의 최대고유값인 λ_{\max} 의 분포와 연관된 일관성 지수 CI의 분포에 관해서는 알려진 바 없다. 그러므로 오차항 ϵ_{ij} 에 적절한 분포를 가정하여, 모수적 접근을 시도하기로 한다.

정리 3.1에서 다음 식 (5.1)이 성립함을 볼 수 있다.

$$n(\lambda_{\max} - n) = \sum_{i < j} \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\epsilon_{ij}}. \quad (5.1)$$

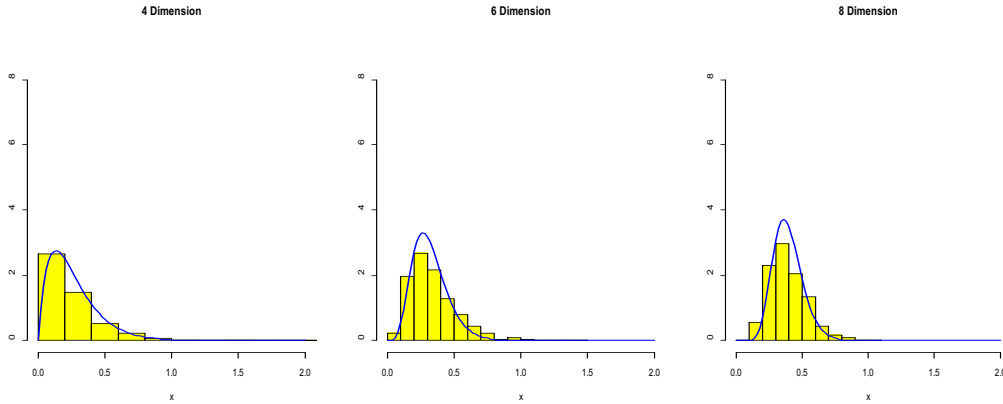


Figure 5.1. Empirical distribution of CI and density of gamma distribution

이제, ϵ_{ij} 가 $\log \epsilon_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$ 인 로그정규분포를 따르며 기댓값 $E(\epsilon_{ij})$ 가 1이라 가정하자. 로그정규분포하에서 $E(\epsilon_{ij}) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$, $\text{Var}(\epsilon_{ij}) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$ 이다. 한편, 오차항 ϵ_{ij} 를 일치행렬 내에서 관찰된 측정오차 중 하나로 생각하고, $c_{ij} = \text{Var}(\epsilon_{ij})/\epsilon_{ij}$, $c_0 = \text{Var}(\epsilon_{ij})/E(\epsilon_{ij})$, $c_1 = \min(c_{ij})$, $c_2 = \max(c_{ij})$ 라 놓자. 즉, c_1 , c_2 는 관찰된 오차항의 최소, 최대와 연관이 있는 값이다. 이제, 식 (5.1)로부터

$$\begin{aligned} \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\text{Var}(\epsilon_{ij})} c_1 &\leq \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\text{Var}(\epsilon_{ij})} c_{ij} \simeq \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\text{Var}(\epsilon_{ij})} \frac{\text{Var}(\epsilon_{ij})}{E(\epsilon_{ij})} \leq \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\text{Var}(\epsilon_{ij})} c_2 \\ \sum_{i < j} \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\epsilon_{ij}} &\simeq \sum_{i < j} \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\text{Var}(\epsilon_{ij})} c_0 \simeq c_0 \chi^2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

의 관계를 도출할 수 있다. 한편, 자유도가 ν 인 카이제곱 확률변수는 감마분포의 특별한 경우이므로, 식 (5.1)을 감마분포의 형태로 나타내면

$$n(\lambda_{\max} - n) = \sum_{i < j} \frac{(\epsilon_{ij} - 1)^2}{\epsilon_{ij}} \approx c_0 \chi^2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = \Gamma \left(\frac{n(n-1)}{4}, 2c_0 \right)$$

의 관계가 도출된다. 그러므로, CI를 조정인자 c_0 가 있는 아래의 근사적 감마분포로 간주할 수 있다.

$$\text{CI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \approx \Gamma \left(\frac{n(n-1)}{4}, \frac{2c_0}{n(n-1)} \right).$$

예를 들어, $\mu = -1/2$, $\sigma^2 = 1$ 이면, 감마분포의 조정인자는 $c_0 = 1.7182$ 가 된다.

Figure 5.1은 일치행렬을 고정하고, 오차행렬을 $\log \epsilon_{ij} \sim N(-0.4, 0.8)$ 로 가정한 후 생성된 1,000개의 비일치행렬로부터 구한 CI의 경험분포(히스토그램)와 감마분포(실선)를 4차, 6차, 8차원에서 표현한 그림이다. Figure 5.1에서 CI의 경험분포와 감마분포의 형태가 유사함을 볼 수 있다. 그런데, 식 (5.2) 결과를 실제 자료분석에 활용하기에는 몇가지 문제가 있다. 그 이유는 실제 자료분석에서는 정확한 오차행렬 E 를 계산할 수 없기 때문이다. 즉, 실제상황에서 $E(\epsilon_{ij}) \neq 1$ 인 경우가 다수 존재하며, 일치행렬 A 에서 추정된 $\hat{\omega}$ 으로 형성한 오차행렬 E 의 분산의 크기는 실제 오차행렬의 그 값 보다 크게 축소되어 관찰되기 때문이다. 즉, Figure 5.1의 모의실험은 $\mu = -\sigma^2/2$ 의 관계로부터 도출된 $\text{Var}(\epsilon_{ij})$ 를 활용하여 의도적으로 맞춘 결과로 이해해야 한다. 실제, 자료분석에서 $\text{Var}(\epsilon_{ij})$ 의 크기를 추정할 수 없다는 점

은 모수적 접근의 한계이다. 그런데, 9점 척도로 되어있는 경우 귀무가설하에서 $c_0 \approx 1$ 이라는 점을 경험적으로 살펴볼 수 있었다. 그러므로 이러한 사실을 이용하여 CI에 대한 모수적 유의확률을 계산할 수 있을 것이다.

앞의 예제행렬에 대해 본 연구결과를 적용하기로 한다. 앞의 예에서 CI는 0.103이었다. CI 임계값이 0.112, 수정 CI 임계값은 0.110이므로 행렬 A는 일치성을 지닌다고 판단할 수 있다. 하지만, 이 결과는 단지 일치행렬인가 아닌가만 알려줄 뿐 더 이상의 정보를 제공하지 못한다. 이제, 이를 본 연구에서 유도한 Table 4.2의 모의실험표와 모수적 분포 두 방법을 사용하여 유의확률을 계산하기로 한다. 모의실험표에 기초하여, 보간식으로 CI의 유의확률을 계산하면 0.0047, 조정인자가 1인 감마분포를 사용하면 유의확률은 0.0042이다. 즉, 모의실험결과와 감마분포 근사는 매우 유사한 결과를 유도하며, 해당 행렬 A가 무작위 행렬일 확률이 극히 낮음을 알 수 있다.

6. 결론

다수의 의사결정법중에서 AHP의 장점은 응답일관성 검정을 통한 의사결정의 신뢰성 검정이 가능하다는 점이다. 하지만 Saaty의 CI 검정은 귀무분포가 존재하지 않고, 임계값 설정이 주관적이라는 단점이 있는데, 그 이유는 AHP의 쌍대비교행렬을 오차를 가지는 모형으로 접근하는 확률적 관점 보다는 결정론적 관점으로 사용했기 때문이다 (Saaty, 2003b).

본 연구에서는 모의실험을 사용하여 CI의 분포를 확인하였으며, 모의실험에서 계산된 분포에 따라 적절한 허용 CI 분위값을 제시하였다. 이는 기존의 응답일관성 검정에 사용되던 난수지수 및 일관성 비율을 계산할 필요가 없어도, 9점 척도 AHP 검정의 판단 기준을 동일하게 제공하는 특징을 지닌다. 한편, 오차항에 대한 확률적 모형을 사용하여, 9점 척도가 아닌 경우에도 검정통계량 CI의 분포를 감마분포로 특수한 경우 근사시킬 수 있음을 제안하였다. 이러한 두 방법을 사용하여, 비교행렬의 응답일관성에 대한 객관적인 확률적 진술이 가능하리라 생각한다. 향후 오차항의 분포를 다양화 하여 AHP 검정의 특징을 연구하고, 모수적 방법과 비모수적 방법의 적절한 결합방안에 대한 연구가 필요하다.

References

- Basak, I. (1989). Estimation of the multi-criteria worths of the alternatives in a hierarchical structure of comparisons, *Communication in Statistics Theory and Methods*, **18**, 3719–3738.
- Basak, I. (2001). The categorical data analysis approach for ratio model of pairwise comparisons, *European Journal of Operational Research*, **128**, 532–544.
- Basak, I. (2002). On the use of information criteria in analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, **141**, 200–216.
- Hahn, E. D. (2006). Link function selection in stochastic multicriteria decision making models, *European Journal of Operational Research*, **172**, 86–100.
- Haines, L. M. (1998). A statistical approach to the analytic hierarchy process with interval judgements (I): Distributions on feasible regions, *European Journal of Operational Research*, **110**, 112–125.
- Jeong, H. C., Lee, J. C. and Jhun, M. (2012). A study for obtaing weights in pairwise comparison matrix in AHP, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 531–541.
- Ko, K. K. and Lee, K. J. (2001). Statistical characteristics of response consistency parameters in analytic hierarchy process, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, **26**, 71–82.
- Kumar, N. and Ganesh, L. S. (1996). A simulation-based evaluation of the approximate and the exact eigenvector methods employed in AHP, *European Journal of Operational Research*, **95**, 656–662.
- Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York.

- Saaty, T. L. (2003a). *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York.
- Saaty, T. L. (2003b). Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary, *European Journal of Operational Research*, **145**, 85–91.
- Scholl, A., Manthey, L., Helm, R. and Steiner, M. (2005). Solving multiattribute design problems with analytic hierarchy process and conjoint analysis: An empirical comparison, *European Journal of Operational Research*, **164**, 760–777.
- Vargas, L. G. (1990). An overview of the analytic hierarchy process and its applications, *European Journal of Operational Research*, **48**, 2–8.
- Xu, Z. (2000). On consistency of the weighted geometric mean complex judgement matrix in AHP. *European Journal of Operational Research*, **126**, 683–687.

계층적 의사결정론에서 일관성 지수에 대한 통계적 검정

이종찬^a · 전명식^a · 정형철^{b,1}

^a고려대학교 통계학과, ^b수원대학교 통계정보학과

(2013년 11월 15일 접수, 2013년 12월 2일 수정, 2013년 12월 2일 채택)

요약

계층적 의사결정론(AHP)에서 응답자의 신뢰성을 평가하기 위해 일관성 지수가 활용된다. 일반적으로 일관성 지수 값이 0에 근접할 수록 신뢰성이 있다고 판단되나, 신뢰성에 대한 임계값은 9점 척도의 비교행렬로부터 모의실험된 무작위 지수의 평균에 의존한다. 본 연구에서는 9점 척도 비교행렬에 의한 모의실험 분포가 차원별로 치우침이 심한 분포라는 점에 기초하여, 차원별 일관성 지수의 분위수에 기초한 통계적 가설검정 방법을 소개하기로 한다. 그리고, 모의실험으로 계산된 일관성 지수의 분포에 따라 적절한 임계 분위값을 제공하였다. 또한, 쌍대비교행렬의 각 원소에 오차를 고려한 모형을 적용하여, 일관성 지수의 분포를 감마분포로 특수한 경우 근사시킬 수 있음을 제시하였다.

주요용어: 계층적 의사결정론, 일관성 지수, 무작위 지수, 최대 고유값, 비일치 행렬, 감마분포.

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (2010-0008825).

¹교신저자: (445-743) 경기도 화성시 봉담읍 와우리 산 2-2, 수원대학교 통계정보학과부, 부교수.

E-mail: jhc@suwon.ac.kr